

О НЕЛОКАЛЬНОМ ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА

А. Н. Баутин

(Горький)

Рассматриваются несколько прикладных задач, в которых удается получить полную картину поведения всех бифуркационных поверхностей, не прибегая к методу малого параметра, но также и в малой окрестности консервативной системы. Во всех рассмотренных задачах оказалось, что все бифуркационные поверхности, связанные с поведением предельных циклов и сепаратрис, и все их линии пересечения (а стало быть, и все возможные структуры) существуют в сколь угодно малой окрестности множества консервативных систем, и их взаимное расположение не связано с близостью к консервативной системе. По-видимому, реализация именно такой ситуации и позволяет судить о поведении систем, не близких к консервативным, опираясь на результаты, полученные методом малого параметра (методом, применимым, по существу, лишь к неконтролируемо малой окрестности множества консервативных систем).

Возможность применения качественных результатов, полученных методом малого параметра для автономных систем дифференциальных уравнений второго порядка, к конкретным значениям параметров, часто находящая в прикладных задачах экспериментальное подтверждение, рассматривается обычно как правдоподобное утверждение [1, 2], так как при этом используются ряды, радиус сходимости которых неизвестен. Представление, что полученным результатам может быть придан реальный смысл лишь при условии сходимости упомянутых рядов, привело к некоторым оценкам радиуса сходимости [3, 4]. Действительные причины возможности нелокального применения результатов, полученных методом малого параметра, имеют, однако, совсем другую природу, и метод малого параметра играет здесь роль индикатора, обнаруживающего то, что существует независимо от сходимости рядов.

1. Рассмотрим систему, изучавшуюся в [5, 6] при неотрицательных значениях α, β, λ

$$(1.1) \quad \dot{\varphi} = y \equiv P, \quad y' = \beta - \sin \varphi - \lambda y - 2\alpha y / (1 + y^2) \equiv Q$$

На плоскости φy будем рассматривать полосу $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ с отождествленными краями (фазовое пространство — цилиндр) и будем пока предполагать $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$.

1.1. Состояния равновесия. Седловая величина. Состояния равновесия на оси $y = 0$: седло при $\varphi = \pi - \arcsin \beta$ и фокус (узел) при $\varphi = \arcsin \beta$ (центр, если $\lambda = \alpha = 0$). Фокус устойчив при $\lambda > -2\alpha$ и неустойчив при $\lambda < -2\alpha$. При $\lambda = -2\alpha$ фокус сложный и первая ляпуновская величина имеет значение $\alpha_s = 3/2\pi\alpha (1 - \beta^2)^{1/4} > 0$. К фокусу может стягиваться или от него рождаться лишь неустойчивый предельный цикл.

Седловая величина ($\Delta \equiv P_\varphi' + Q_y'$, вычисленная в седле) имеет значение $\Delta = -(\lambda + 2\alpha)$. Отсюда следует, что петля сепаратрисы, если она

возникнет, и простой фокус имеют одинаковую устойчивость и должны разделяться циклом противоположной устойчивости.

1.2. *Области отсутствия периодических решений.* 1°. По критерию Бендиксона—Дюлака при $\lambda < -2\alpha$ нет циклов и петель сепаратрис, охватывающих состояния равновесия, и нет двойных циклов, охватывающих фазовый цилиндр, так как не меняет знак выражение

$$P_{\varphi}' + Q_y' = -\lambda - 2\alpha (1 - y^2) / (1 + y^2)^2$$

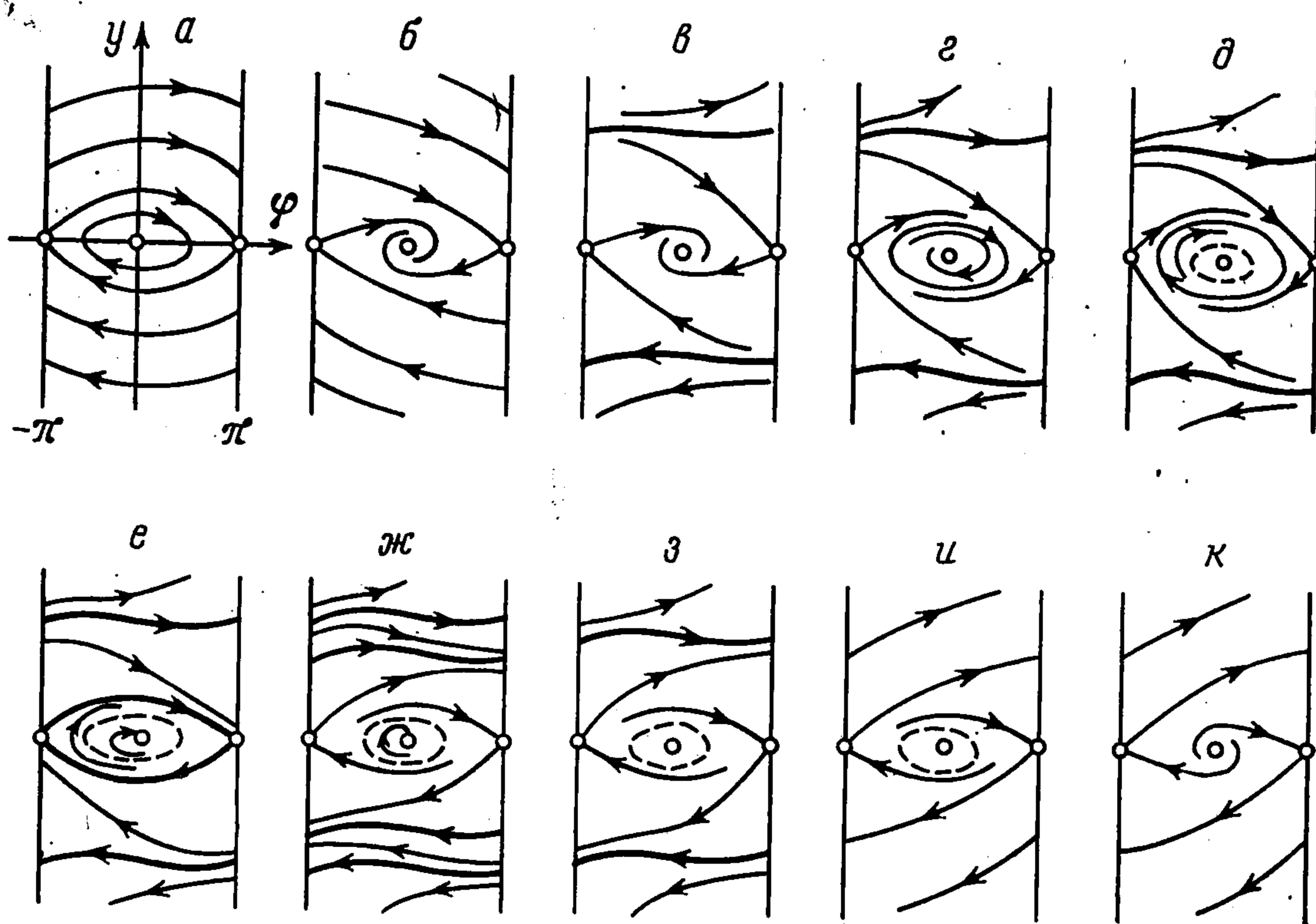
2°. Система (1.1) эквивалентна уравнению

$$y dy + \sin \varphi d\varphi = \beta - \lambda y - 2\alpha y / (1 + y^2)$$

Поэтому для замкнутого контура, охватывающего цилиндр и составленного из траекторий системы (1.1), должно быть

