Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 534

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ И ОЦЕНКЕ СТАРШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

А. С. Миркина

(Ленинград)

Для обыкновенных дифференциальных уравнений излагается и обосновывается асимптотический метод многомасштабных разложений (см. [1, 2]). Доказывается, что в любом приближении результаты, полученные методом многомасштабных разложений и методом усреднения [3], эквивалентны. Обобщаются известные результаты [4, 5] о сходимости на конечном интервале времени. Показано, что интервал времени, на котором погрешность разложения остается малой, существенно зависит от свойств приближенного решения и его устойчивости.

Известные асимптотические методы Н. Н. Боголюбова — Ю. А. Митропольского хорошо обоснованы [3–5], установлен порядок близости между точным решением и его первым [3] и высшими [4, 5] приближениями. Однако построение высших приближений, как правило, весьма трудоемко. С другой стороны, метод многомасштабных разложений, основанный на качественных представлениях о характере движения систем, позволяет получить высшие приближения, не прибегая к громоздким выкладкам. Кроме того, он лучше раскрывает физическую сущность движения: выделяются эффекты «быстрые» и «медленные», проявляющиеся на различных интервалах времени. На конкретных примерах можно убедиться, что решения, построенные методом многомасштабных разложений и методом усреднения, совпадают в каждом приближении, однако в общем случае и для любого числа приближений это не было доказано. Ниже доказывается, что решения, полученные этими методами, полностью эквивалентны, и теоремы существования и сходимости асимптотических разложений, справедливые для метода усреднения, переносятся на метод многомасштабных разложений.

1. Пусть E — n-мерное вещественное пространство, D — ограниченная область в E. Рассмотрим уравнение в стандартной форме

$$dy / dt = \varepsilon Y_0(t, y) + \varepsilon^2 Y_1(t, y) + \ldots + \varepsilon^k Y_{k-1}(t, y) + \varepsilon^{k+1} Y_k(t, y, \varepsilon) \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad y \in D \tag{1.1}$$

Операторы Y_i $(i = 0, \ldots, k)$ по y непрерывны и имеют $k - i$ производных в D, по t, ε измеримы.

Решение уравнения предлагается искать в виде

$$y = f_0(t, \tau_1, \tau_2, \ldots) + \varepsilon F_1(t, \tau_1, \tau_2, \ldots) + \ldots + \varepsilon^k F_k(t, \tau_1, \tau_2, \ldots) \tag{1.2}$$

где $\tau_1 = \varepsilon t, \ldots, \tau_m = \varepsilon^m t$ — медленные переменные, характеризующие движения, происходящие с различной скоростью. При дифференцировании также учитывается различная скорость изменения переменных

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f_0}{\partial t} + \varepsilon\left(\frac{\partial f_0}{\partial \tau_1} + \frac{\partial F_1}{\partial t}\right) + \varepsilon^2\left(\frac{\partial f_0}{\partial \tau_2} + \frac{\partial F_1}{\partial \tau_1} + \frac{\partial F_2}{\partial t}\right) + \ldots \tag{1.3}$$

Для однозначного определения коэффициентов разложения их подчиняют условию однородности разложения

(1.4) $$\frac{\|F_1\|}{\|f_0\|} \sim 1, \ldots, \frac{\|F_i\|}{\|F_{i-1}\|} \sim 1 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t < \infty, \quad \varepsilon \to 0 \quad (i = 1, \ldots, k)$$

Выполнение этого условия обеспечит близость решения к порождающему на соответствующем интервале времени [2].

После подстановки (1.2), (1.3) в (1.1) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε получается система для последовательного определения операторов f_0, $F_1, \ldots, F_k$.

