Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 532.546

БИФУРКАЦИЯ КОНЦЕНТРАЦИОННЫХ ВОЛН ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ СУСПЕНЗИЙ

Е. В. Веницианов

(Москва)

Рассмотрена одномерная нестационарная модель фильтрации двухкомпонентных малоконцентрированных суспензий в пористой среде. На основе точного решения задачи показано, что соотношение парциальных концентраций компонент может вызвать два режима перемещения фронта концентрации вдоль фильтра. В первом режиме сразу образуются две волны концентраций, в другом — сначала образуется единый фронт, который в точке бифуркации распадается на две волны. Вдоль волн выполняются соотношения, вытекающие из законов сохранения.

Большинство фильтрационных систем, встречающихся в природе и технологии (кольматация грунтов, осветление и т. д.), характеризуются взаимодействием жидкой и твердой фаз, которое приводит к изменению свойств фаз и, как следствие, изменению условий фильтрации. В качестве примера такой гетерогенной системы рассмотрим фильтрацию малоконцентрированных суспензий в однородной пористой среде, когда дисперсная фаза не влияет на изменение макроскопических свойств дисперсной среды (плотности, вязкости и т. д.). Для суспензий, состоящих из взвешенных частиц одного размера, задача об изменении концентрации взвеси за счет прилипания к поверхности пористой загрузки была рассмотрена рядом авторов [1–4]. Однако важнейшей особенностью фильтруемых суспензий является неоднородность их состава, что до настоящего времени не исследовалось.

Рассмотрим одномерную задачу о фильтрации двухкомпонентной суспензии, образующей в порах неподвижной среды неуплотняющийся осадок. В этом случае уравнение кинетики осветления для каждой из фракций в отдельности можно записать в виде

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = \begin{cases} \beta_i c_i & \text{при } \rho_i < \rho_{i0} \\ 0 & \text{при } \rho_i = \rho_{i0} \end{cases} \qquad (i = 1, 2)$$

Здесь $c_i(x, t)$ — концентрация i-й компоненты в жидкой фазе, $\rho_i(x, t)$ — концентрация в фазе осадка, β_i — кинетический коэффициент, характеризующий эффективность извлечения взвеси пористой средой.

Скорость фильтрации, рассчитанная по расходу, полагается постоянной. Предположение о несжимаемости осадка и постоянстве вандерваальсовых сил прилипания между частицами дисперсной фазы суспензии позволяет положить $\beta_i = \text{const}$. Когда осадок в данном сечении достигает концентрации ρ_{i0}, локальные гидродинамические силы отрыва становятся равными силам молекулярного притяжения частиц осадка, и прилипание прекращается. Решение для одинарных суспензий, когда кинетика описывается указанным уравнением, приведено в [5].

В случае фильтрации бинарной смеси необходим учет взаимного влияния фракций на кинетику прилипания. Условия физико-химической предфильтрационной обработки суспензий (коагулирование, флокулирование, отстаивание) обеспечивают лучшие условия осветления одной из фракций, поэтому можно положить $\rho_{10} > \rho_{20}$ и $\beta_1 > \beta_2$. Уравнения кинетики запишем в виде

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \begin{cases} \beta_1 c_1 & \text{при } \rho_1 + \rho_2 < \rho_0 \\ 0 & \text{при } \rho_1 + \rho_2 = \rho_0 \end{cases} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} = \begin{cases} \beta_2 c_2 & \text{при } \rho_2 < \rho_{20}' \text{ и } \rho_1 + \rho_2 < \rho_0 \\ 0 & \text{при } \rho_2 = \rho_{20}' \text{ или } \rho_1 + \rho_2 = \rho_0 \end{cases} \tag{2}$$

Эта запись формализует следующее свойство образования бинарного осадка: прилипание прекращается, когда достигнута предельная емкость фильтра ρ_0, вообще говоря, не равная ρ_{10}. Прилипание второй фракции прекращается и в случае, когда концентрация осадка второй фракции достигает парциальной емкости $\rho_{20}' < \rho_0$.