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[\beta - \lambda y - \frac{2\alpha y}{(1 + y^2)} \right] d\varphi = 0$$

Но если $\beta = 0$ и $\lambda < -2\alpha$, то подынтегральная функция знакопостоянна и нет замкнутых контуров, охватывающих цилиндр.



Фиг. 1

1.3. *Структуры при $\beta = 0$.* Система (1.1) инвариантна по отношению к замене φ на $-\varphi$, y на $-y$. Фазовое пространство симметрично относительно начала координат. Если $\lambda = \alpha = 0$, то система консервативна (фиг. 1, а). При возрастании α поле направлений поворачивается по часовой стрелке. Замкнутые кривые консервативной системы будут кривыми без контакта. Циклов нет: α -сепаратрисы идут в устойчивый фокус, ω -сепаратрисы идут из бесконечности (фиг. 1, б). Такая структура останется и для всех $\lambda > 0$, так как при возрастании λ поле поворачивается опять по часовой стрелке. При убывании λ от нуля (при $\alpha \neq 0$) из бесконечности появляется неустойчивый предельный цикл (в уравнении появляется член $-\lambda y$, определяющий при больших y знак $dy / d\varphi$; фиг. 1, в).

При $\lambda \leq -2\alpha$ фокус неустойчив и циклов нет (см. п. 1.2): ω -сепаратрисы скручиваются с фокуса, а α -сепаратрисы идут в бесконечность (фиг. 1, *к*). Так как при $\lambda = 0$, наоборот, α -сепаратрисы идут в фокус, а ω -сепаратрисы — из бесконечности, то при изменении λ от 0 до -2α должны возникнуть петли сепаратрис. Ввиду симметрии петли вокруг верхнего и нижнего полуцилиндров возникают одновременно. Их можно рассматривать так же, как один контур, охватывающий состояние равновесия.

Появившиеся из бесконечности циклы влипнуть в петли сепаратрис не могут, так как это запрещает знак седловой величины (в петлю сепаратрисы может превратиться только устойчивый цикл).

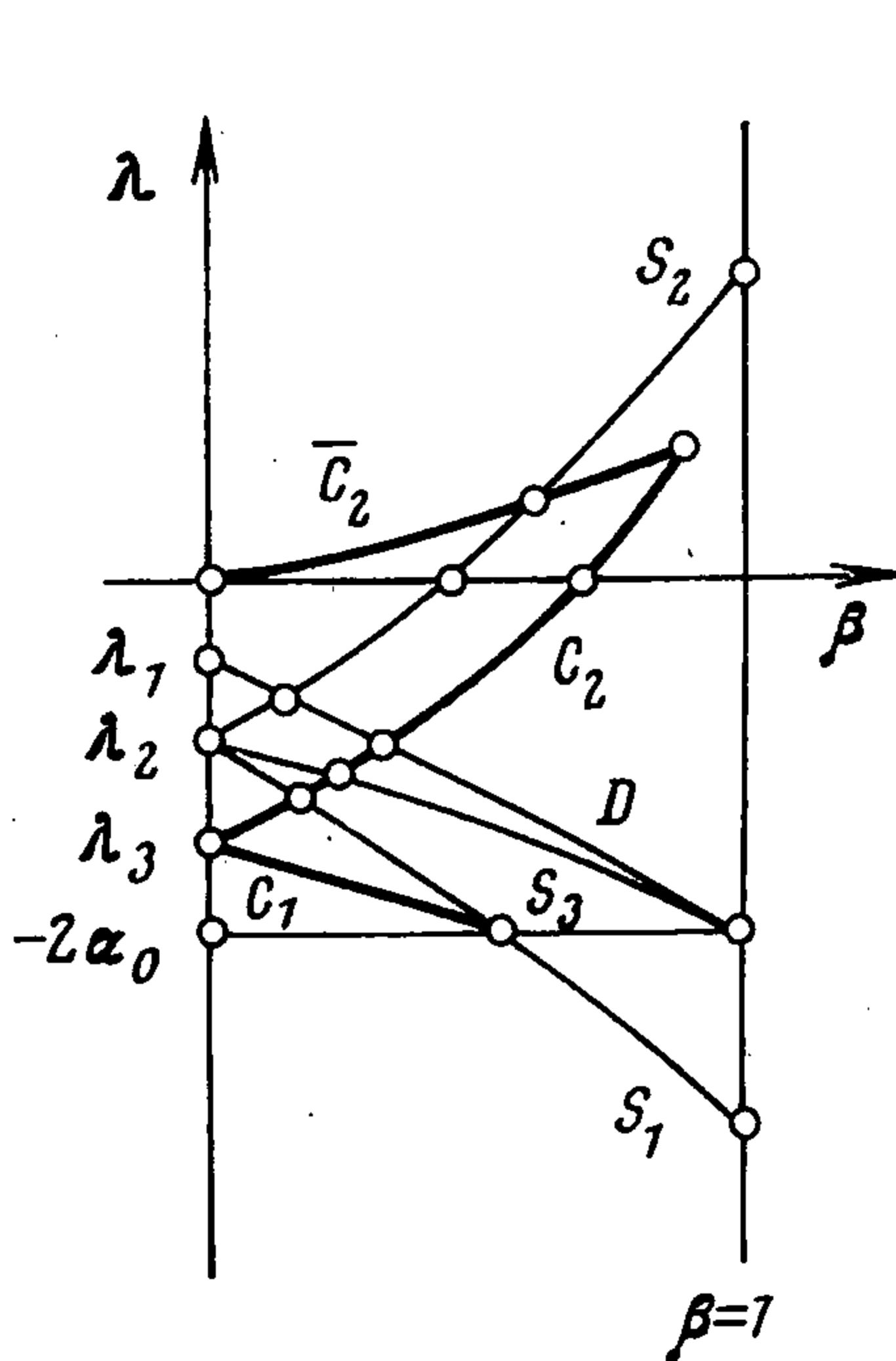
Образующийся из седел и сепаратрис контур, охватывающий фокус, и сам фокус устойчивы, поэтому они должны быть разделены неустойчивым предельным циклом (см. п. 1.1). Из этих фактов следует, что при убывании λ от нуля на интервале $-2\alpha < \lambda < 0$ возникает вокруг состояния равновесия из уплотнения траекторий двойной предельный цикл, который монотонным поворотом поля разделяется на два: наружный устойчивый и внутренний неустойчивый (фиг. 1, *д*). Далее, устойчивый цикл превращается в контур из сепаратрис и седел (фиг. 1, *е*). При разрушении контура от него на верхнем и на нижнем полуцилиндрах рождаются устойчивые циклы. Таким образом, на каждом полуцилиндре станет уже по два цикла (фиг. 1, *ж*). При дальнейшем убывании λ циклы на каждом полуцилиндре монотонно сближаются, сливаются (фиг. 1, *з*) и исчезают (фиг. 1, *и*). При $\lambda = -2\alpha$ неустойчивый цикл стягивается к фокусу и возникает структура фиг. 1, *к* без предельных циклов. Описанные бифуркации имеют место при любых $\alpha > 0$ и осуществляются при убывании λ только в указанном порядке, поэтому на плоскости параметров $\alpha\lambda$ существуют бифуркационные кривые, расположенные между прямыми $\lambda = 0$ и $\lambda = -2\alpha$ и пересекающиеся только в начале координат.