Из уравнения нулевого приближения $\partial f_0 / \partial t = 0$ следует, что f_0 не зависит явно от t и будет функцией медленных переменных: $f_0 = f_0(\tau_1, \tau_2, \ldots)$. Эта функция пока не известна и должна определяться из уравнений высших приближений с учетом условия (1.4). Для $F_1, \ldots F_k$ имеем

(1.5) $$\begin{aligned} &\frac{\partial F_1}{\partial t} = Y_0(t, f_0) - \frac{\partial f_0}{\partial \tau_1} \\ &\frac{\partial F_2}{\partial t} = Y_1(t, f_0) + \frac{\partial Y_0}{\partial f_0} F_1 - \frac{\partial F_1}{\partial \tau_1} - \frac{\partial f_0}{\partial \tau_2} = \Phi_1(t, f_0) - \frac{\partial f_0}{\partial \tau_2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{\partial F_k}{\partial t} = \Phi_{k-1}(t, f_0) - \frac{\partial f_0}{\partial \tau_k} \end{aligned}$$

(1.6) $$\Phi_m(t, f_0) = \sum_{j=0}^{m-i} P_{ij} - \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial F_{m-r+1}}{\partial \tau_r}$$

Операторы P_{ij} определяются из разложений

(1.7) $$Y_i(t, f_0 + \varepsilon F_1 + \ldots + \varepsilon^k F_k) = \sum_{j=0}^{k-i} P_{ij}\varepsilon^j + P_i(\varepsilon)\,\varepsilon^{k-i+1}$$

Из первого уравнения системы (1.5) следует, что для выполнения условия (1.4) необходимо исключить из равенства

$$F_1 = \int_0^t Y_0(s, f_0)\,ds - t\frac{\partial f_0}{\partial \tau_1}$$

линейные по t члены, положив

(1.8) $$\frac{\partial f_0}{\partial \tau_1} = \overline{\Phi}_0(f_0), \quad \overline{\Phi}_0(f_0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T Y_0(f_0, s)\,ds = \overline{Y}_0(f_0)$$

Таким образом

(1.9) $$F_1(t, \tau_1, \ldots) = \int_0^t [Y_0(f_0, s) - \overline{\Phi}_0(f_0)]\,ds = F_1(t, f_0(\tau_1, \ldots))$$

Исключая секулярные члены из всех последующих приближений, получим

(1.10) $$\frac{\partial f_0}{\partial \tau_{i+1}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \Phi_i(t, f_0)\,dt = \overline{\Phi}_i(f_0)$$

(1.11) $$F_i(t, \tau_1, \ldots) = F_i(t, f_0(\tau_1, \ldots)) = \int_0^t [\Phi_{i-1}(s, f_0) - \overline{\Phi}_{i-1}(f_0)]\,ds$$

Учитывая, что $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ — не независимые переменные, запишем уравнения для определения f_0

$$\frac{df_0}{dt} = \varepsilon \frac{\partial f_0}{\partial \tau_1} + \ldots + \varepsilon^k \frac{\partial f_0}{\partial \tau_k} = \varepsilon \overline{\Phi}_0(f_0) + \ldots + \varepsilon^{k+1} \overline{\Phi}_k(f_0) \tag{1.12}$$

Высшие члены разложения определяются из равенств (1.11), в которых функция f_0 уже известна как решение уравнения (1.12).

Уравнение (1.12) и соотношения (1.11) определяют величины f_0, F_i с точностью до членов порядка ε^k. Явное введение медленных переменных позволяет раскрыть физическую сущность решения: уравнения (1.10) описывают медленные процессы, существенные лишь на интервале времени $t \sim T / \varepsilon^{i+1}$, и, удерживая в разложении (1.2) $k + 1$ членов, учитываем эффекты не только малые, но и медленные, проявляющиеся на интервалах времени $t \sim T / \varepsilon^k$.

Если рассматривать f_0 как новую переменную, через которую по формулам (1.11) выражены операторы F_i, то, подставляя (1.2), (1.3) в уравнение (1.1) и учитывая соотношения (1.6), (1.12), получим, что f_0 удовлетворяет точному уравнению

$$\begin{aligned} df_0 / dt = \varepsilon \overline{\Phi}_0 (f_0) + \ldots + \varepsilon^k \overline{\Phi}_{k-1} (f_0) + \varepsilon^{k+1} \Phi_k (t, f_0) + \\ + \varepsilon^{k+1} R (t, f_0, \varepsilon) \end{aligned} \tag{1.13}$$

где $\lim R (t, f_0, \varepsilon) = 0$ при $\varepsilon \to 0$. Если же определять f_0 из усредненного уравнения (1.12), возникает погрешность разложения, оценка которой будет дана в п. 2.

