Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 539.3

ИЗГИБ ТОЛСТЫХ ПЛИТ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ

Ю. А. Груздев

(Ленинград)

Рассматривается задача изгиба плиты произвольной нагрузкой. Используется предложенный А. И. Лурье [1] способ приведения трехмерных задач теории плит к двумерным при помощи дифференциальных операторов бесконечного порядка от перемещений и поворотов срединной плоскости плиты. Вводятся три функции напряжений, позволяющие отдельно рассматривать воздействие нормальной и касательной нагрузок. Приближенные уравнения строятся методом однородных решений [2]. Решена задача об осесимметричном изгибе плиты касательными усилиями с использованием уравнений первого приближения.

1. Введение функций напряжений. Уравнения равновесия толстой плиты, изгибаемой распределенной по торцам произвольной нагрузкой, имеют вид [1]

$$
\begin{gathered}
\left[\cos hD - \frac{m}{2(m-1)}\frac{h\sin hD}{D}\partial_1^2\right]u_0' + \\
+\left[-\frac{m}{2(m-1)}\frac{h\sin hD}{D}\partial_1\partial_2\right]v_0' + \\
+\partial_1\left[\cos hD + \frac{m}{2(m-1)}hD\sin hD\right]w_0 = \frac{t_x}{2\mu} \\
\left[-\frac{m}{2(m-1)}\frac{h\sin hD}{D}\partial_1\partial_2\right]u_0' + \\
+\left[\cos hD - \frac{m}{2(m-1)}\frac{h\sin hD}{D}\partial_2^2\right]v_0' + \\
+\partial_2\left[\cos hD + \frac{m}{2(m-1)}hD\sin hD\right]w_0 = \frac{t_y}{2\mu} \\
-\partial_1\left[\frac{m-2}{2(m-1)}\frac{\sin hD}{D} + \frac{m}{2(m-1)}h\cos hD\right]u_0' - \\
-\partial_2\left[\frac{m-2}{2(m-1)}\frac{\sin hD}{D} + \frac{m}{2(m-1)}h\cos hD\right]v_0' + \\
+\left[-\frac{3m-2}{2(m-1)}D\sin hD + \frac{m}{2(m-1)}hD^2\cos hD\right]w_0 = \frac{p}{2\mu}
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

$$
\Delta = D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad u_0' = \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}
$$

$$
v_0' = \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=0}
$$

$$
(\tau_{xz} = {}^1/_2\, t_x,\ \tau_{yz} = {}^1/_2\, t_y,\ \sigma_z = \pm {}^1/_2\, p \text{ при } z = \pm h)
$$

Здесь m — число Пуассона, μ — модуль сдвига, w_0 — прогиб, а u_0' и v_0' — «повороты» срединной плоскости плиты.

Выполним замену переменных, смысл которой — в отделении потенциальной и вихревой составляющих для касательной нагрузки t_x, t_y и поворотов u_0' и v_0'

$$t_x = -\partial_1 q_1 + \partial_2 q_2, \quad t_y = -\partial_2 q_1 - \partial_1 q_2 \tag{1.2}$$

$$u_0' = -\partial_1 \varphi^* + \partial_2 \Psi^*, \quad v_0' = -\partial_2 \varphi^* - \partial_1 \Psi^* \tag{1.3}$$

Первые два уравнения (1.1) можно записать в виде

$$-\partial_1 \gamma_1 + \partial_2 \gamma_2 = 0, \quad \partial_2 \gamma_1 + \partial_1 \gamma_2 = 0$$

$$\gamma_1 = M^- \varphi^* - M^+ w_0 - \frac{1}{2\mu} q_1, \quad \gamma_2 = \cos hD \Psi^* - \frac{1}{2} q_2$$

$$M^\pm = \cos hD \pm \frac{m}{2(m-1)} hD \sin hD$$

где γ_1 и γ_2 — сопряженные гармонические функции.

Полагая теперь $\varphi^* = \varphi + \gamma_1$, $\Psi^* = \Psi + \gamma_2$ и учитывая, что для произвольной гармонической функции γ

$$\cos hD\gamma = \gamma, \quad hD \sin hD\gamma = 0$$

систему (1.1) приведем к виду

$$M^- \varphi - M^+ w_0 = \frac{q_1}{2\mu}, \quad M_1 \varphi + M_2 w_0 = \frac{p}{2\mu} \tag{1.4}$$

$$M_1 = \frac{1}{2(m-1)} [(m-2) D \sin hD + mhD^2 \cos hD],$$

$$M_2 = \frac{1}{2(m-1)} [-(3m-2) D \sin hD + mhD^2 \cos hD]$$

$$\cos hD\, \Psi = \frac{2}{2\mu} \tag{1.5}$$

Вводя в рассмотрение оператор-определитель уравнений (1.4), придем к следующим уравнениям для функций напряжений Φ_1 и Φ_2:

$$\frac{mh}{m-1} D^2 \left(1 - \frac{\sin 2hD}{2hD}\right) \Phi_1 = \frac{q_1}{2\mu} \tag{1.6}$$

$$\frac{mh}{m-1} D^2 \left(1 - \frac{\sin 2hD}{2hD}\right) \Phi_2 = \frac{p}{2\mu} \tag{1.7}$$

