Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДВУМЕРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

С. Б. Вигдергауз

(Ленинград)

Рассматривается задача определения контуров конечного числа равнопрочных отверстий в статически нагруженной плоскости при условии, что на обводе каждого отверстия заданные нормальные напряжения принимают постоянные, но различные между собой значения. Способом, аналогичным примененному для случая нагрузки, одинаковой на всей границе области [1], задача преобразуется к регулярному интегральному уравнению, эффективно решаемому на ЭВМ, а для некоторых случаев получено замкнутое решение. Рассмотрена также плоскость с одним отверстием при произвольной нагрузке. Даны численные примеры. Доказано сформулированное в [2] утверждение о свойстве наибольшей прочности равнопрочных контуров.

Обозначим через S рассматриваемую плоскость комплексной переменной z, имеющую n отверстий. Пусть функция $\omega_0(\zeta) = C\zeta + \omega(\zeta)$ конформно отображает на S каноническую область F переменной ζ с соответствием бесконечно удаленных точек; $\omega(\zeta)$ голоморфна в F и ограничена на бесконечности. В качестве F выбрана плоскость с n круговыми отверстиями (в [2] — с n параллельными разрезами). Граничные условия первой краевой задачи в преобразованной области принимают вид

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 4\,\mathrm{Re}\,(\Phi(\xi)) \tag{1}$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = \frac{2(\xi - a_k)^2}{r_k^2\overline{\omega_0'(\xi)}}\left(\overline{\omega_0(\xi)}\,\Phi'(\xi) + \omega_0'(\xi)\,\Psi(\xi)\right); \tag{2}$$

$$\xi \in L_k, \quad k = 1, \ldots, n$$

где σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$ — компоненты напряжений в полярной системе координат с полюсом в точке a_k — центре окружности L_k радиуса r_k; σ_r и $\tau_{r\theta}$ заданы. Голоморфные в F функции $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ имеют на бесконечности асимптотику

$$\Phi(\zeta) = b + O(\zeta^{-2}), \quad b = {}^1\!/_4\,(\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty)$$

$$\Psi(\zeta) = a + O(\zeta^{-2}), \quad a = {}^1\!/_2\,(\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty) + i\tau^\infty$$

(σ_x^∞, σ_y^∞, τ^∞ — заданное однородное поле напряжений).

В [2] сформулирована без доказательства теорема: при $\sigma_r = p = \mathrm{const}$ напряжение $\sigma_\theta = 4b - p$ на равнопрочных контурах минимально по сравнению с максимальной величиной σ_θ на любых других контурах отверстий.

Доказательство вытекает из следующего утверждения.

Если отличная от постоянной действительная функция $u(\zeta)$, гармоническая в плоскости с конечным числом произвольных гладких отверстий, стремится на бесконечности к определенному пределу A, то на границе отверстий L справедливо неравенство

$$\min(u(\xi)) < A < \max(u(\xi)), \quad \xi \in L \tag{3}$$

Действительно, пусть не выполняется, скажем, левая часть (3), т. е. $u(\xi) \geqslant A$ для всех $\xi \in L$. Тогда по свойству экстремума гармонических функций $u(\zeta) \geqslant A$ во всех точках области, в частности, на окружности γ достаточно большого радиуса R, содержащей внутри себя все отверстия. По теореме о среднем, примененной к $u(\zeta)$ во внешности γ, имеем

$$A = \frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\gamma} u(\zeta)\,dS$$

В сочетании с неравенством $u(\zeta) \geqslant A$ получаем $u(\zeta) = A$ на γ, откуда следует, что $u(\zeta) = A$ вне γ, а значит, и всюду в области, что противоречит условию. Аналогично для правой части (3). Применив доказанное утверждение к функции $\operatorname{Re}\Phi(\zeta)$, из (1) получим при $\sigma_r = p$

$$\min(\sigma_\theta(\xi)) + p < 4b < \max(\sigma_\theta(\xi)) + p, \quad \xi \in L$$

откуда следует, что либо $\max|\sigma_\theta(\xi)| > \sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty - p$, либо $\Phi(\zeta)$ постоянна в F. В последнем случае контуры равнопрочны, а $\sigma_\theta(\xi) = \sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty - p$ на L.