Покажем, что главный член разложения f_0 и выражающиеся через него высшие приближения полностью совпадают с коэффициентами асимптотического разложения, построенного методом усреднения.

В методе усреднения решение уравнения (1.1) ищется в виде разложения [3–5]

$$y = x + \varepsilon U_1 (t, x) + \ldots + \varepsilon^k U_k (t, x) \tag{1.14}$$

в котором главный член разложения x рассматривается как новая переменная. Следуя основным предположениям и выкладкам работы [5], при помощи замены (1.14) от уравнения (1.1) переходим к автономному с точностью до членов порядка ε^{k+1} уравнению

$$\begin{aligned} dx / dt = \varepsilon X_0 (x) + \varepsilon^2 X_1 (x) + \ldots + \varepsilon^k X_{k-1} (x) + \\ + \varepsilon^{k+1} X_k (t, x, \varepsilon) \end{aligned} \tag{1.15}$$

Операторы $X_i (x)$, $U_{i+1} (t, x)$ последовательно определяются из соотношений [4, 5]

$$X_i(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Psi_i (s, x)\, ds \tag{1.16}$$

$$U_{i+1} (t, x) = \int_0^t [\Psi_i (s, x) - X_i (x)]\, ds$$

Здесь

$$(1.17)\qquad \Psi_\alpha(t, x) = \sum_{i+j+l=\alpha} Q_l P_{ij} - \sum_{0\leqslant m\leqslant \alpha-1} Q_{\alpha-m}\frac{\partial U_{m+1}}{\partial t} \qquad (\alpha = 0, \ldots, k)$$

$$(1.18)\qquad Q_l = -\sum_{s+p=l}\frac{\partial U_s}{\partial x} Q_p$$

$$\left(\left[I + \varepsilon\frac{\partial U_1}{\partial x} + \ldots + \varepsilon^k\frac{\partial U_k}{\partial x}\right]^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i Q_i\right)$$

Операторы P_{ij} удовлетворяют соотношениям (1.7).

Оператор $X_k(t, x, \varepsilon)$ определен формулой

$$X_k(t, x, \varepsilon) = \Psi_k(t, x) + L(t, x, \varepsilon), \quad \lim_{\varepsilon\to 0} L(t, x, \varepsilon) = 0$$

$L(t, x, \varepsilon)$ — остаток, который образуется после подстановки в исходное уравнение (1.1) разложения (1.14), в котором $x(t)$ определяется из усредненного уравнения

$$(1.19)\qquad dx\,/\,dt = \varepsilon X_0(x) + \ldots + \varepsilon^k X_{k-1}(x) + \varepsilon^{k+1}\overline{X}_k(x)$$

$$\left(\overline{X}_k(x) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X_k(t, x, 0)\,dt\right)$$

а операторы X_i, U_i заданы соотношениями (1.16). Выражение для оператора L приведено в [3-5].

Сравнивая соотношения (1.10) — (1.13) и (1.14) — (1.18), видим, что решения, полученные обоими методами, совпадают, если совпадают величины Φ_i и Ψ_i, определяемые соответственно формулами (1.6) и (1.17).

Действительно, пусть $x^{(k+1)}$ — решение уравнения (1.19), $f_0^{(k+1)}$ — решение уравнения (1.12). Тогда, если $\Phi_i = \Psi_i$, $0\leqslant i\leqslant m-1$, то

$$\frac{df_0^{(m)}}{dt} = \sum_{i=1}^{m}\varepsilon^i\Psi_{i-1}(f_0^{(m)}) = \sum_{i=1}^{m}\varepsilon^i\Phi_{i-1}(f_0^{(m)})$$

т. е. $f_0^{(m)} = x_0^{(m)}$, и, следовательно

$$(1.20)\qquad F_i = U_i, \quad 1\leqslant i\leqslant m$$

Применим метод математической индукции. При $i=0$ $\Phi_0 = \Psi_0 = Y_0$. Докажем, что если

$$(1.21)\qquad \Phi_{m-1} = \Psi_{m-1} = \sum_{i+j+l=m-1} Q_l P_{ij} - \sum_{0\leqslant r\leqslant m-2} Q_{m-r-1}\frac{\partial F_{r+1}}{\partial t}$$

