

ИЗГИБ КРУГЛОЙ ПЛИТЫ НА ЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ ДЕЙСТВИИ ПРОДОЛЬНЫХ И ПОПЕРЕЧНЫХ УСИЛИЙ

Г. Н. Павлик

(Ростов-на-Дону)

Задача об изгибе круглой плиты на упругом полупространстве при одновременном действии продольных и поперечных усилий была исследована ранее [1].

Предлагается метод решения задачи об изгибе круглой пластины на линейно-деформируемом основании, позволяющий рассматривать разные модели основания и виды нагрузок для широкого диапазона изменения безразмерных параметров, характеризующих гибкость плиты, физико-механические свойства основания и интенсивность продольных усилий. По предложенному алгоритму составлена вычислительная программа на языке «Алгол-60». В качестве примера рассматривается изгиб круглой плиты на упругом слое, лежащем без трения на скальном основании и на слое, жестко соединенном с недеформируемым основанием.

1. Пусть круглая плита радиуса R лежит без трения на линейно-деформируемом основании общего типа. На плиту действуют распределенная осесимметрично по верхней поверхности нормальная нагрузка $p^*(r')$, продольные усилия T и реактивное давление со стороны основания $q^*(r')$.

При определении прогибов плиты $w^*(r')$ будем допускать возможность использования теории Кирхгофа — Лява. Задачу можно сформулировать в виде системы уравнений, которая в безразмерных координатах имеет вид ($r' = Rr$, $\rho' = R\rho$)

$$(1.1) \quad \Delta^2 w(r) - d\Delta w(r) = p(r) - q(r)$$

$$(1.2) \quad \int_0^1 q(\rho) \left[\frac{2\lambda}{\pi(r+\rho)} K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right) + F\left(\frac{r}{\lambda}, \frac{\rho}{\lambda}\right) \right] \rho d\rho = \lambda\mu v(r, 0)$$

$$w(r) = v(r, 0), \quad r \leq 1$$

$$\lambda = HR^{-1}, \quad \mu = \theta R^3 D^{-1}, \quad w^*(r') = w(r) R, \quad d = TD^{-1}R^2$$

$$v^*(r', 0) = v(r, 0) R, \quad p^*(r') = p(r) DR^{-3}, \quad q^*(r') = q(r) DR^{-3},$$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right)$$

Здесь $v^*(r', 0)$ — осадка поверхностных точек основания, D — цилиндрическая жесткость плиты, H — некоторый геометрический параметр основания, θ характеризует физико-механические свойства основания, $K(e)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Функция $F(t, \tau)$ имеет вид [2,3]

$$(1.3) \quad F(t, \tau) = \int_0^{\infty} [L(u) - 1] J_0(t, u) J_0(\tau, u) du$$

Здесь $L(u)$ — некоторая функция, описывающая упругие свойства основания, $J_0(t, u)$ — функция Бесселя нулевого порядка. Для основных моделей основания поведение функции $L(u)$ на бесконечности и в нуле подчиняется следующим соотношениям:

$$L(u) = 1 + O(u^{-2}), \quad u \rightarrow \infty; \quad L(u) = O(u^\gamma), \quad u \rightarrow 0, \quad \gamma \geq 1$$

Функция $w(r)$ должна удовлетворять на контуре плиты условиям свободного края (ν — коэффициент Пуассона материала плиты)

$$(1.4) \quad \Delta w(r) - \frac{1-\nu}{r} \frac{dw(r)}{dr} \Big|_{r=1} = 0$$

$$\frac{d}{dr} \left[\Delta w(r) - d \frac{dw(r)}{dr} \right] \Big|_{r=1} = 0$$

К условиям (1.1), (1.2) и (1.4) надо присоединить очевидное условие статики

$$(1.5) \quad \int_0^1 [p(r) - q(r)] r dr = 0$$

Поставленная краевая задача является самосопряженной.