Систему замыкают уравнения материального баланса компонент

$$w \frac{\partial c_i}{\partial x} + \frac{\partial \rho_i}{\partial t} = 0 \quad (i = 1, 2) \tag{3}$$

где w — скорость фильтрации. (В уравнении (3) пренебрегаем членом $\varepsilon_n\ \partial c_i / \partial t$, который при $\rho_{i0} \gg c_{i0}$ значительно меньше $\partial \rho_i / \partial t$, где ε_n — пористость фильтрующего слоя.) Краевая задача для фронтальной динамики в первоначально чистом фильтре определяется следующими условиями:

$$c_i(0, t) = c_{i0}, \quad \rho_i(x, 0) = 0 \tag{4}$$

где $c_{i0} = \text{const}$ — парциальные концентрации во входном сечении $x = 0$

Введем безразмерные переменные

$$X = \frac{\beta_2 x}{w}, \quad T = \frac{\beta_2 t}{\Gamma}, \quad \Gamma = \frac{\rho_0}{c_{10} + c_{20}}, \quad u_i = \frac{c_i}{c_{10} + c_{20}},$$

$$v_i = \frac{\rho_i}{\rho_0}, \quad \varepsilon = \frac{c_{20}}{c_{10} + c_{20}}, \quad \nu = \frac{\rho_{20}'}{\rho_0}, \quad b = \frac{\beta_1}{\beta_2}$$

причем из сделанных выше предположений следует: $\nu < 1$, $b > 1$.

Интегрируя уравнения (1) — (4) вдоль характеристики $T = 0$, получим

$$u_1(X, 0) = (1 - \varepsilon) \exp(-bX), \quad u_2(X, 0) = \varepsilon \exp(-X) \tag{5}$$

Очевидно, что (5) будет решением системы и для $0 \leqslant T \leqslant T_{01}$, где T_{01} — момент времени, когда произойдет предельное насыщение (отсечка) сечения $X = 0$ по первой или второй компоненте. Подставив (5) в (1) и (2), получим

$$v_1(X, T) = b(1 - \varepsilon) T \exp(-bX), \quad v_2(X, T) = \varepsilon T \exp(-X) \tag{6}$$

Тогда условие отсечки входного сечения имеет вид

$$v_2(0, T) = \nu \quad \text{или} \quad v_1(0, T) + v_2(0, T) = 1$$

Следовательно, возможны два варианта отсечки входного сечения $X = 0$:

1°. Отсечка по второй компоненте

$$v_2(0,\ T_{01}) = \nu \tag{7}$$

2°. Отсечка по сумме компонент

$$v_1(0,\ T_{02}) + v_2(0,\ T_{02}) = 1 \tag{8}$$

Рассмотрим оба варианта.

1°. Подставив (7) в (6), найдем: $T_{01} = \nu/\varepsilon$. Для момента T_{01} суммарная концентрация осадка в сечении $X = 0$ равна

$$v_1(0, T_{01}) + v_2(0, T_{01}) = \nu + \nu b\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$$

Следовательно, критерий реализации вариантов таков:

$$\begin{aligned} &\nu + \nu b\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \leqslant 1 \quad \text{(вариант 1°)} \\ &\nu + \nu b\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} > 1 \quad \text{(вариант 2°)} \end{aligned} \tag{9}$$

Если вернуться к размерным величинам, то критерий (9) для варианта 1° можно представить в виде

$$\frac{c_{10}}{c_{20}} \leqslant \frac{\beta_2}{\beta_1}\left(\frac{\rho_0}{\rho_{20}'} - 1\right)$$

Кинетические коэффициенты β_1 и β_2, а также парциальная ρ_{20}' и общая ρ_0 грязеемкости — физические постоянные, определяемые свойствами суспензии и пористой среды. Поэтому выполнение условия (9) для варианта 1° зависит от парциальных концентраций c_{10} и c_{20}. Если указанное условие выполнено, то решение системы (1) — (4) имеет вид

$$u_2 = \varepsilon \exp(-X), \quad v_2 = \varepsilon T \exp(-X) \quad \text{для} \quad 0 \leqslant T \leqslant \frac{\nu}{\varepsilon}$$

$$u_2 = \varepsilon \exp\left(-X - 1 + \frac{\varepsilon}{\nu}T\right), \quad v_2 = \nu \exp\left(-X - 1 + \frac{\varepsilon}{\nu}T\right)$$

$$\text{для} \ \frac{\nu}{\varepsilon} \leqslant T \leqslant \frac{\nu}{\varepsilon}(X+1)$$

$$u_2 = \varepsilon, \quad v_2 = \nu \quad \text{для} \quad \frac{\nu}{\varepsilon}(X+1) \leqslant T < \infty$$