где в соответствии с (1.18), (1.20)

$$(1.22)\qquad Q_l = -\sum_{s+p=l}\frac{\partial F_s}{\partial f_0} Q_p, \quad 0\leqslant l\leqslant m$$

то

$$(1.23)\qquad \Phi_m = \Psi_m = \sum_{i+j+l=m} Q_l P_{ij} - \sum_{0\leqslant r\leqslant m-1} Q_{m-r}\frac{\partial F_{r+1}}{\partial t}$$

Вычислим сначала вторую сумму в (1.6).

В силу (1.5) и (1.21)

$$\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial F_{m-r+1}}{\partial\tau_r}=\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial F_{m-r+1}}{\partial f_0}\frac{\partial f_0}{\partial\tau_r}=\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial F_{m-r+1}}{\partial f_0}\left[\Phi_{r-1}-\frac{\partial F_r}{\partial t}\right]=$$

$$=\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial F_{m-r+1}}{\partial f_0}\left[\sum_{i+j+l=r-1}Q_lP_{ij}-\sum_{0\leqslant q\leqslant r-2}Q_{r-1-q}\frac{\partial F_{q+1}}{\partial t}-\frac{\partial F_r}{\partial t}\right]$$

В свою очередь, учитывая (1.22)

$$\sum_{r=1}^{m}\sum_{i+j+l=r-1}\frac{\partial F_{m-r+1}}{\partial f_0}Q_lP_{ij}=-\sum_{\substack{s+i+j=m\\ s\geqslant 1}}Q_sP_{ij}\tag{1.24}$$

Благодаря тому, что $Q_0=1$, можем записать

$$\sum_{j=0}^{m-i}P_{ij}+\sum_{\substack{s+i+j=m\\ s\geqslant 1}}Q_sP_{ij}=\sum_{\substack{s+i+j\\ s\geqslant 0}}Q_sP_{ij}\tag{1.25}$$

Точно так же

$$\sum_{r=1}^{m}\sum_{0\leqslant q\leqslant r-2}\frac{\partial F_{m-r+1}}{\partial f_0}\left[Q_{r-1-q}\frac{\partial F_{q+1}}{\partial t}+\frac{\partial F_r}{\partial t}\right]=\sum_{0\leqslant q\leqslant m-1}Q_{m-q}\frac{\partial F_{q+1}}{\partial t}\tag{1.26}$$

Подставляя (1.24) — (1.26) в (1.6), убедимся, что (1.6) совпадает с (1.23).

Таким образом, доказано, что разложения (1.2) и (1.14) эквивалентны, т. е. $f_0=x$, $F_i(t,\tau_1,\ldots)=F_i(t,f_0(\tau_1,\ldots))=U_i(t,x)$.

Условия, при которых могут быть последовательно определены операторы U_i или (что то же) F_i, сформулированы в [3-5]. В частности, если все операторы Y_i $(i=0,\ldots,k)$ вместе с производными до порядка $k-i$ ограничены в D, если ограничены операторы U_i и если существует усреднение от оператора Ψ_k (условия (P_k)), то операторы U_i последовательно определяются по формулам (1.16).

2. Из результатов п. 1 следует, что определяя $k+1$ членов разложения, удерживаем величины, существенные на интервале времени $t\sim T/\varepsilon^k$. В то же время для метода усреднения и тем самым для метода многомасштабных разложений справедлива теорема [3-5], утверждающая, что при определенных ограничениях на коэффициенты уравнения для любого (конечного) T выполняется равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \sup_{x\in M(\varepsilon,\,T/\varepsilon)}\ \max_{0\leqslant t\leqslant T/\varepsilon}\left(\varepsilon^{-k}\|x(t)-\bar x(t)\|\right)=0\tag{2.1}$$

$$\bar x\in M_k\left(\varepsilon,\frac{T}{\varepsilon}\right)$$

где $M(\varepsilon,T)$ — множество всех определенных на $[0,T]$ решений уравнения (1.15), а $M_k(\varepsilon,T)$ — множество всех асимптотических приближений $k+1$-го порядка к решению $x(t)$. Интересным, однако, представляется поведение решения на интервале времени $t\sim T/\varepsilon^k$, поскольку имеет смысл удерживать лишь те члены, которые существенны внутри интервала сходимости.