Это позволяет представить функцию прогиба в виде [4]

$$(1.6) \quad w(r) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m Q_m(r)$$

Здесь $Q_m(r)$ — специальная система ортонормированных полиномов, удовлетворяющих граничным условиям (1.4). Условие их ортогонализации и нормировки [5]

$$(1.7) \quad \int_0^1 [\Delta^2 Q_m(r) - d \Delta Q_m(r)] Q_k(r) r dr = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ 1, & k = m, k \geq 1 \end{cases}$$

Имеем

$$(1.8) \quad Q_0(r) = 1, \quad Q_k(r) = \sum_{s=0}^{k+1} l_s(d) r^{2s+2}$$

Учитывая линейность задачи, ищем решение интегрального уравнения в том же виде, что и функцию прогиба

$$(1.9) \quad q(r) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m q_m(r)$$

Коэффициенты $b_m(d, \lambda, \mu)$ определяются из уравнений (1.1) и (1.5) при условии (1.7)

$$(1.10) \quad \gamma_m b_m = \int_0^1 [p(r) - q(r)] Q_m(r) r dr$$

$$\gamma_m = 0 \quad \text{при } m = 0, \quad \gamma_m = 1 \quad \text{при } m \geq 1$$

Подставляя в интегральное уравнение (1.2) выражение (1.6) и (1.9), получим для определения $q_m(r)$ интегральные уравнения вида

$$(1.11) \quad \int_0^1 q_m(\rho) \left[\frac{2\lambda}{\pi(r+\rho)} K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right) + F\left(\frac{r}{\lambda}, \frac{\rho}{\lambda}\right) \right] \rho d\rho = \lambda\mu Q_m(r) \\ r \leq 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

2. Для решения интегрального уравнения (1.11) воспользуемся методом сведения его к бесконечной линейной алгебраической системе [2, 3].

Представим функцию $F(t, \tau)$ вида (1.3) в форме двойного ряда по четным полиномам Лежандра, функции $q_m(\rho)$ и $Q_m(r)$ также разложим в ряды по полиномам Лежандра. Имеем

$$(2.1) \quad F\left(\frac{r}{\lambda}, \frac{\rho}{\lambda}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} e_{kj}(\lambda) P_{2k}(\sqrt{1-\rho^2}) P_{2j}(\sqrt{1-r^2}) \\ q_m(\rho) = \mu \sum_{k=0}^{\infty} S_k^m \frac{P_{2k}(\sqrt{1-\rho^2})}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ Q_m(r) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k^m P_{2k}(\sqrt{1-r^2}), \quad R_k^m = 0 \quad \text{при } k > m + 2$$

Воспользовавшись известным свойством ортогональности полиномов Лежандра и интегралом [6]

$$\int_0^1 J_0(bx) P_{2k}(\sqrt{1-x^2}) \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{1}{\sqrt{b}} J_{2k+1/2}(b)$$

получим для коэффициентов $e_{kj}(\lambda)$ выражение

$$e_{kj} = \pi\lambda(4k+1)(4j+1) \frac{(2k-1)!!(2j-1)!!}{2(2k)!!(2j)!!} \times \\ \times \int_0^{\infty} [1-L(u)] J_{2k+1/2}\left(\frac{u}{\lambda}\right) J_{2j+1/2}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \frac{du}{u}$$

Для коэффициентов R_k^m имеем

$$R_k^m = (4k+1) \int_0^1 Q_m(\rho) P_{2k}(\sqrt{1-\rho^2}) \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}, \quad k \leq m+2$$

Подставляя в интегральное уравнение (1.11) функции $F(t, \tau)$, $q_m(\rho)$, $Q_m(r)$ вида (2.1) и используя спектральное соотношение [3]

$$\int_0^1 \frac{\rho P_{2m}(\sqrt{1-\rho^2})}{\sqrt{1-\rho^2}} K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right) \frac{d\rho}{r+\rho} = \frac{\pi^2}{4} \frac{[(2m-1)!!]^2}{[(2m)!!]^2} P_{2m}(\sqrt{1-r^2})$$

получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов S_k^m

$$(2.2) \quad S_k^m \frac{\pi}{2} \frac{[(2k-1)!!]^2}{[(2k)!!]^2} = R_k^m + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} S_n^m \frac{e_{kn}(\lambda)}{4n+1}$$

Система (2.2), как доказывается в работе [3], квазивполне регулярна при всех $0 < \lambda < \infty$. Ее можно решить методом редукции.

Найдя коэффициенты $S_k^m(\lambda, d)$, для окончательного решения задачи второе выражение (2.1) подставляем в (1.10) и решаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$(2.3) \quad \gamma_m b_m + \sum_{s=0}^{\infty} b_s c_{sm} = f_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\gamma_m = 0 \quad \text{при } m = 0, \quad \gamma_m = 1 \quad \text{при } m \geq 1$$

$$c_{sm} = \int_0^1 q_s(\rho) Q_m(\rho) \rho d\rho, \quad f_m = \int_0^1 p(r) Q_m(r) r dr$$

Можно доказать, что эта система также квазивполне регулярна.