Первая компонента перемещается по частично отработанному слою, поэтому отсечка каждого сечения по сумме компонент происходит после того, как данное сечение отработано по второй компоненте. Решение для u_1 и v_1 при этом имеет вид

$$u_1 = (1-\varepsilon)\exp(-bX), \quad v_1 = b(1-\varepsilon)T\exp(-bX)$$

$$\text{для} \quad 0 \leqslant T \leqslant \frac{1}{b}\frac{1-\nu}{1-\varepsilon}$$

$$u_1 = (1-\varepsilon)\exp[-bX - 1 + bT(1-\varepsilon)(1-\nu)^{-1}],$$

$$v_1 = (1-\nu)(1-\varepsilon)^{-1}u_1 \quad \text{для} \quad \frac{1}{b}\frac{1-\nu}{1-\varepsilon} \leqslant T \leqslant \frac{1-\nu}{1-\varepsilon}\left(X + \frac{1}{b}\right)$$

$$u_1 = 1-\varepsilon, \quad v_1 = 1-\nu \quad \text{для} \quad \frac{1-\nu}{1-\varepsilon}\left(X + \frac{1}{b}\right) \leqslant T < \infty$$

Таким образом, в случае 1° образуются две волны концентраций, начиная с входного сечения. Для формирования волн требуется время: для первой фракции $b^{-1}(1-\nu)/(1-\varepsilon)$, для второй ν/ε. Волна второй компоненты перемещается по слою со скоростью $\sigma_2 = \varepsilon/\nu$, причем синфазно с волной в жидкой фазе перемещается волна в фазе осадка. Для этих волн выполняется условие

$$\frac{u_2}{\varepsilon}=\frac{v_2}{\nu}\quad\left(T>\frac{\nu}{\varepsilon}\right) \tag{10}$$

Волна первой компоненты перемещается вдоль фильтра со скоростью $\sigma_1 = (1-\varepsilon)/(1-\nu) < \sigma_2$. Синфазно с ней перемещается волна осадка вдоль этих волн выполняется условие

$$\frac{u_1}{1-\varepsilon}=\frac{v_1}{1-\nu}\quad\left(T>\frac{1}{b}\frac{1-\nu}{1-\varepsilon}\right) \tag{11}$$

2°. Когда отсечка в сечении $X = 0$ выполняется по сумме компонент, в момент T_{02} выполняется условие

$$\frac{c_{10}}{c_{20}}>\frac{\beta_2}{\beta_1}\left(\frac{\rho_0}{\rho_{20}'}-1\right)$$

Подставив (6) в (8), найдем $T_{02} = [b(1-\varepsilon)+\varepsilon]^{-1}$. При этом $v_2(0, T_{02}) = \varepsilon[b(1-\varepsilon)+\varepsilon]^{-1} < \nu$, что находится в соответствии с условием (9) для варианта 2°.

Для нахождения решения системы (1) — (3) при $T > T_{02}$ введем функцию $X = X_1^*(T)$, указывающую координату сечения отсечки в момент T. Условия в сечении отсечки такие:

$$u_1(X_1^*, T) = 1-\varepsilon,\quad u_2(X_1^*, T)=\varepsilon \tag{12}$$

$$v_1(X_1^*, T)+v_2(X_1^*, T)=1 \tag{13}$$

Решения будем искать в виде (начальные условия для f_i вытекают из соотношений (5))

$$u_1(1-\varepsilon)f_1(T)\exp(-bX),\quad u_2=\varepsilon f_2(T)\exp(-X)$$
$$(f_1(0)=f_2(0)=1)$$

Из условий (12) находим

$$f_1(T)=\exp[bX_1^*(T)],\quad f_2(T)=\exp[X_1^*(T)]$$

Из уравнения баланса (3) получаем

$$v_1(X,T)=T_{02}b(1-\varepsilon)\exp(-bX)+ \tag{14}$$
$$+b(1-\varepsilon)\exp(-bX)\int\limits_{T_{02}}^{T}\exp[bX_1^*(\tau)]\,d\tau$$

$$v_2(X,T)=T_{02}\varepsilon\exp(-X)+\varepsilon\exp(-X)\int\limits_{T_{02}}^{T}\exp[X_1^*(\tau)]\,d\tau \tag{15}$$