Указанное свойство наибольшей прочности равнопрочных контуров имеет место при $n = 1$ и в случае произвольной статической нагрузки $\sigma_r = \sigma_r(\xi)$, $\tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}(\xi)$, что следует из соотношения (1), проинтегрированного по θ

$$\int\limits_0^{2\pi}(\sigma_\theta + \sigma_r)\,d\theta = 2\pi(\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty)$$

Отсюда имеем

$$\max|\sigma_\theta(\theta)| \geqslant \sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty - \langle\sigma_r\rangle$$

Равенство в каждой точке достигается только на равнопрочном контуре.

Для нахождения формы контура положим $a_1 = 0$, $r_1 = 1$ и перепишем (2) в виде

$$\overline{(\omega_0(\xi)\,\Phi(\xi) + \omega_0'(\xi)\,\Psi(\xi))} = \overline{\xi^2\omega_0'(\xi)}\,(\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta}) \tag{4}$$

Следуя [3], используем граничное условие (4) на окружности для решения прямой задачи — определения $\sigma_\theta(\xi)$ по заданной $\omega_0(\zeta)$, сводя его к вырожденному сингулярному уравнению, а затем — к бесконечной алгебраической системе

$$a_{m+2} - \sum_{k=0}^{m}(m-k+1)\,\overline{C}_{m-k+1}a_k - (m+1)\sum_{k=1}^{\infty}\overline{C}_{m+k+1}\overline{a}_k = A_m,$$
$$m = 0, 1, 2, \ldots$$

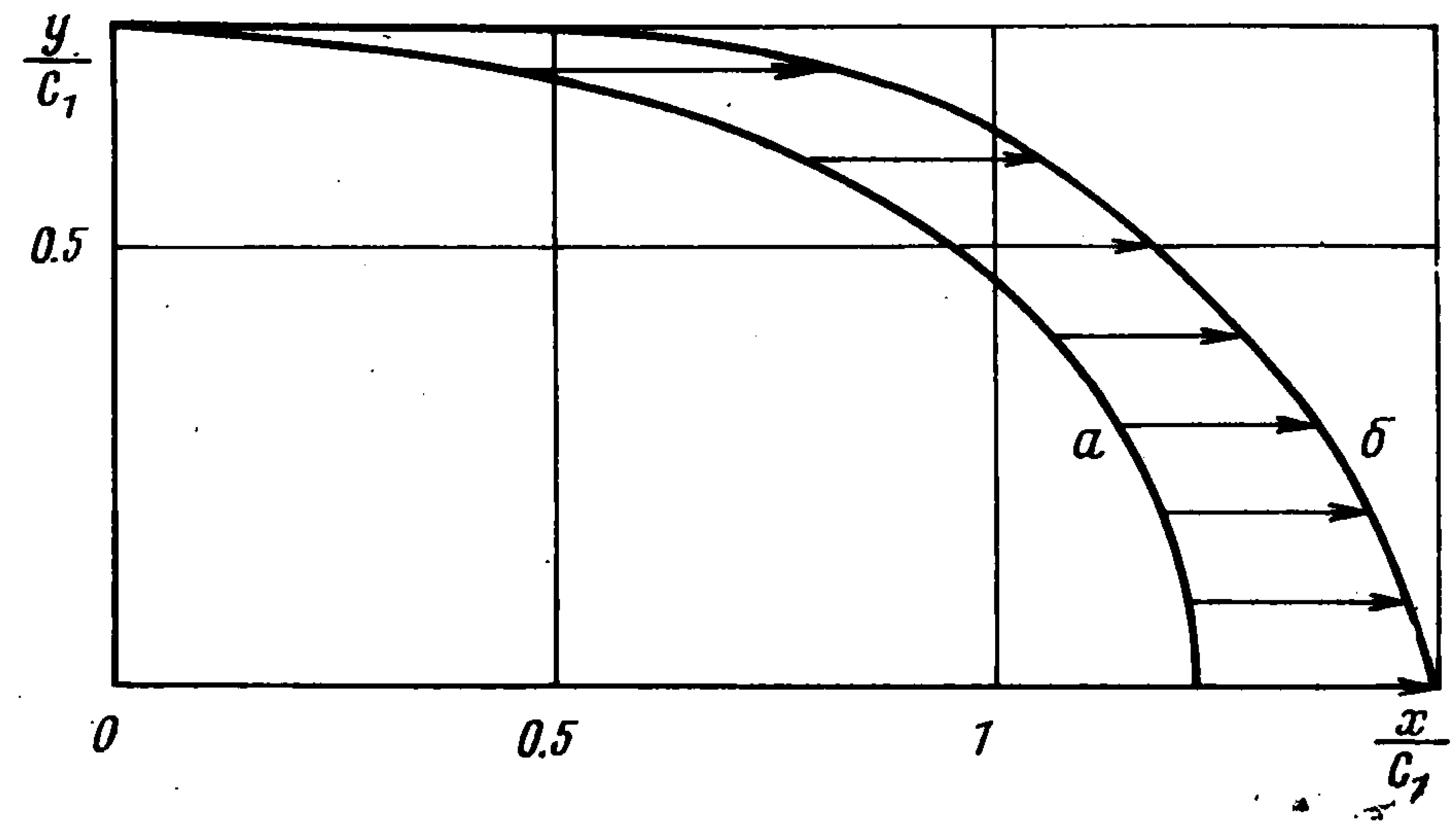
где $\{A\}$ и $\{C\}$ — известные, а $\{a\}$ — неизвестные коэффициенты разложений