1.4. Структуры при $\beta \neq 0$. Зафиксируем α и рассмотрим плоскость $\beta\lambda$. На прямой $\beta = 0$ для симметричного фазового пространства при убывании λ осуществляются бифуркации: при $\lambda = 0$ возникает неустойчивый предельный цикл из бесконечности, при $\lambda = \lambda_1 < 0$ — двойной предельный цикл вокруг фокуса из сгущения траекторий, при $\lambda = \lambda_2 < \lambda_1$ — сепаратрисный контур, при $\lambda = \lambda_3 < \lambda_2$ — двойной предельный цикл от слияния циклов, охватывающих цилиндр, и при $\lambda = -2\alpha < \lambda_3$ происходит стягивание предельного цикла к фокусу.

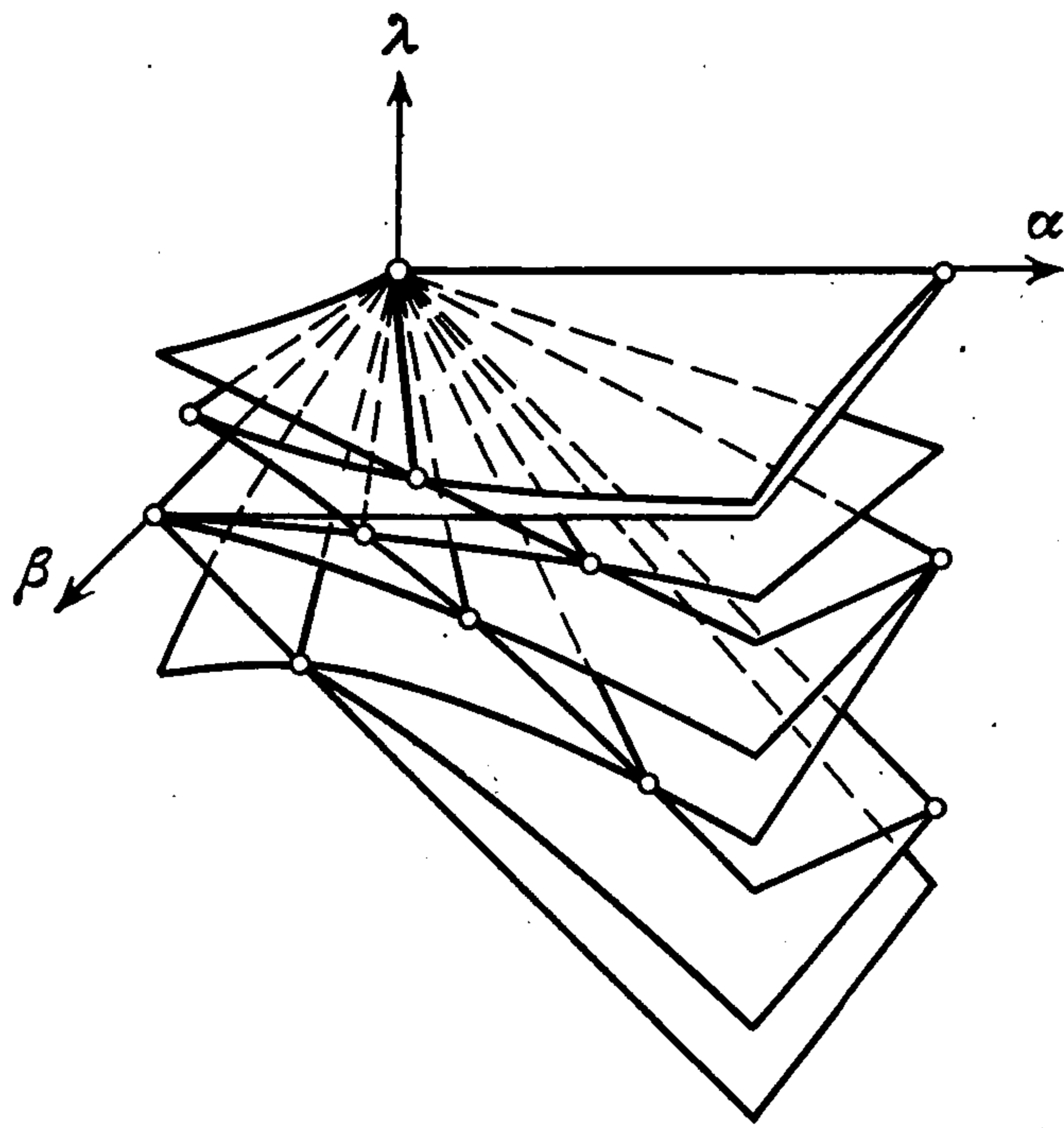
При $\beta > 0$ симметрия фазового пространства нарушается и поэтому бифуркационные кривые, соответствующие петлям сепаратрис вокруг нижнего (кривая S_1) и вокруг верхнего (кривая S_2) полуцилиндров, а также вокруг фокуса (кривая S_3), не будут совпадать на плоскости $\beta\lambda$. Они все начинаются в точке $(0, \lambda_2)$ и заканчиваются на прямой $\beta = 1$ (при $\beta > 1$ нет состояний равновесия). Кривая S_2 будет иметь положительный наклон, так как только при одновременном возрастании или убывании параметров β и λ для петли на верхнем полуцилиндре сохраняется немонотонный поворот поля, не разрушающий петлю. По аналогичным причинам кривая S_1 будет иметь отрицательный наклон. Кривая S_3 рас-

положена между S_1 и S_2 и при $\beta \neq 0$ не может с ними пересекаться. Она заканчивается на прямой $\beta = 1$ в точке $\lambda = -2\alpha$, соответствующей вырожденному седло-узлу без узловой области (вырожденный седло-узел нужно рассматривать как вырождение сепаратрисы седла, образующей петлю, при стягивании петли в точку).