Условие в точке отсечки (13) позволяет найти интегральное уравнение для $X_1^*(T)$, если (13) переписать в эквивалентной форме: для сечения X

и времени отсечки $T_1^*(X)$ (T_1^* — обратная X_1^* функция)

$$(16)\qquad 1 = T_{02}[b(1-\varepsilon)\exp(-bX)+\varepsilon\exp(-X)] + \\ + b(1-\varepsilon)\exp(-bX)\int\limits_{T_{02}}^{T_1^*(X)}\exp[bX_1^*(\tau)]\,d\tau + \\ + \varepsilon\exp(-X)\int\limits_{T_{02}}^{T_1^*(X)}\exp[X_1^*(\tau)]\,d\tau$$

С помощью замены $\xi = X_1^*(\tau)$ уравнение (16) можно представить в виде

$$(17)\qquad 1 = \frac{T_1^*(X)}{T_{02}} - b^2(1-\varepsilon)\exp(-bX)\int\limits_0^X \exp(b\xi)\,T_1^*(\xi)\,d\xi - \\ - \varepsilon\exp(-X)\int\limits_0 \exp\xi T_1^*(\xi)\,d\xi$$

и после двукратного дифференцирования получим уравнение

$$\frac{d^2T_1^*}{dX^2} + bT_{02}\frac{dT_1^*}{dX} - bT_{02} = 0$$

$$\left(T_1^*(0) = T_{02},\quad \frac{dT_1^*(0)}{dX} = T_{02}^2[b^2(1-\varepsilon)+\varepsilon]\right)$$

которое имеет решение

$$(18)\qquad T_1^*(X) = T_{02} + X + (bT_{02})^{-1}T_{02}^2\{[b^2(1-\varepsilon)+\varepsilon]-1\} \times \\ \times [1-\exp(-XbT_{02})]$$

удовлетворяющее условиям, приведенным выше в скобках (второе условие следует из (17) после дифференцирования по X). Найдя из (18) обратную функцию X_1^* (T) и подставив в (14) и (15), можно найти решения для u_i и v_i.

Особенность рассматриваемого здесь случая 2° заключается в возможности бифуркации решения. Условие бифуркации состоит в том, что в некотором сечении X_0 в момент T_0 наряду с (13) выполняется условие отсечки по второй фракции: $v_2(X_0, T_0) = \nu$ или с учетом (15)

$$\nu = T_{02}\varepsilon\exp(-X_0) + \varepsilon\exp(-X_0)\int\limits_{T_{02}}^{T_0}\exp[X_1^*(\tau)]\,d\tau$$

Подставив (18), получим

$$(19)\qquad X_0 = (bT_{02})^{-1}\ln\varkappa,\quad \varkappa = (1-\varepsilon)\,\varepsilon\,(b-1)(\varepsilon-\nu)^{-1}[b(1- \\ -\varepsilon)+\varepsilon]^{-1}$$

Необходимое условие бифуркации, с очевидностью следующее из (19), состоит в том, чтобы выражение под знаком логарифма удовлетворяло условию

$$(20)\qquad \varkappa > 1$$

В силу того, что $b > 1 > 0$, из (20) следует

$$(21)\qquad \varepsilon - \nu > 0$$

и в этом случае условие (20) эквивалентно условию (9) для варианта 2°. Поскольку последнее условие должно быть выполнено вместе с условием (21), существует интервал парциальной концентрации второй фракции, когда реализуется режим с бифуркацией

$$\nu < \varepsilon < \frac{\nu b}{1+\nu(b-1)} \tag{22}$$

Величина T_0 вычисляется подстановкой X_0 в решение (18)

$$T_0 = X_0 + \nu b^{-1}(b-1) + b^{-1}$$

После точки бифуркации (X_0, T_0) решение $X_1{}^*(T)$ раздваивается, и функции u_i и v_i примут вид

$$\begin{aligned} v_1(X,T) &= T_{02} b(1-\varepsilon)\exp(-bX) + \\ &+ b(1-\varepsilon)\exp(-bX)\int_{T_{02}}^{T_0} \exp[bX_1{}^*(\tau)]\,d\tau + \\ &+ b(1-\varepsilon)\exp(-bX)\int_{T_0}^{T} \exp[bX_{21}{}^*(\tau)]\,d\tau \\ v_2(X,T) &= T_{02}\varepsilon\exp(-X) + \varepsilon\exp(-X)\int_{T_{02}}^{T_0} \exp[X_1{}^*(\tau)]\,d\tau + \\ &+ \varepsilon\exp(-X)\int_{T_0}^{T} \exp[X_{22}{}^*(\tau)]\,d\tau \\ u_1(X,T) &= (1-\varepsilon)\exp[-bX + bX_{21}{}^*(T)] \\ u_2(X,T) &= \varepsilon\exp[-X + X_{22}{}^*(T)] \end{aligned} \tag{23}$$