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k \xi^k, \quad a_{-k} = \bar{a}_k \tag{5}$$

$$\omega_0(\zeta) = C\zeta + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \zeta^{-k} \tag{6}$$

$$-\xi^2 \omega_0'(\xi)(\sigma_r + i\tau_{r\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_k \xi^k \tag{7}$$

Если коэффициенты поменять ролями, получим, при соответствующей перенумерации, алгебраическую систему для определения $\omega(\zeta)$.



Фиг. 1

Рассмотрим пример. Пусть задана нагрузка $\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \tau^\infty = \tau_{r\theta} = 0$, $\sigma_r = 1 - \cos 2\theta$, тогда на равнопрочном контуре $\sigma_\theta = -1$. В разложении (5) $a_2 = a_{-2} = -1$. Остальные a_k равны нулю, и матрица системы становится трехдиагональной

$$4C_1 - 5C_3 = -1$$

$$(2k-1)C_{2k-1} - 4(2k+1)C_{2k+1} + (2k+5)C_{2k+3} = 0$$

Система решалась численно. Порядок выбирался равным 1000. На фиг. 1 приведена форма равнопрочного контура (*a*) и форма нагрузки (*б*).

Перейдем к многосвязной области. Рассматривая уравнение (1) в случае переменной по ξ нагрузки как задачу Дирихле относительно действительной части голоморфной в F функции $\Phi(\zeta) - 4b$, убывающей на бесконечности, заключаем, что при заданных σ_r и b напряжения $\sigma_\theta(\xi)$ должны удовлетворять известным условиям ортогональности [4]. В частности, задача разрешима, если $\sigma_\theta(\xi)$ принимает постоянные, но, вообще говоря, различные значения на каждом контуре L_k (видоизмененная задача Дирихле [4]). Соответствующие контуры также будем называть равнопрочными. Существуют они или нет — зависит от разрешимости односторонней краевой задачи (2) с условием, содержащим производные

$$\omega_0'(\xi)\Psi(\xi) + \overline{\omega_0(\xi)}\Phi'(\xi) + \frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\xi}\lambda_k(\xi)\overline{\omega_0'(\xi)} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\xi} = -\frac{r_k^2}{(\xi - a_k)^2}, \quad \xi \in L_k$$

$$\lambda_k = {}^1/_2(\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta})$$