Искомые функции φ, u_0', v_0', w_0 определяются по формулам

$$\varphi = M_2 \Phi_1 + M^+ \Phi_2, \quad w_0 = M_1 \Phi_1 + M^- \Phi_2 \tag{1.8}$$

$$u_0' = -\partial_1 (M_2 \Phi_1 + M^+ \Phi_2) + \partial_2 \Psi,$$

$$v_0' = -\partial_2 (M_2 \Phi_1 + M^+ \Phi_2) - \partial_1 \Psi$$

Таким образом, система (1.1) приведена к трем раздельным уравнениям (1.5) — (1.7) для функций Φ_1, Φ_2 и Ψ. Положив $t_x = t_y = 0$, получим $\Phi_1 = 0$, а уравнения (1.5) и (1.10) и выражения для φ, u_0', v_0' и w_0 полностью совпадут с полученными ранее [2] для изгиба плиты только нормальной нагрузкой.

Ниже приводятся как геометрические, так и силовые краевые условия для толстой плиты. Смысл геометрических условий очевиден. Так как перемещения точек плиты взяты в виде решений уравнений теории упругости для слоя и имеют вид

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\left[\Delta^n u_0' + \frac{nm}{2(m-1)}\,\partial_1\Delta^{n-1}\vartheta_0'\right] \tag{1.9}$$

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\left[\Delta^n v_0' + \frac{nm}{2(m-1)}\,\partial_2\Delta^{n-1}\vartheta_0'\right]$$

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\left[\Delta^n w_0 + \frac{nm}{2(m-1)}\,\Delta^{n-1}\vartheta_0'\right]$$

$$\vartheta_0' = \partial_1 u_0' + \partial_2 v_0' - \Delta w_0$$

то перемещения u, v, w на контуре будут отсутствовать при равенстве нулю коэффициентов их разложений по степеням z. Для жестко заделанного края эти условия таковы:

$$u_0' = 0,\quad v_0' = 0,\quad w_0 = 0,\quad \Delta^n u_0' + \frac{nm}{2(m-1)}\,\partial_1\Delta^{n-1}\vartheta_0' = 0 \tag{1.10}$$

$$\Delta^n v_0' + \frac{nm}{2(m-1)}\,\partial_2\Delta^{n-1}\vartheta_0' = 0,\quad \Delta^n w_0 + \frac{nm}{2(m-1)}\,\Delta^{n-1}\vartheta_0' = 0$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

Силовые краевые условия получены из принципа минимума потенциальной энергии и для свободного края имеют вид

$$G_1^{(n)} n_x + H^{(n)} n_y = 0,\quad G_2^{(n)} n_y + H^{(n)} n_x = 0 \tag{1.11}$$

$$N_1^{(n)} n_x + N_2^{(n)} n_y = 0 \quad (n = 0, 1, 2\ldots)$$

Здесь $G_1^{(0)}$, $G_2^{(0)}$, $H^{(0)}$, $N_1^{(0)}$, $N_2^{(0)}$ — изгибающие и крутящий моменты и перерезывающие силы, а $G_1^{(n)}$, $G_2^{(n)}$, $H^{(n)}$, $N_1^{(n)}$, $N_2^{(n)}$ $(n = 1,2,\ldots)$ — их сверхстатические аналоги — полимоменты. Приведенные характеристики напряжений определяются по следующим формулам [3]:

$$G_1^{(n)} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_{-h}^{h} \sigma_x z^{2n+1} dz,\qquad N_1^{(n)} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_{-h}^{h} \tau_{zx} z^{2n} dz \tag{1.12}$$

Заменяя в выражениях (1.12) σ_x на σ_y или τ_{xy} и τ_{zx} на τ_{zy} соответственно, получим выражения для $G_2^{(n)}$ или $H^{(n)}$ и $N_2^{(n)}$.

Для записи краевых условий (1.10) и (1.11) через функции напряжений Φ_1, Φ_2 и Ψ следует воспользоваться формулами (1.8).