аналогичный формулам (14) и (15). В формулах (23) введены две функции $X_{21}{}^*(T)$ и $X_{22}{}^*(T)$, указывающие координату отсечки в момент T соответственно по первой и второй компоненте.

Уравнения для $X_{21}{}^*$ и $X_{22}{}^*$ получим из условий отсечки

$$v_1[X, T_{21}{}^*(X)] = 1-\nu, \quad v_2[X, T_{22}{}^*(X)] = \nu \tag{24}$$

где $T_{21}{}^*$ и $T_{22}{}^*$ — обратные $X_{21}{}^*$ и $X_{22}{}^*$ функции. Подставив первые два выражения (23) в соответствующие условия (24), получим интегральные уравнения, аналогичные (17), решения которых имеют вид

$$T_{21}{}^*(x) = T_0 + \frac{1-\nu}{1-\varepsilon}(x-x_0), \quad T_{22}{}^*(x) = T_0 + \frac{\nu}{\varepsilon}(x+x_0)$$

Таким образом, в случае 2°, когда выполнено условие (22), в точке бифуркации характеристическая функция $T_1{}^*(X)$ переходит в две прямые с углами наклона σ_1 и σ_2 (см. случай 1°).

Можно теперь нарисовать картину изменения концентраций в до- и послекритических сечениях, т. е. для $X < X_0$ и $X > X_0$.

При $X < X_0$ концентрации u_1 и v_1 описываются выражениями

$$u_1 = (1-\varepsilon)\exp[-bX + bX_1{}^*(T)]$$
$$u_2 = \varepsilon\exp[-X + X_1{}^*(T)]$$

Следовательно, ход концентрационных кривых подобен: вдоль единой волны удовлетворяется условие

$$b^{-1} \ln u_1 / (1 - \varepsilon) = \ln u_2 / \varepsilon$$

и в момент $T_1^* (X)$ происходит отсечка сечения, а концентрации одновременно достигают исходных величин $1 - \varepsilon$ и ε.

При $X > X_0$ для $T_{02} \leqslant T \leqslant T_0$ ход концентрационных кривых происходит так же, как и в докритических сечениях, но в момент T_0 формируются две волны, которые перемещаются со скоростями σ_1 и σ_2. Структура этих волн определяется уравнениями $u_1 = (1 - \varepsilon) \exp [-bX + bX_{21}^* (T)]$ для $T_0 \leqslant T \leqslant T_{21}^* (X)$, $u_2 = \varepsilon \exp [-X + X_{22}^* (T)]$ для $T_0 \leqslant T \leqslant T_{22}^* (X)$.

Заметим, что вдоль фронтов концентраций выполняются условия (10) и (11). И в целом после точки бифуркации картина изменения концентраций становится аналогичной, рассмотренной в случае 1°. В частности, требуется время T_0 для установления волновых соотношений (10) и (11).

Автор благодарит А. Г. Куликовского за полезное обсуждение.

Поступила 11 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Орнатский Н. Б., Сергеев Е. М., Шехтман Ю. М.* Исследование процесса кольматации песков. Изд-во МГУ, 1955.
2. *Минц Д. М.* Кинетика фильтрации малоконцентрифованных водных суспензий на водоочистных фильтрах. Докл. АН СССР, 1951, т. 78, № 2.
3. *Шехтман Ю. М.* Фильтрация малоконцентрированных суспензий. М., Изд-во АН СССР, 1961.
4. *Ives K. J.*, Simulation of filtration on electronic digital computer. J. Amer. Water Works Assoc., 1960, vol. 52, No. 7, p. 933.
5. *Сенявин М. М., Рубинштейн Р. Н., Веницианов Е. В. и др.* Основы расчета и оптимизации ионообменных процессов. М., «Наука», 1972.