В одном практически важном случае условие (8) упрощается, и задача доводится до конца. Именно, пусть

$$\sigma_r(\xi) = p_k, \quad \tau_{r\theta}(\xi) = 0, \quad \xi \in L_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Тогда на равнопрочных контурах должно быть $\sigma_\theta(\xi) = \sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty - p_k$, поэтому $\Phi'(\zeta) = 0$ в F и (8) принимает вид

$$H'(\xi) + \lambda_k \frac{\partial \bar\xi}{\partial \xi}\overline{\omega'(\xi)} = C\lambda_k \frac{r_k^2}{(\xi - a_k)^2} - Ca \tag{9}$$

$$H'(\zeta) = \omega'(\zeta)(\Psi(\zeta) - a), \quad \lambda_k = {}^1/_2(\sigma_\theta - p_k)$$

Положим, что все λ_k отличны от нуля; $H'(\zeta)$ и $\omega'(\zeta)$ принадлежат классу P функций, голоморфных в F и непрерывных вплоть до L. Если отбросить дополнительное условие, что они являются производными от функций из P, то (9) представляет собой частный случай задачи, изученной [5] для конечной $(n + 1)$-связной области: найти пару функций $f(\zeta)$ и $g(\zeta)$ из P по граничному условию

$$f(\xi) + v(\xi)\overline{g(\xi)} = h(\xi) \tag{10}$$

где $v(\xi)$ и $h(\xi)$, заданные на L, непрерывны по Гельдеру, $v(\xi)$ нигде не обращается в нуль. Установив сначала, что в этих условиях всякое решение (10) из P также непрерывно по Гельдеру на L, автор [5], представляя $f(\zeta)$ и $g(\zeta)$ интегралами типа Коши с действительными плотностями, сводит (10) к эквивалентной системе сингулярных интегральных уравнений нормального типа. Союзная система при этом оказывается связанной с сопряженной задачей (s — длина дуги контура)

$$f_1(\xi) + v^{-1}(\xi)\left(\frac{\partial \bar\xi}{\partial s}\right)^2 \overline{g_1(\xi)} = 0 \tag{11}$$

Разность между числами l и l_1 решений однородных задач (10) и (11), линейно-независимых над полем действительных чисел, равна $2m - 2(n - 1)$, где m — индекс функции $v(\xi)$ на L. Для плоскости с n отверстиями $(n - 1)$ следует заменить на n, если от $f(\zeta)$ и $g(\zeta)$ потребовать убывания на бесконечности.

В задаче (9) $H(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ по доказанному обладают первыми производными, граничные значения которых на L непрерывны по Гельдеру. Используя поэтому для H и ω интегральное представление И. Н. Векуа [4], получим, что задача, сопряженная с (9), имеет вид

$$p(\xi) + \lambda_k^{-1}\left(\frac{\partial \bar\xi}{\partial s}\right)^2 \overline{q(\xi)} = 0 \tag{12}$$

причем l' и l_1' — числа линейно-независимых решений однородных задач (9) и (12) — связаны соотношением $l_1' - l' = 2n$. При выводе (12) использовано тождество и условие

$$\left(\frac{\partial \bar\xi}{\partial \xi}\right) = \left(\frac{\partial \bar\xi}{\partial s}\right)^2, \quad \xi \in L; \quad \lambda_k \neq 0, \quad \operatorname{Im} \lambda_k = 0 \tag{13}$$

Когда $v(\xi) = \lambda_k$ на L_k, задачи (11) и (12) совпадают, поэтому $l_1' = l_1$, и, значит, $l' = l$, но однородная задача (10) имеет лишь нулевое решение.

Действительно, из (10) следует, что $\mathrm{Re}\,(if(\xi)\,g(\xi)) = 0$ на L, откуда $f(\zeta) = g(\zeta) = 0$ в F. Следовательно, l' также равно нулю.