После определения коэффициентов b_m основные параметры рассматриваемой задачи находятся по формулам (1.6) и (1.9).

Таким образом, задача сводится к последовательному решению систем линейных алгебраических уравнений (2.2) и (2.3).

3. По изложенному алгоритму решения задачи изгиба круглых плит на линейно-деформируемом основании общего типа при одновременном действии поперечных¹ и продольных усилий составлена универсальная вычислительная программа на языке «Алгол-60». Относительная самостоятельность отдельных блоков программы дает возможность изменять модель основания, вид нагрузки $p(r)$, величину продольных усилий T , относительную гибкость плиты μ , безразмерный параметр λ , а также точность окончательных результатов.

Для примера в качестве моделей упругого основания рассматривались: 1) упругий слой конечной толщины H , лежащий без трения на жестком основании, 2) упругий слой, жестко соединенный с недеформируемым основанием. Функция $L(u)$ для этих задач имеет вид

$$1) \quad L(u) = \frac{\text{ch } 2u - 1}{\text{sh } 2u + 2u}$$

$$2) \quad L(u) = \frac{2\kappa \text{ sh } 2u - 4u}{2\kappa \text{ ch } 2u + 1 + \kappa^2 + 4u^2}, \quad \kappa = 3 - 4\nu_1$$

где ν_1 — коэффициент Пуассона материала слоя.

Расчеты проводились для разных нагрузок: равномерной нагрузки, сосредоточенной силы в центре, по краю, сосредоточенных моментов по краю.

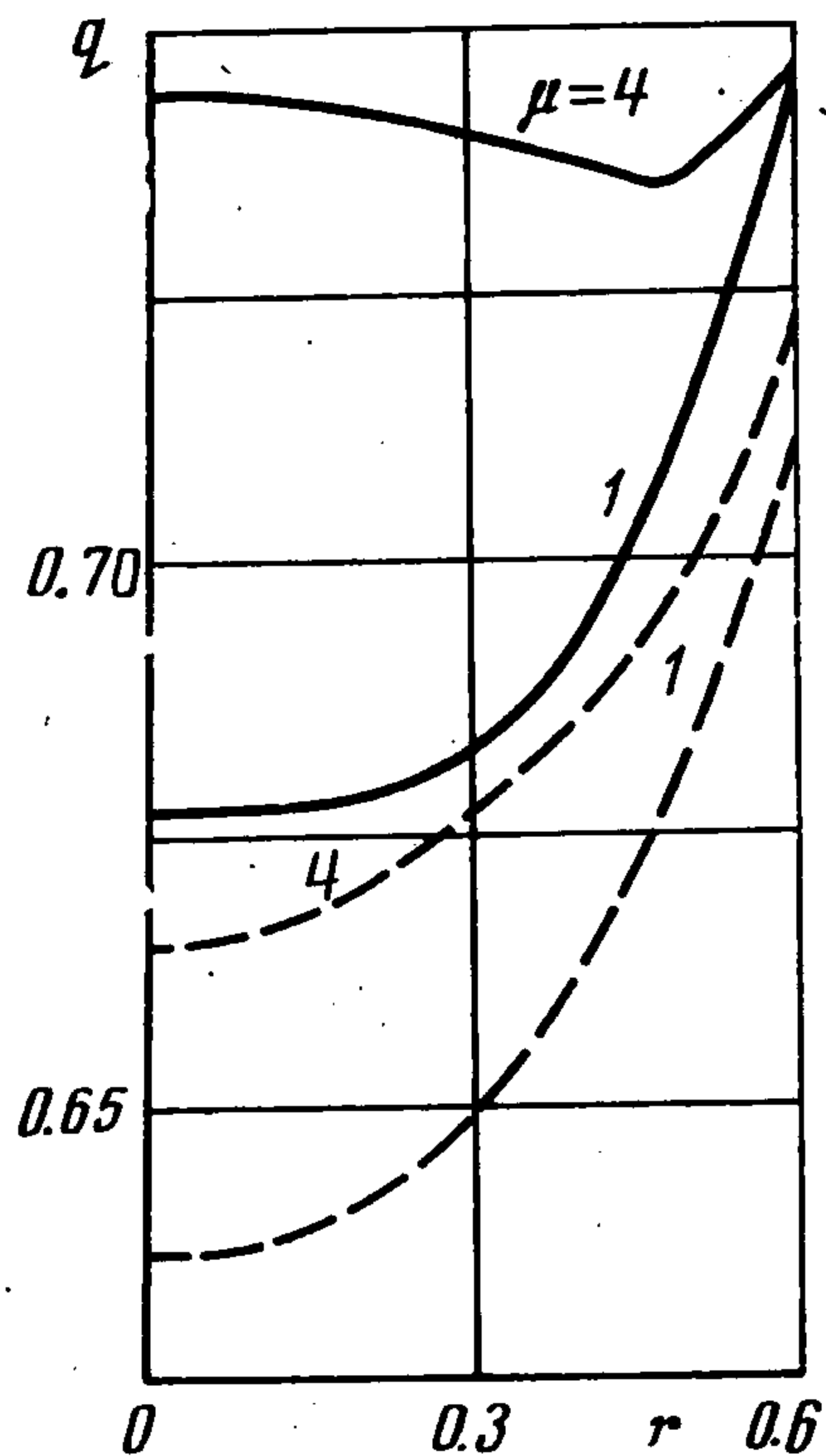
Было замечено, что при фиксированном значении параметра d с уменьшением λ сходимость метода ухудшается. Это следует из того, что при $\lambda \rightarrow 0$ первый ряд (2.1) расходится по линии $t = \tau$ [3]. Однако, как показывают расчеты, при $\lambda \geq 0.5$ и $\mu < 30$ решения с тремя верными знаками обеспечиваются, если в системе (2.2) брать 4—8 уравнений, а в системе (2.3) 3—6 уравнений. Причем чем меньше λ и больше μ , тем большее число уравнений требуется для достижения заданной точности. С увеличением параметра d от нуля до 15 сходимость метода улучшается. Дальнейший рост d , а также отрицательные значения ухудшают сходимость. Для отрицательных значений необходимо рассматривать дополнительно вопрос об устойчивости пластины.