Бифуркационная кривая, соответствующая двойному циклу вокруг фокуса (кривая D), начинается в точке $(0, \lambda_1)$ и заканчивается в точке



Фиг. 2



Фиг. 3

$(1, -2\alpha)$, где седловая величина обращается в нуль. Кривые D и S_3 в других точках пересекаться не могут.

Бифуркационные кривые, соответствующие двойным циклам вокруг нижнего полуцилиндра (кривая C_1) и вокруг верхнего (кривая C_2), обе начинаются в точке $(0, \lambda_3)$. Кривая C_1 расположена ниже кривой S_1 , имеет отрицательный наклон и заканчивается в точке пересечения прямой $\lambda = -2\alpha$, на которой седловая величина Δ обращается в нуль, с кривой S_1 . Кривая C_1 не может пересечь S_1 в области, где $\Delta < 0$, так как тогда должна была бы возникнуть устойчивая петля, что невозможно при наличии двойного цикла на нижнем полуцилиндре устойчивого сверху, и она не может покинуть область $\Delta < 0$, так как при $\Delta > 0$ не может быть двойных циклов (см. п. 1.2). Кривая C_2 расположена ниже кривой S_2 и также имеет положительный наклон. Она не может пересекать S_2 , так как это запрещает знак седловой величины (двойной цикл на верхнем полуцилиндре, соответствующий точкам кривой C_2 , устойчив сверху). Кривая C_2 пересекает ось β в точке $\beta = \beta_0 < \alpha$ и переходит в область $\lambda > 0$, где она ограничена сверху прямой $\lambda = \alpha / 4$ (приложение 1).

При $\alpha > 0$ из точки $(0, 0)$ в область $\beta > 0, \lambda > 0$ выходит кривая \bar{C}_2 , соответствующая двойному предельному циклу на верхнем полуцилиндре, устойчивому сверху. Этот цикл при движении от точки $\beta = \lambda = 0$ возникает из бесконечности (приложение 2).

Кривая \bar{C}_2 так же, как и кривая C_2 , ограничена сверху прямой $\lambda = \alpha / 4$. Они обе имеют положительный наклон и при возрастании β смыкаются в угловой точке, соответствующей возникновению тройного предельного цикла. Кривые C_2 и \bar{C}_2 должны сомкнуться, так как они ограничены сверху и справа (приложение 3).

На фиг. 2 без соблюдения масштабов представлена схема расположения бифуркационных кривых в плоскости $\beta\lambda$ для фиксированного α . При $\alpha \rightarrow 0$ жирная z-образная кривая (кривые C_1, C_2, \bar{C}_2) стягивается в точку. Вместе с ней стягиваются в точку $(0, 0)$ и все другие точки пересечения бифуркационных кривых, кроме точек, лежащих на прямой $\beta = 1$. При $\alpha = 0$ кривые S_1 и S_2 идут из точки $(0, 0)$ в точки $(1, \pm 1.19)$ [7], а кривая S_3 стягивается к отрезку $\lambda = 0, 0 \leq \beta \leq 1$, соответствующему петле консервативной системы. Разбиение пространства $\beta\lambda\alpha$ для положительных α и β дано на фиг. 3. Принятое ранее ограничение на знаки α и β может быть снято. Бифуркационные поверхности могут быть продолжены симметрично плоскости $\beta = 0$ и симметрично оси β . Для точек, симметричных относительно плоскости $\beta = 0$, соответствующие бифуркации будут осуществляться в фазовом пространстве с измененным направлением осей φ и y , а для точек, симметричных относительно оси β , — с измененным направлением оси y и измененным направлением движения по траекториям.

1.5. Замечательной точкой пространства параметров является точка, соответствующая негрубой консервативной системе (начало координат). В ней пересекаются все бифуркационные поверхности и все линии их пересечений, и изучение малой окрестности этой точки (методами малого параметра) исчерпывает все качественные структуры и все бифуркации системы (1.1), при которых не исчезают состояния равновесия.

Замечание. Все указанные особенности в расположении бифуркационных поверхностей реализуются и для более общего уравнения

$$\varphi'' + \lambda\varphi' + F(\varphi) = \beta - \alpha f(\varphi')$$

где функция $F(\varphi)$ — непрерывная, периодическая с двумя экстремумами на периоде, симметричная относительно своих нулей, а функция $f(\varphi')$ — непрерывная, удовлетворяющая условиям: $\varphi' f(\varphi') > 0$ при $\varphi' \neq 0, f(\varphi') = -f(-\varphi'), f'(0) > 0, f'''(0) < 0, f(\infty) = 0$ и аналитическая в окрестности $\varphi' = 0$ и $\rho = 1/\varphi' = 0$. Доказательства переносятся почти дословно.

2. Рассмотрим систему, описывающую при некоторых предположениях стационарное движение доменов в двухдолинных полупроводниках [8-11]

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x' = y &\equiv P, & y' = [\varphi(x) - \lambda]y + \varphi(x) - \sigma + \alpha y(y + 1) &\equiv Q \end{aligned}$$

Здесь $\varphi(x)$ — функция, имеющая между возрастающими ветвями падающий участок, и $\lambda > 0, \sigma > 0, \alpha \geq 0$.

2.1. *Состояния равновесия.* Состояния равновесия определяются из условий $y = 0, \varphi(x) = \sigma$. Возможны одно или три состояния равновесия. На плоскости параметров $\sigma\lambda$ ($\alpha = \text{const}$) выделяется полоса $\sigma_m < \sigma < \sigma_M$

(σ_m и σ_M — значения $\varphi(x)$ в минимуме и в максимуме), где система имеет три состояния равновесия (два седла и фокус или узел между ними) и где происходят все бифуркации.

Фокус устойчив при $\lambda > \sigma + \alpha$ и неустойчив при $\lambda < \sigma + \alpha$. При $\lambda = \sigma + \alpha$ фокус сложный и первая ляпуновская величина имеет значение $\alpha_3 = -1/4 \alpha \lambda \beta^{1/2} < 0$, $\beta = -\varphi'(x_2) > 0$. Здесь x_2 — координата сложного фокуса. Таким образом, к фокусу может стягиваться или от него рождаться только устойчивый предельный цикл.

Седловая величина имеет значение $\Delta = \sigma - \lambda + \alpha$. Так как седловая величина и действительная часть корней характеристического уравнения для фокуса совпадают по знаку, то петли сепаратрис, если таковые образуются, и простой фокус одновременно устойчивы или неустойчивы и должны поэтому разделяться предельным циклом.