Проинтегрируем (9) по ξ

$$H(\xi) + \lambda_k\overline{\omega(\xi)} - d_k = -\frac{Cr_k^2\lambda_k}{\xi - a_k} - Ca\xi \tag{14}$$

(d_k — постоянные интегрирования). При нулевой правой части задача (14) в классе голоморфных функций, вместе с первыми производными непрерывных по Гельдеру на L, имеет, как доказано, лишь нулевое решение; при этом и все $d_k = 0$.

Для фактического отыскания $\omega(\zeta)$ положим, используя метод Д. И. Шермана [6]

$$H(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{u(\xi)}{\zeta - \xi}\,d\xi, \quad d_k = \int\limits_{L_k} u(\xi)\,dS \tag{15}$$

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{L_k}\frac{\overline{u(\xi)}}{\lambda_k(\zeta - \xi)}\,d\xi, \quad dS = |d\xi|$$

Функции $H(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ будут обладать требуемыми граничными свойствами, если положить, что заданная на L функция $u(\xi)$ непрерывна, а $u'(\xi)$ интегрируема [4].

Подставляя (15) в (14) и используя формулы Сохоцкого, получим

$$u(\xi_0) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L u(\xi)\,d\ln\frac{\xi - \xi_0}{(\bar\xi - \bar\xi_0)^{\alpha_{jk}}} + \int\limits_{L_k} u(\xi)\,dS = \tag{16}$$

$$= C\left(\frac{r_k^2\lambda_k}{\xi_0 - a_k} + a\xi_0\right); \quad \alpha_{jk} = \lambda_j\bar\lambda_k^{-1}, \quad \xi \in L_j, \quad \xi \in L_k$$

Уравнение (16) регулярно по построению [6] Оно всегда разрешимо единственным образом, т. е. соответствующее однородное уравнение неразрешимо.

Действительно, обозначим решение однородного уравнения через $u_0(\xi)$. Построенные по нему с помощью формулы (15) функции $H_0(\zeta)$ и $\omega_0(\zeta)$ удовлетворяют граничному условию (10) с нулевой правой частью и, следовательно, равны нулю в F. Отсюда вытекает, что $u_0(\xi)$ и $\overline{u_0(\xi)}\,/\,\lambda_k$, а значит, и $\overline{u_0(\xi)}$ — граничные значения функций, голоморфных в n односвязных областях, ограниченных окружностями L_k, поэтому $u_0(\xi)$ на каждом контуре сводится к постоянной. Используя, наконец, равенства $d_k^\circ = 0$, находим, что эти постоянные также равны нулю.

Решение (16) методом наименьших квадратов, по соответственно усложненным формулам статьи [1], проводилось численно. На фиг. 2 сплошными линиями показана система равнопрочных контуров для следующих данных:

$$n = 4, \quad a_1 = -a_3 = 1.1, \quad a_2 = -a_4 = i$$

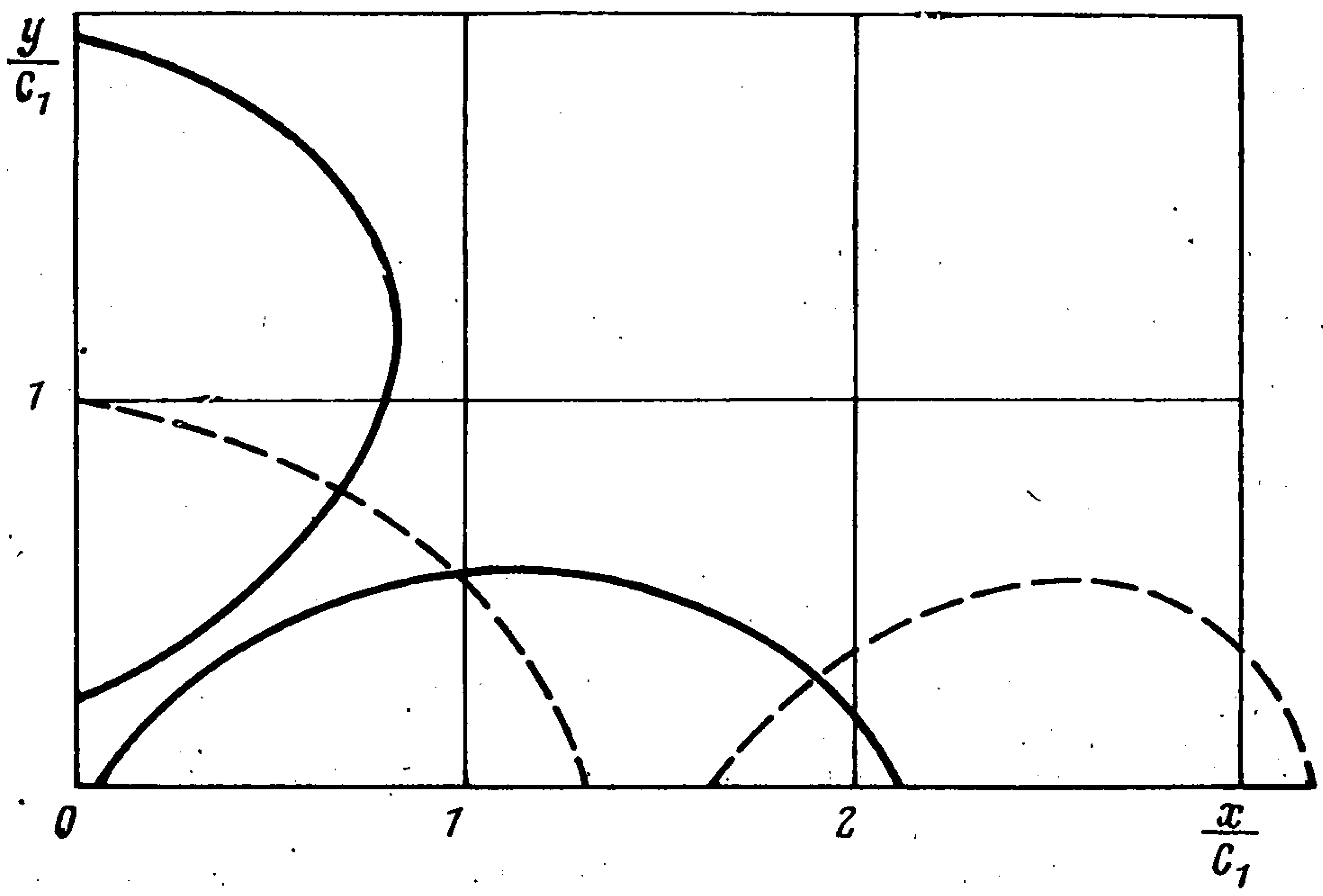
$$r_k = 0.7, \quad k = 1, \ldots, 4$$

$$\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \tau^\infty = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0$$

$$p_1 = p_3 = -1, \quad p_2 = p_4 = 1$$

Если геометрические свойства области S таковы, что оно однолистно отображается на плоскость с разрезами вдоль одной прямой, то иногда задача допускает решение в квадратурах.

Рассмотрим пример. Пусть плоскость с тремя отверстиями отображается на плоскость с разрезами вдоль действительной оси $(-\nu_2, -\nu_1)$, $(-1, 1)$ и (ν_1, ν_2), $1 < \nu_1 < \nu_2$ (симметричный случай). Обозначим средний разрез через l_0, крайние — через l_1, l_2. Примем, что от нуля отлична только компонента $\sigma_r = 1$ на l_0; $\sigma_r = -1$ на $l_{1,2}$. Тогда $\sigma_\theta = -\sigma_r$, $\lambda_0 = -1$, $\lambda_{1,2} = 1$. Функции $\omega'(\zeta)$ и $H'(\zeta)$ имеют степенные особенности порядка $^1/_2$ в концах разрезов, а на остальной плоскости ограничены [2]. На