При сосредоточенных нагрузках наблюдается тот же эффект, но порядок систем (2.2) и (2.3) на единицу выше.

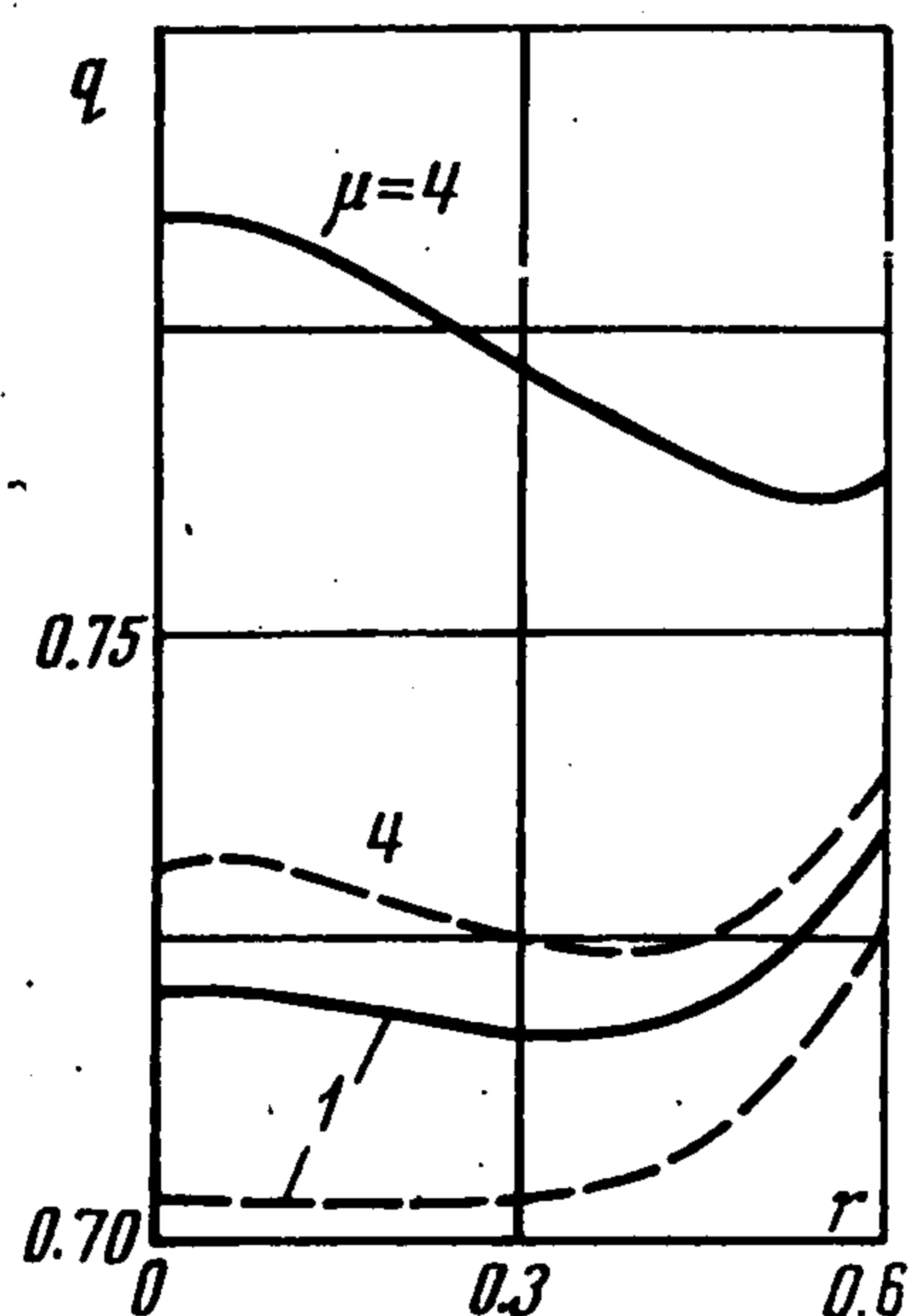
Расчеты показывают, что при $\lambda > 4$ и при любых μ, d способ прикрепления слоя к основанию перестает оказывать существенное влияние на результаты расчета контактного давления и прогиба.