Рассмотрим вновь уравнение (1.1), решение которого ищется в виде (1.14). Главный член разложения x удовлетворяет точному уравнению

(2.2) $$dx / dt = \varepsilon X_0(x) + \varepsilon^2 X_1(x) + \ldots + \varepsilon^{k+1} X_k(t, x, \varepsilon)$$

Используя асимптотические методы, можно найти приближенное решение

(2.3) $$y = \bar{x} + \varepsilon U_1(t, \bar{x}) + \ldots + \varepsilon^k U_k(t, \bar{x})$$

в котором главный член разложения $\bar{x}$ удовлетворяет усредненному уравнению

(2.4) $$d\bar{x} / dt = \varepsilon X_0(\bar{x}) + \varepsilon^2 X_1(\bar{x}) + \ldots + \varepsilon^{k+1} \bar{X}_k(\bar{x}) = \varepsilon Z(\varepsilon, \bar{x})$$

$$\left(\bar{X}_k(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_k(t, x, 0)\, dt\right)$$

Требуется оценить величину $\| y - \bar{y} \|$. Для этого оценим разность $\| x - \bar{x} \|$ между решением точного уравнения (2.2) и усредненного уравнения (2.4).

Положим сначала, что уравнение (2.4) имеет квазистатическое, т. е. не зависящее от времени решение $\bar{x} = \xi$. Уравнение возмущенного движения относительно $\bar{x} = \xi$ можно записать в виде

(2.5) $$dh / dt = \varepsilon [Z(\xi + h, \varepsilon) - Z(\xi, \varepsilon)] = \varepsilon [A(\varepsilon)h + F(\varepsilon, h)]$$

$$A(\varepsilon) = \left.\frac{\partial Z(\bar{x}, \varepsilon)}{\partial \bar{x}}\right|_{\bar{x}=\xi}, \quad \lim_{\|h\|\to 0} \frac{\| F(\varepsilon, h) \|}{\| h \|} = 0$$

Пусть среди собственных чисел $\lambda_q(A)$ матрицы $A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1 + \ldots + \varepsilon^k A_k$ может быть хотя бы одно, лежащее в правой полуплоскости, причем

(2.6) $$0 < \max \operatorname{Re} \lambda_q(A) < \nu, \quad \nu \leqslant \varepsilon^m a_m + \ldots + \varepsilon^k a_k \quad 0 \leqslant m \leqslant k$$

Тогда можно использовать оценку [6]

(2.7) $$\| e^{At} \| \leqslant N e^{\nu t}$$

Введем в рассмотрение величину $u = (x - \xi) / \varepsilon^k$ и запишем уравнение для u, заменив t на новую переменную $\tau = \varepsilon t$

(2.8) $$\frac{du}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon^k} [Z(\xi + \varepsilon^k u, \varepsilon) - Z(\xi, \varepsilon)] + \\ + \left[X_k\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \xi + \varepsilon^k u, \varepsilon\right) - \bar{X}_k(\xi + \varepsilon^k u)\right]$$

Перепишем (2.8), выделив линейную по u часть

(2.9) $$du / d\tau = A(\varepsilon)u + 1/\varepsilon^k F(\varepsilon^k u, \varepsilon) + V(\tau/\varepsilon, u, \varepsilon)$$

$$V(\tau / \varepsilon, u, \varepsilon) = X_k(\tau / \varepsilon, \xi + \varepsilon^k u, \varepsilon) - \bar{X}_k(\xi + \varepsilon^k u)$$

Здесь $A(\varepsilon)$, $F(\varepsilon^k u, \varepsilon)$ — величины, входящие в уравнение (2.5).