2.2. Структура решений при $\alpha = 0$. Пусть $\alpha = 0$ и $\sigma = \lambda$. Тогда система (2.1) становится консервативной и интегрируется. На фазовой плоскости будут два седла и центр между ними. При $\sigma \neq \lambda$ система (2.1) замкнутых траекторий не имеет, так как при изменении λ поле направлений (2.1) монотонно поворачивается, и замкнутые кривые центра будут циклами без контакта.

2.3. Структура решений при $\alpha \neq 0$. Все рассматриваемые бифуркации происходят в полосе $x_1 < x < x_3$, где x_1, x_3 — координаты седел. Поэтому будут рассматриваться только те α - и ω -сепаратрисы, которые входят в эту полосу.

1°. Пусть $\lambda \gg \sigma$. Состояния равновесия — два седла и устойчивый узел между ними. α - и ω -сепаратрисы при возрастании λ смещаются в противоположных направлениях и поэтому замкнутые траектории, если они существуют, ограничены по y . Применяя критерий Бендиксона — Дюлака, находим

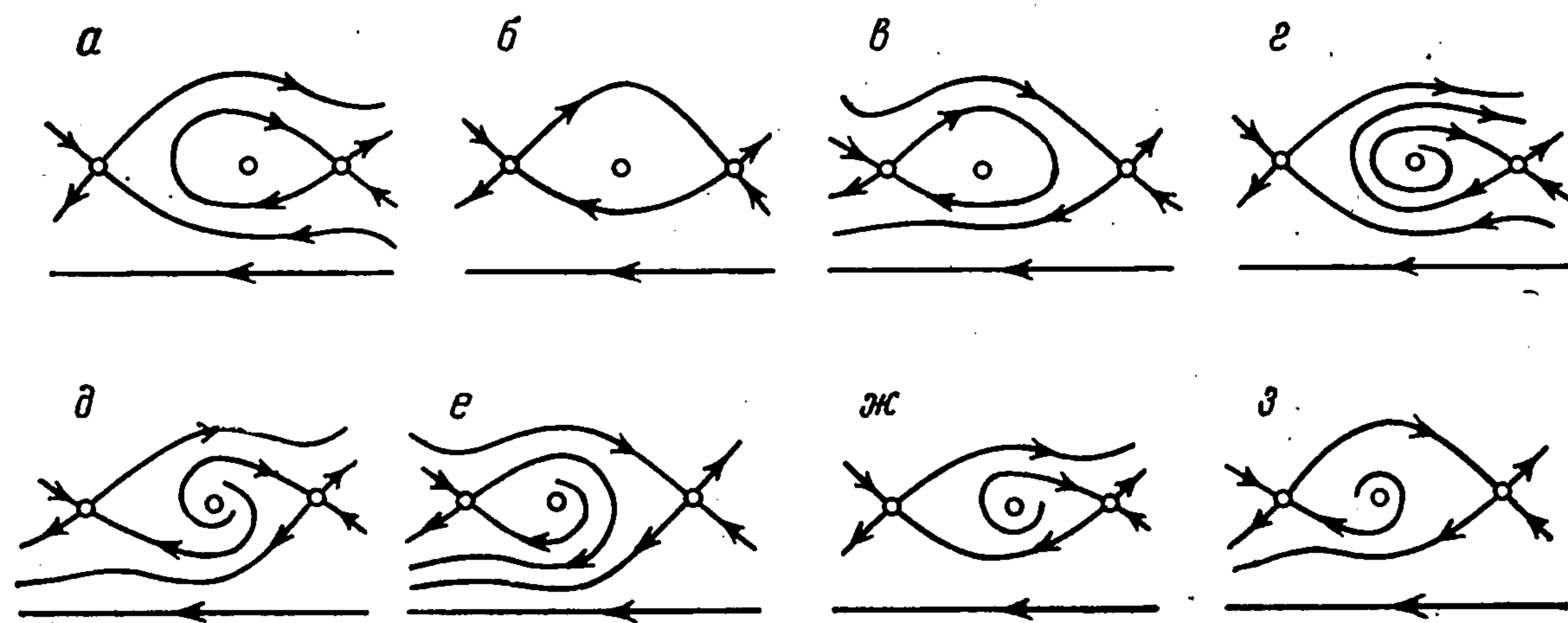
$$F_1 \equiv P_x' + Q_y' = \varphi(x) - \lambda + \alpha(2y + 1)$$

Для достаточно больших λ в области, охваченной сепаратрисами, где могли бы располагаться предельные циклы, величина F_1 знак не меняет и, следовательно, циклов нет. α -сепаратрисы идут в узел, ω -сепаратрисы идут из бесконечности (фиг. 5, ж).

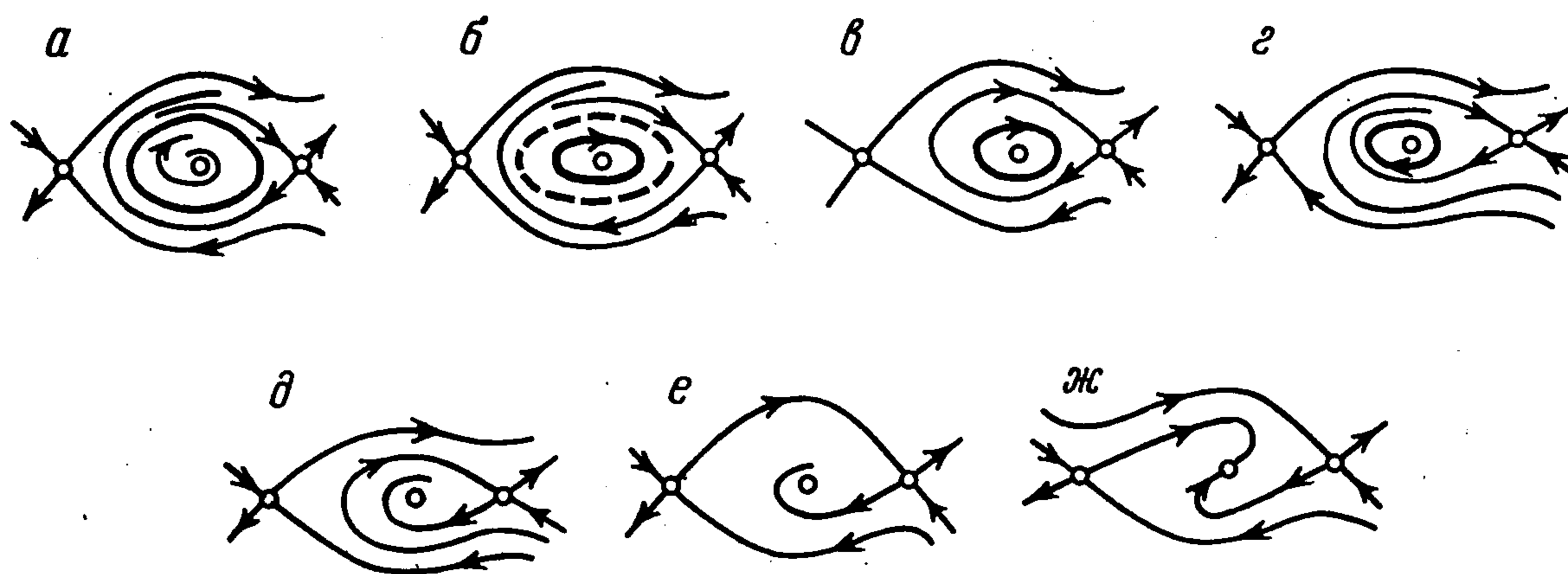
2°. Пусть $\lambda = \sigma$. Переход от значения $\alpha = 0$ к $\alpha \neq 0$ осуществляет поворот поля системы (2.1), при котором замкнутые кривые центра будут циклами без контакта. На фиг. 4, а — 4, в изображены структуры при $\alpha = 0$ и на фиг. 4, г — 4, е — структуры, в которые они переходят при $\alpha > 0$. При переходе от структуры фиг. 4, г к структуре фиг. 4, д необходимо должна возникнуть сепаратриса, идущая из седла в седло в области $y < 0$ (фиг. 4, ж), а при переходе от структуры 4, д к структуре 4, е — в области $y > 0$ (фиг. 4, з). Значения параметров, при которых происходят эти бифуркации, обозначим соответственно $\sigma_1(\alpha)$ и $\sigma_2(\alpha)$.