2. Построение приближенных уравнений методом однородных решений. При построении приближенных решений применим метод однородных решений. Дифференциальные операторы в уравнениях (1.5) — (1.7) представим в виде бесконечных произведений, содержащих корни трансцендентных уравнений

$$\sin 2\rho = 2\rho,\quad \cos\rho = 0 \tag{2.1}$$

Первое уравнение имеет нулевой корень и комплексные корни, которые группируются по четыре с равными модулями, а корни второго уравнения вещественные и по два имеют одинаковые модули. Учитывая свойства корней трансцендентных уравнений (2.1), левые части уравнений (1.5) — (1.7) представим в виде бесконечных произведений. Получим (D° — цилиндрическая жесткость плиты)

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{h^2\Delta}{[{}^1/_2(2n-1)\pi]^2}\right]\Psi=\frac{q_2}{2\mu} \tag{2.2}$$

$$D^\circ\Delta^2\prod_{n=1}^{\infty}H_n(\Delta)\Phi_1=q_1 \tag{2.3}$$

$$D^\circ\Delta^2\prod_{n=1}^{\infty}H_n(\Delta)\Phi_2=p \tag{2.4}$$

$$H_n(\Delta)=\left[1-\frac{h^2\Delta}{(\alpha_n+i\beta_n)^2}\right]\left[1-\frac{h^2\Delta}{(\alpha_n-i\beta_n)^2}\right],\quad D^\circ=\frac{4\mu h^3m}{3(m-1)}$$

Следует иметь в виду, что необходимо решать две отдельные задачи: задачу об изгибе плиты касательными усилиями, описываемую уравнениями (2.2) и (2.3), и задачу об изгибе плиты нормальной нагрузкой, описываемую, как показано в [2], уравнением (2.4) и однородным уравнением (2.2). Ограничиваясь определенным числом корней трансцендентных уравнений (2.1), будем получать различные системы приближенных уравнений. Так, рассматривая задачу об изгибе касательными усилиями в первом приближении, в уравнении (2.3) следует сохранить члены, соответствующие нулевому корню и первой четверке комплексно-сопряженных корней, а в уравнении (2.2) ограничиться корнями $\rho_1=\pi/2$ и $\rho_2=3\pi/2$. Тогда имеем

$$D^\circ\Delta^2H_1(\Delta)\Phi_1=q_1,\quad\left(1-\frac{4h^2\Delta}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4h^2\Delta}{9\pi^2}\right)\Psi=q_2$$

Общий порядок полученной системы Δ^6, что позволяет выполнить по шесть граничных условий. В случае заделки края плиты эти условия даются выражениями (1.10) при $n=0$ и $n=1$. Силовые краевые условия будут выполнены как для статических, так и сверхстатических характеристик первого порядка. Для свободного края эти условия определяются соотношениями (1.11) при $n=0$ и $n=1$.

Способ построения дальнейших приближений, имеющих порядок Δ^9, Δ^{12} и т. д., очевиден.

3. Осесимметричный изгиб круглой плиты касательными усилиями. В качестве примера использования изложенной теории рассмотрим задачу о круглой плите радиуса $r=a$, по обоим торцам которой приложена осесимметричная система равномерно распределенных радиальных усилий интенсивностью ${}^1/_2t_r$, создающих изгиб плиты; на верхнем торце радиальные усилия направлены от заделки к центру, а на нижнем в противоположную сторону — от центра к заделке. Боковая поверхность плиты жестко закреплена.

Из соотношений (1.8) и уравнений (1.5) и (1.6) следует, что при наличии осевой симметрии в полярных координатах (r,θ) функции Φ_1 и Ψ определяются независимо одна от другой. Неизвестные в рассматриваемой задаче целиком определяются функцией Φ_1. При $t_r = \text{const}$ и $t_\theta = 0$ из формул (1.2) находим значение функции касательной нагрузки

$$q_1 = t_r r + A_0, \quad A_0 = \text{const}$$

В первом приближении задача описывается уравнением

$$D^\circ \Delta^2 H_1 (\Delta) \Phi_1 = r t_r + A_0$$

Его общее решение можно представить как сумму частного решения бигармонической функции и двух комплексно-сопряженных функций, удовлетворяющих модифицированным уравнениям Бесселя. Получим (аддитивная постоянная опущена, так как все искомые величины выражаются лишь через производные функции Φ_1)

$$\Phi_1 = \frac{t_r r^5}{225 D^\circ} + \frac{A_0 r^4}{64 D^\circ} + C_3 r^2 + (A_1 + iB_1) I_0\left(\frac{\alpha_1 + i\beta_1}{h} r\right) +$$
$$+ (A_1 - iB_1) I_0\left(\frac{\alpha_1 - i\beta_1}{h} r\right)$$

Постоянные A_0, C_3, A_1 и B_1 определяются из условий жесткой заделки боковой поверхности плиты, которые через функцию Φ_1 выражаются по формулам (1.9) и (1.11) и записываются так:

при $r = a$

$$\frac{d}{dr}(M_2\Phi_1) = 0 \quad (u_{r0}' = 0), \quad M_1\Phi_1 = 0 \quad (w_0 = 0)$$

$$\frac{d}{dr}(M_3\Phi_1) = 0 \quad \left(u_{r0}' + \frac{m}{2(m-1)} \frac{d}{dr} \vartheta_0' = 0\right)$$

$$M_4\Phi_1 = 0 \quad \left(\Delta w_0 + \frac{m}{2(m-1)} \vartheta_0' = 0\right)$$

$$M_3 = \frac{1}{2(m-1)} [(5m-2) D^3 \sin hD - mhD^4 \cos hD]$$

$$M_4 = \frac{1}{2(m-1)} [(m+2) D^3 \sin hD - mhD^4 \cos hD]$$

Числовые расчеты проводились при следующих данных: $m = 3$, $\alpha_1 + i\beta_1 = 3.749 + i1.384$, $a / h = 5$. Уже при $a / h = 3$ можно пользоваться асимптотическими формулами для функций Бесселя, что и было сделано; при этом во всех вычислениях встречаются не коэффициенты A_1 и B_1, а их произведения на величину $\varkappa$, определяемую так:

$$\varkappa = \left(2\pi \frac{a}{h} \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}\right)^{-1/2} \exp \frac{\alpha_1 a}{h} = 1.23 \cdot 10^7$$

Для искомых постоянных найдены значения

$$A_0 = -3.33 t_r h, \quad A_1\varkappa = 3.16 \cdot 10^{-4} \frac{t_r h^5}{D^\circ}$$

$$C_3 = 1.90 \frac{t_r h^3}{D^\circ}, \quad B_1\varkappa = 1.75 \cdot 10^{-3} \frac{t_r h^5}{D^\circ}$$

По этим результатам определялся прогиб в центре плиты

$$w_0^{(1)} = -8.99 t_r h^4 / D^\circ$$

Решение этой же задачи в нулевом приближении, когда задача описывается бигармоническим уравнением для функции Φ_1 и на боковой поверхности выполняются только два условия ($u_{r_0}' = 0$ и $w_0 = 0$), дает такой результат:

$$w_0^{(0)} = -\frac{t_r h}{36 D^\circ}\left[2a^3 + \frac{3(4m-1)}{m-1} a h^2\right] \tag{3.1}$$

и при $a / h = 5$

$$w_0^{(0)} = -9.24 t_r h^4 / D^\circ \tag{3.2}$$

Сравнение результатов, полученных в первом и нулевом приближениях, показывает, что разница в прогибах невелика, но более жесткая заделка, соответствующая первому приближению, снижает прогиб в центре на величину порядка 3%. Подсчитывая прогиб аналогично нагруженной плиты по теории Кирхгофа, имеем

$$w_0 = -6{,}94 t_r h^4 / D^\circ \tag{3.3}$$

Значение w_0, определяемое формулой (3.3), получается и из формулы (3.1), если опустить член, содержащий h^2.

Различие прогибов w_0, определяемых формулами (3.2) и (3.3), объясняется следующим. В теории пластинок Кирхгофа (элементарной теории) не учитывается влияние касательных напряжений на изгиб [4]. В нулевом и последующих приближениях предложенной (полимоментной) теории изгиба пластинок прогиб определяется с учетом касательных напряжений, что приводит к большим значениям прогибов по сравнению с результатами, полученными по элементарной теории пластинок.

Формально это приводит к различным условиям на боковой поверхности для защемленной пластинки в элементарной и полимоментной теориях. В теории пластинок Кирхгофа, не учитывающей поперечной деформации сдвига, требуется отсутствие поворота касательной к срединной плоскости пластинки в точке закрепления контура. Условие равенства нулю u_{r0}', выполненное в нулевом приближении полимоментной теории, означает, что на закрепленном краю касательная в середине линейного элемента, лежащего на цилиндрической граничной поверхности, должна оставаться перпендикулярной к начальному положению срединной плоскости. В теории толстых пластинок Лява [5] как раз такое условие использовано по аналогии с задачей о защемленной балке.

Осесимметричная задача об изгибе плиты нормальной нагрузкой рассмотрена в работе [6].

Поступила 21 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955, стр. 146.
2. *Груздев Ю. А., Прокопов В. К.* К задаче изгиба толстой плиты. Прикл. механ., 1970, т. 6, вып. 5.
3. *Груздев Ю. А., Прокопов В. К.* Полимоментная теория равновесия толстых плит. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.
4. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М., «Наука», 1966, стр. 88—95.
5. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.— Л., ОНТИ, 1935, стр. 485—509.
6. *Груздев Ю. А.* Полимоментная теория равновесия плит. Тр. VII Всес. конференции по теории оболочек и пластинок. Днепропетровск, 1969. М., «Наука», 1970.