Теорема 1. Пусть уравнение (2.4) имеет квазистатическое решение, для которого выполнены условия (2.5)—(2.7). Пусть, кроме того, $X_k(\tau / \varepsilon, \varepsilon, x)$ интегрально сходится к $\bar{X}_k(x)$, т. е. [6]

(2.10) $$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\tau_0}^{\tau_0+\tau} \left[X_k\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}, \varepsilon, x\right) - \bar{X}_k(x)\right] d\sigma$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\substack{x\in M(\varepsilon,\, T/\varepsilon^{m+1})\\ \xi\in M_k(\varepsilon,\, T/\varepsilon^{m+1})}} \max_{0\leqslant t\leqslant T/\varepsilon^{m+1}} (\varepsilon^{-k}\,\|x(t)-\xi\|)=0 \tag{2.11}$$

Доказательство. Перепишем (2.9) в виде интегрального уравнения $u(\tau)=I_1(u,\tau,\varepsilon)+I_2(u,\tau,\varepsilon)$

$$I_1(u,\tau,\varepsilon)=\varepsilon^{-k}\int_0^\tau e^{A(\varepsilon)(\tau-\sigma)}F(\varepsilon^k u,\varepsilon)\,d\sigma$$

$$I_2(u,\tau,\varepsilon)=\int_0^\tau e^{A(\varepsilon)(\tau-\sigma)}V\left(\frac{\sigma}{\varepsilon},u,\varepsilon\right)d\sigma$$

и оценим входящие сюда интегралы.

Благодаря тому, что $F(\varepsilon,h)$ содержит h в степени выше первой, можно выбрать такую окрестность $\|u\|<\rho$, что

$$\varepsilon^{-k}\,\|F(\varepsilon^k u,\varepsilon)\|\leqslant q\,\|u\|,\quad q\leqslant\nu\,/\,N$$

Тогда можем записать

$$I_1(u,\tau,\varepsilon)\leqslant qN\int_0^\tau e^{\nu(\tau-\sigma)}\,\|u(\sigma)\|\,d\sigma\leqslant\nu\int_0^\tau e^{\nu(\tau-\sigma)}\,\|u(\sigma)\|\,d\sigma \tag{2.12}$$

Оценим второе слагаемое. Интегрируя по частям, получим

$$I_2(u,\tau,\varepsilon)=\int_0^\tau e^{A(\varepsilon)(\tau-\sigma)}\,d_\sigma J(u,\sigma,\varepsilon)=J(u,\tau,\varepsilon)+ \tag{2.13}$$

$$+A(\varepsilon)\int_0^\tau e^{A(\varepsilon)(\tau-\sigma)}J(u,\sigma,\varepsilon)\,d\sigma,\quad J(u,\tau,\varepsilon)=\int_0^\tau V\left(\frac{s}{\varepsilon},u,\varepsilon\right)ds$$

В силу условия (2.10) $\lim J(u,\sigma,\varepsilon)=0$ при $\varepsilon\to 0$. Однако согласно теореме об ограниченной сходимости переход к пределу в (2.13) возможен только в области, где ограничена величина $\|e^{A(\varepsilon)(\tau-\sigma)}\|$, т. е. при $0\leqslant\tau\leqslant T\,/\,\nu$ (см. ([7]). Тогда

$$I_2(u,\tau,\varepsilon)\leqslant\eta(\varepsilon) \tag{2.14}$$

и $\lim\eta(\varepsilon)=0$ при $\varepsilon\to 0$ равномерно по $u\in D$, $\tau\in[0,T\,/\,\nu]$.

Используя (2.12), (2.14), приходим к интегральному неравенству

$$\|u(\tau)\|\leqslant\nu\int_0^\tau e^{\nu(\tau-\sigma)}\,\|u(\sigma)\|\,d\sigma+\eta(\varepsilon)$$

Отсюда получим [6]

$$\|u(\tau)\|\leqslant{}^1/_2\eta(\varepsilon)(1+e^{2\nu\tau}),\quad\|u(\tau)\|\to 0\quad\text{при } 0\leqslant\tau\leqslant T/\nu$$

где ν имеет вид (2.6). Отсюда сразу следует справедливость соотношения (2.11).