3°. Пусть $\sigma = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$. Монотонный поворот поля направлений (2.1) при изменении λ позволяет проследить все бифуркации. При $\lambda = \sigma < \sigma_1$ ω -сепаратриса правого седла скручивается с неустойчивого

фокуса, а α -сепаратриса левого седла идет в бесконечность (фиг. 4, *г*). При $\lambda \gg \sigma$ ω -сепаратриса правого седла идет из бесконечности, а α -сепаратриса левого седла идет в устойчивый узел (фиг. 5, *ж*). Из сравнения поведения сепаратрис следует, что при возрастании λ от $\lambda = \sigma$ до $\lambda \gg \sigma$ происходят бифуркации сепаратрис: сначала образуется петля сепарат-



Фиг. 4



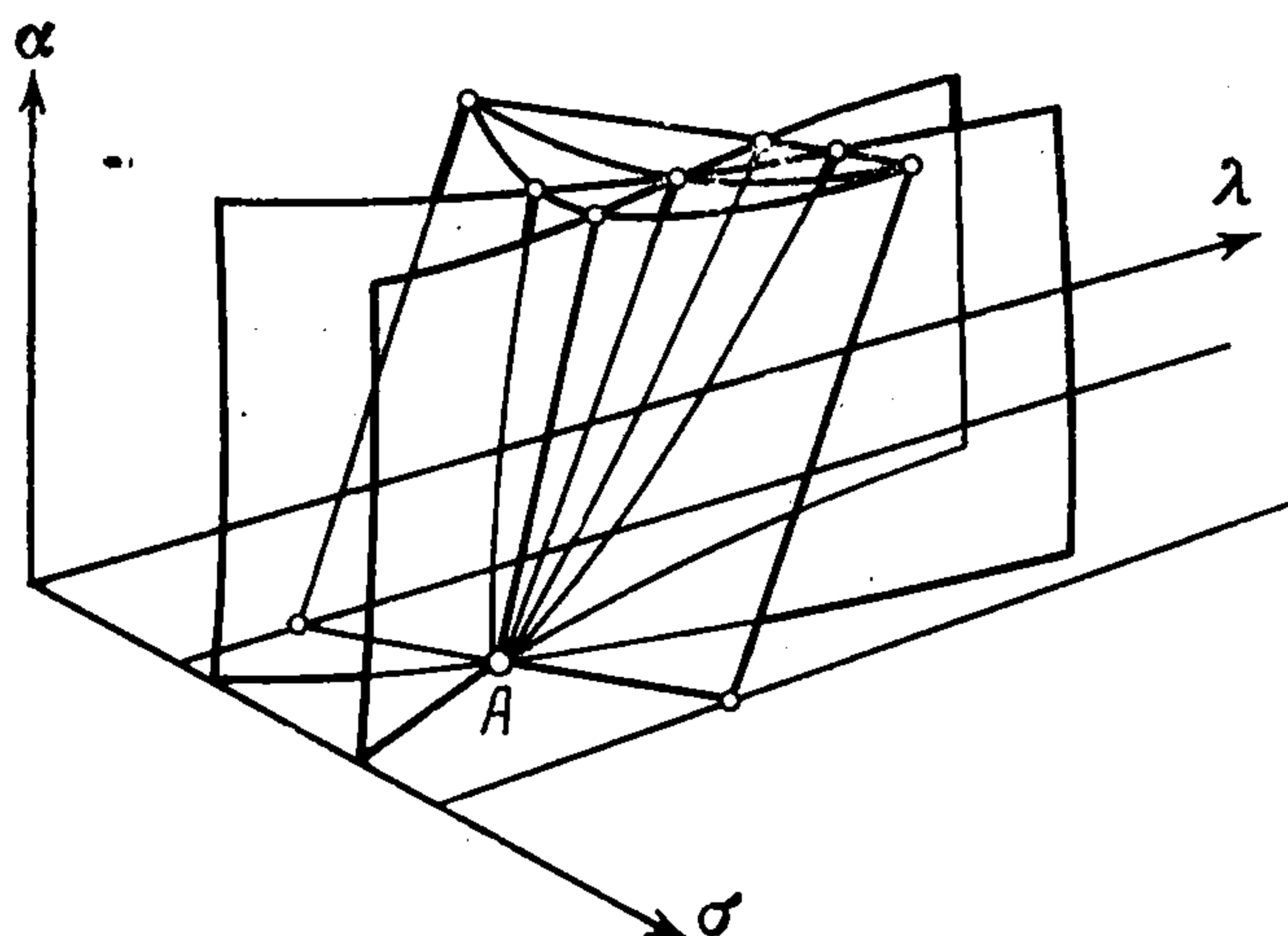
Фиг. 5

рисы правого седла, а затем сепаратриса, идущая из седла в другое седло в области $y > 0$.