При $\lambda > 6$ с погрешностью не более 3% можно рассматривать как частный случай задачу об изгибе пластины на упругом полупространстве. Для этого случая результаты расчетов хорошо согласуются с данными работы [1].

На фиг. 1 и фиг. 2 представлены графики контактного давления $q(r)$ соответственно для моделей основания 1) и 2) при равномерной нагрузке $p(r) = 1$, $\lambda = 1$, $\nu = 1/6$, $\nu_1 = 0.3$, $\theta = G_1 / (1 - \nu_1)$ (G_1 — модуль сдвига материала слоя) и разных значениях μ и d . Значениям $d = 1$ соответствуют сплошные линии, $d = 10$ — штриховые.



Фиг. 1



Фиг. 2

Результаты расчета показывают, что при увеличении d плита становится более жесткой, причем влияние растягивающих (сжимающих) усилий с увеличением гибкости плиты сказывается в большей мере. Эта тенденция проявляется сильнее в случае слоя, свободно лежащего на жестком основании.

Для $|d| < 0.5$ результаты расчетов $q(r)$ и $w(r)$ практически не отличаются от результатов для задачи об изгибе пластины под действием вертикальной нагрузки [7-9], т. е. при $|d| < 0.5$ растягивающие (сжимающие) усилия можно не учитывать.

Автор благодарит И. И. Воровича и В. М. Александрова за ценные советы и внимание к работе.

Поступила 17 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишкова А. Г. Изгиб круглой пластинки на упругом полупространстве под действием сосредоточенной силы и продольных сил. Изв. вузов. Сер. матем., 1962, № 3.
2. Александров В. М. О приближенном решении некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
3. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., «Наука», 1974.
4. Ворович И. И., Александров В. М., Солодовник М. Д. Эффективное решение задачи о цилиндрическом изгибе пластинки конечной ширины на упругом полупространстве. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4.
5. Александров В. М., Шацких Л. С. Универсальная программа расчета изгиба балочных плит на линейно-деформируемом основании. 7 Всес. конференция по теории оболочек и пластин. Днепропетровск, 1969. М., «Наука», 1970.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
7. Егоров К. Е. О деформации основания конечной толщины. Основания, фундаменты и механика грунтов, 1961, № 1.
8. Цейтлин А. И. Об изгибе круглой плиты, лежащей на линейно-деформируемом основании. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 1.
9. Горбунов-Пасадов М. И., Маликова Т. А. Расчет конструкций на упругом основании. М., Стройиздат, 1973.