Фиг. 2

действительной оси $\partial\bar{\xi} / \partial\xi = 1$. Краевая задача (9) отделением действительных и мнимых частей сводится к двум смешанным задачам теории голоморфных функций [4] (переменная ξ действительна)

$$\operatorname{Re} P(\xi) = 0, \quad \xi \in l_0; \quad \operatorname{Im} P(\xi) = 0, \quad |\xi| > 1$$

$$P(\zeta) = H'(\zeta) + \omega'(\zeta)$$

$$\operatorname{Re} Q(\xi) = 0, \quad \nu_1 < |\xi| < \nu_2$$

$$\operatorname{Im} Q(\xi) = 0, \quad |\xi| > \nu_2, \quad |\xi| < \nu_1$$

$$Q(\zeta) = H'(\zeta) - \omega'(\zeta)$$

решение которых в указанном классе с учетом асимптотики находится по известным формулам М. В. Келдыша — Л. И. Седова [4]

$$P(\zeta) = \frac{Ca\zeta + d_1}{\sqrt{\zeta^2 - 1}}, \quad Q(\zeta) = \frac{Ca\zeta + d_2}{\sqrt{(\zeta^2 - \nu_1^2)(\zeta^2 - \nu_2^2)}}$$

Интегрируя, получим уравнения контуров в декартовых координатах [7] (при $x > 0$ и $y > 0$).

Для центрального

$$x = \frac{C_1}{2a}\left[\left(a\nu_2 - \frac{d_2}{\nu_2}\right) F(\varphi, k) - a\nu_2 E(\varphi, k)\right]$$

$$\varphi = \arcsin\frac{\xi}{\nu_1}, \quad k = \frac{\nu_1}{\nu_2}, \quad y = \frac{C_1}{2}\sqrt{1 - \xi^2}, \quad d_1 = 0$$

Для правого бокового

$$
\begin{aligned}
&x_0 = x_0 + \frac{C_1}{2}\sqrt{\xi^2 - 1} \\
&y = \frac{C_1}{2a}\left[a\nu_2\left(\mathbf{E}(k_1) - E(\varphi, k_1)\right) - \frac{d_2}{\nu_2}\left(\mathbf{K}(k_1) - F(\varphi, k_1)\right]\right. \\
&\varphi = \arcsin\sqrt{\frac{\nu_2^2 - \xi^2}{\nu_2^2 - \nu_1^2}}, \quad k_1 = \sqrt{1 - \frac{\nu_1^2}{\nu_2^2}} \\
&x_0 = \frac{C_1}{2}\left[\sqrt{\nu_2^2 - 1} + \left(\nu_2 - \frac{d_2}{a\nu_2}\right)\mathbf{K}(k) - \nu_2\mathbf{E}(k)\right]
\end{aligned}
$$

Здесь F, E — эллиптические интегралы ($\mathbf{K}$, $\mathbf{E}$ — полные эллиптические интегралы) первого и второго рода.

В силу симметрии d_2 определяется из условия: $y = 0$ при $\xi = \nu_2$. Получим

$$d_2 = \nu_2^2\mathbf{E}(k_1) / \mathbf{K}(k_1)$$

Аналогичные выкладки для двух отверстий при постоянной нагрузке выполнены в [2]. На фиг. 2 штриховыми линиями приведена форма контуров для $\nu_1 = 1.1$, $\nu_2 = 2.1$.

Поступила 20 IX 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вигдергауз С. Б.* Интегральное уравнение обратной задачи плоской теории упругости. ПММ, 1976, т. 40, вып. 3.
2. *Черепанов Г. П.* Обратные задачи плоской теории упругости. ПММ, 1974, т. 38, вып. 6.
3. *Каландия А. И.* Математические методы двумерной упругости. М., «Наука», 1973.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.
5. *Боярский Б. В.* Об одной граничной задаче теории функций. Докл. АН СССР, 1958, т. 119, № 2.
6. *Шерман Д. И.* Об одном способе рассмотрения краевых задач теории функции и двумерных задач теории упругости. В сб.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М., «Наука», 1972.
7. *Градштейн И. С.*, *Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.