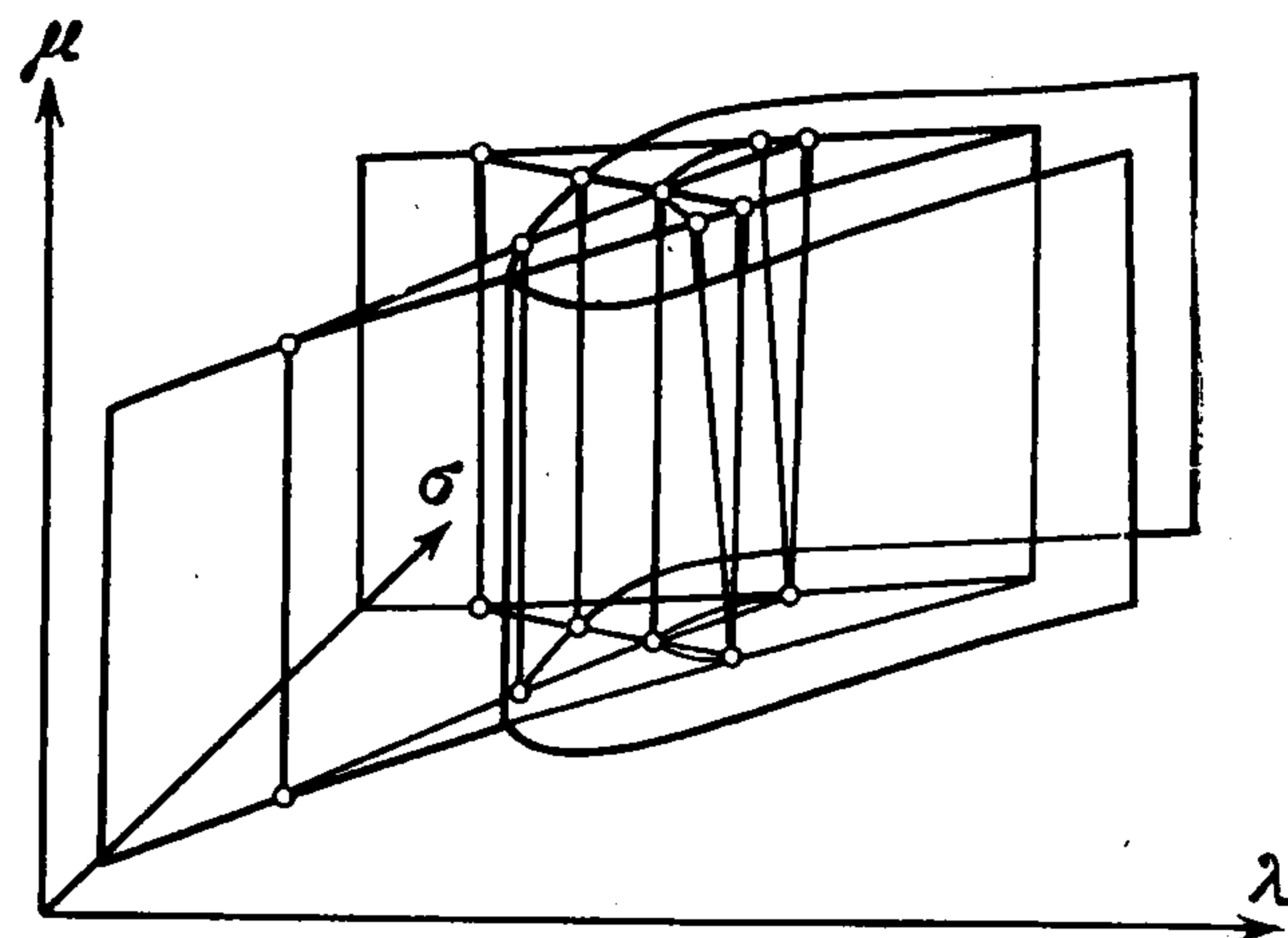
В силу условия $\alpha_3 < 0$ при возрастании λ и переходе λ через значение $\lambda = \sigma + \alpha$ к фокусу стягивается устойчивый цикл. Так как при $\lambda = \sigma$ система (2.1) предельных циклов не имеет и на интервале изменения λ от σ до $\sigma + \alpha$ может образоваться лишь неустойчивая петля (седловая величина положительна), то, следовательно, для некоторого λ из указанного интервала возникает из уплотнения траекторий полуустойчивый цикл, устойчивый изнутри (фиг. 5, *а*), который монотонным поворотом поля разделяется на два — наружный неустойчивый и внутренний устойчивый (фиг. 5, *б*). При возрастании λ циклы расходятся и возникает петля сепаратрисы, в которую при ее возникновении влипают неустойчивый цикл (фиг. 5, *в*). После разрушения петли возникает структура с одним устойчивым предельным циклом, охватывающим фокус (фиг. 5, *г*). При $\lambda = \sigma + \alpha$ устойчивый цикл стягивается к фокусу и при $\lambda > \sigma + \alpha$ будет структура без предельных циклов (фиг. 5, *д*). При дальнейшем увеличении λ образуется сепаратриса, идущая из седла в другое седло (фиг. 5, *е*) и при ее разрушении возникает структура, топологически эквивалентная структуре при $\lambda \gg \sigma$ (фиг. 5, *ж*). При убывании λ от зна-

чения $\lambda = \sigma$ единственной бифуркацией будет сепаратриса, идущая из седла в другое седло в области $y < 0$. Бифуркации могут происходить только в указанном порядке, так как седловая величина меняет знак одновременно со сменой устойчивости фокуса.

4°. В полосе $\sigma_2 < \sigma < \sigma_M$ аналогично устанавливается последовательность бифуркаций (бифуркационных кривых). Отличие будет в том, что петля будет образовываться сепаратрисой левого седла и при возрастании λ сепаратриса, идущая из седла в другое седло, возникает в области $y < 0$, а при убывании λ — в области $y > 0$.



Фиг. 6



Фиг. 7

В полосе $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ бифуркации аналогичны (хотя некоторые и происходят в другом порядке), и бифуркационные кривые соседних полос переходят одна в другую. Бифуркационные кривые петель левого и правого седла соединяются в точке пересечения кривых, соответствующих сепаратрисам, идущим из седла в седло, так как сепаратрисный контур с двумя седлами можно считать вырождением петли как правого, так и левого седла.

На прямых $\sigma = \sigma_m$ и $\sigma = \sigma_M$, ограничивающих рассматриваемую полосу в пространстве параметров, в фазовом пространстве возникает особая точка типа седло-узел. Эта точка становится вырожденной и узловая область исчезает, когда у характеристического уравнения появляется второй нулевой корень. Это происходит на пересечениях с прямой $\lambda = \sigma + \alpha$. В этих точках заканчиваются и бифуркационные кривые петель сепаратрис и двойных циклов.

2.4. *Разбиение пространства параметров.* На фиг. 6 представлено разбиение пространства $\sigma\lambda\alpha$. Через точку A , соответствующую негрубой консервативной системе в множестве консервативных систем $\alpha = 0$, $\lambda = \sigma$, проходят все возможные бифуркационные поверхности и линии их пересечения, в том числе и соответствующие сепаратрисам, идущим из седла в седло (возможность осуществления всех бифуркаций с предельными циклами порождает и необходимость осуществления в этой же окрестности бифуркаций сепаратрис в промежуточных структурах). Структуры в окрестности точки A исчерпывают все качественные структуры и все бифуркации системы (2.1) для значений параметров, при которых не исчезают состояния равновесия.

3. Рассмотрим систему

$$(3.1) \quad x' = y, \quad y' = \sigma - \lambda x - \varphi(x) - \mu y[1 + \varphi'(x)]$$

где $\varphi(x)$ имеет падающий участок при аппроксимации $\varphi(x)$ кубическим полиномом $\varphi(x) = ax^3 - bx^2 + cx$.

К виду (3.1) при $\mu = 1$ сводится система, рассмотренная в [12]. Для любого $\mu > 0$ состояния равновесия, их число, характер и взаимное расположение, уравнение дискриминантной кривой, отделяющей область трех состояний равновесия от области одного состояния равновесия, и уравнения бифуркационных кривых для фокуса не зависят от μ . Ляпуновские величины для системы (3.1) отличаются от приведенных в [12] множителем μ . Все выводы относительно качественных структур и структуры разбиения пространства параметров сохраняются.

При $\mu = 0$ система (3.1) консервативна и у нее возможны либо одно состояние равновесия — центр, либо три — два центра и седло между ними (для дискриминантной кривой — центр и сложное состояние равновесия). Используя метод малого параметра в форме Л. С. Понтрягина [13], можно установить на плоскости $\mu = 0$ расположение кривых, являющихся предельными при $\mu \rightarrow 0$ для бифуркационных поверхностей. Бифуркационные поверхности в пространстве параметров λ, μ , сечение их плоскостью $\mu = \text{const}$ и предельные кривые приведены на фиг. 7 (для простоты не изображены бифуркационные поверхности, соответствующие сложному фокусу).

Малая окрестность плоскости консервативных систем исчерпывает все качественные структуры и все бифуркации системы (3.1).

Приложение 1. Существование точки пересечения кривой C_2 с осью β и ее оценка ($\beta_0 < \alpha$) вытекает из сравнения системы (1.1) при $\lambda = 0$ с системой

$$(A.1) \quad \varphi' = y, \quad y' = \beta - \alpha - \sin \varphi$$

Для $\beta > \alpha$ траектории системы (A.1), выходящие на верхний полуцилиндр, представляют спирали, уходящие в бесконечность (за исключением ω -сепаратрисы седла, если седло существует), а поле направлений (1.1) повернуто относительно (A.1) против часовой стрелки. Поэтому у системы (1.1) при $\lambda = 0$, $\beta > \alpha$ предельных циклов нет, но они должны были бы быть, если бы кривая C_2 пересекала ось β справа от рассматриваемого значения $\beta > \alpha$ или уходила в бесконечность с асимптотой, расположенной ниже оси β .

Ограниченность сверху вытекает из отсутствия при $\lambda > \alpha/4$ действительных ветвей кривой $P_{\varphi'} + Q_{y'} = 0$.

Приложение 2. Полагая $y = 1/\rho$ и строя обычным образом функцию последования в окрестности [малого $\rho = \rho_0$, получаем

$$\rho_1(2\pi) - \rho_0(0) = \rho_0^2 \{2\pi\lambda + (4\pi^2\lambda^2 - 2\pi\beta)\rho_0 + [8\pi^3\lambda^3 - 10\pi^2\lambda\beta + 4\pi(\lambda + \alpha) - 6\pi\lambda]\rho_0^2 + \dots\}$$

Уравнение $\rho_1(2\pi) - \rho_0(0) = 0$ при малых β и λ и малых $\rho = 1/y$ будет иметь двойной положительный корень $\rho_0 = \beta/4\alpha + \dots$, соответствующий двойному предельному циклу на верхнем полуцилиндре, если $\lambda = \beta^2/8\alpha + \dots$. Последнее выражение дает асимптотическое представление кривой \bar{C}_2 в окрестности точки $\beta = \lambda = 0$.

Приложение 3. Ограниченность кривой C_2 справа (по β) следует из того, что при $\lambda > 0$ к кривой C_2 примыкает слева область существования трех циклов, а для достаточно больших β (при фиксированных α) не может быть более одного. Последнее сле-

дует из критерия Дюлака. $P_\varphi' + Q_y'$ обращается в нуль на прямых $y = y_j$, где y_j — корень уравнения

$$\lambda + 2\alpha(1 - y^2) / (1 + y^2)^2 = 0$$

и потому λy_j — величина ограниченная. Из (1.1) ввиду ограниченности λy_j следует, что кривая $P_\varphi' + Q_y'$ при больших β будет кривой без контакта.

Поступила 15 IV 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко Я. Г. Правдоподобность и доказательность в прикладной математике. Инж. ж. МТТ, 1967, 2.
2. Блехман И. И. Метод малого параметра. В сб.: Механика в СССР за 50 лет, т. 1. М., «Наука», 1968.
3. Рябов Ю. А. Оценка области сходимости периодических рядов — решений дифференциальных уравнений с малым параметром. Докл. АН СССР, 1958, т. 118, № 4.
4. Гельман А. Е. Один признак существования определенных классов решений нелинейного дифференциального уравнения и некоторые оценки в методе малого параметра. Докл. АН СССР, 1958, т. 118, № 6.
5. Шалфеев В. Д. К исследованию нелинейной системы частотно-фазовой автоподстройки с одинаковыми интегрирующими фильтрами в фазовой и частотной цепях. Изв. вузов. Радиофизика, 1969, т. 12, вып. 7.
6. Баутин Н. Н. Некоторые методы качественного исследования динамических систем, связанные с поворотом поля. ПММ, 1973, т. 37, вып. 6.
7. Giger A. Ein Grenzproblem einer technisch wichtigen nichtlinearen Differentialgleichung. Z. angew. Math. und Phys., 1956, Bd 7, H. 2.
8. Knight B. W., Peterson G. A. Theory of Gunn effect. Phys. Rev., 1967, vol. 155, No. 2.
9. Волков А. Ф., Коган Ш. М. Физические явления в полупроводниках с отрицательной дифференциальной проводимостью. Успехи физ. наук, т. 96, вып. 4.
10. Бонч-Бруевич В. Л., Звягин И. П., Миронов А. Г. Доменная электрическая неустойчивость в полупроводниках. М., «Наука», 1972.
11. Левинштейн М. Е., Пожела Ю. К., Шур М. С. Эффект Ганна. М., «Сов. радио», 1975.
12. Баутин А. Н. Качественное исследование одной нелинейной системы. ПММ, 1975, т. 39, вып. 4.
13. Понтрягин Л. С. О динамических системах, близких к гамильтоновым. ЖЭТФ, 1934, т. 4, вып. 9.