Для простоты предполагалось, что ξ — квазистатическое решение уравнения (2.4). Однако доказательство остается справедливым для любого решения $\bar{x} = \bar{x}(t, \varepsilon)$, для которого матрица Коши уравнения в вариациях

$$dh / dt = \varepsilon A(t, \varepsilon) h \tag{2.15}$$

удовлетворяет соотношению

$$\| H(t, s) \| \leqslant N e^{\varepsilon\nu(t-s)} \tag{2.16}$$

причем разложение показателя ν начинается с величин порядка ε^m (см. (2.6)). Таким образом, можно утверждать, что справедлива

Теорема 2. Пусть уравнение (2.4) имеет решение $\bar{x} = \bar{x}(t, \varepsilon)$, для которого выполнены условия (2.15), (2.16). Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x(t)\in M(\varepsilon, T/\varepsilon^{m+1})} \max_{0\leqslant t\leqslant T/\varepsilon^{m+1}} (\varepsilon^{-k} \| x(t) - \bar{x}(t) \|) = 0 \tag{2.17}$$

$$\bar{x}(t) \in M_k\left(\varepsilon, \frac{T}{\varepsilon^{m+1}}\right)$$

Следуя [3], оценим величину $\| y - \bar{y} \|$, где y — точное решение уравнения (1.1), выраженное формулой (1.11), $\bar{y}$ — его асимптотическое приближение, имеющее вид (2.3).

Из соотношений (1.16) следует, что, если выполнены условия (P_k), то справедливы соотношения $\| U_i(t, x) \|$, $\| \partial U_i(t, x) / \partial t \| \leqslant \psi(t)$, где функция $\psi(t)$ ограничена на каждом конечном промежутке и $\lim t^{-1}\psi(t) = 0$ при $t \to \infty$.

Более того, справедливо утверждение [3]

$$\| \varepsilon U_1(t, x) + \ldots + \varepsilon^k U_k(t, x) \| \leqslant k\varepsilon\psi(t) \quad (0 \leqslant t < \infty)$$

т. е.

$$\| \varepsilon U_1(t, x) + \ldots + \varepsilon^k U_k(t, x) \| \leqslant c(\varepsilon) \quad (0 \leqslant t \leqslant T/\varepsilon^{m+1}) \tag{2.18}$$

и точно так же

$$\left\| \varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial x} + \ldots + \varepsilon^k \frac{\partial U_k}{\partial x} \right\| \leqslant c(\varepsilon) \quad (0 \leqslant t \leqslant T/\varepsilon^{m+1}) \tag{2.19}$$

причем $\lim c(\varepsilon) = 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Область D называется правильной [3], если существует такая постоянная c, что любые две точки $x, y \in D$ могут быть соединены спрямляемой кривой, длина которой меньше чем $c \| x - y \|$. Таким образом, если выполнены условия (P_k) и область D — правильная, то из (2.18), (2.19) и определения правильной области следует, что

$$\| y - \bar{y} \| = \| (x - \bar{x}) + [\varepsilon U_1(t, x) + \ldots + \varepsilon^k U_k(t, x) -$$
$$- \varepsilon U_1(t, \bar{x}) - \ldots - \varepsilon^k U_k(t, \bar{x})] \| \leqslant \| x - \bar{x} \| (1 + d(\varepsilon))$$
$$\left(\lim d(\varepsilon) = 0 \text{ при } \varepsilon \to 0,\ x, \bar{x} \in D,\ 0 \leqslant t \leqslant \frac{T}{\varepsilon^{m+1}}\right)$$

Поскольку величина $\| x - \bar{x} \|$ удовлетворяет условию (2.17), то можно записать

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{y(t)\in N(\varepsilon, T/\varepsilon^{m+1})} \max_{0\leqslant t\leqslant T/\varepsilon^{m+1}} (\varepsilon^{-k} \| y(t) - \bar{y}(t) \|) = 0$$

$$\bar{y}(t) \in N_k\left(\varepsilon, \frac{T}{\varepsilon^{m+1}}\right)$$

где $N(\varepsilon, T)$ — множество всех определенных на $[0, T]$ решений уравнения (1.1), удовлетворяющих начальному условию $y(0) = y_0$, а $N_k(\varepsilon, T)$ — множество всех асимптотических приближений $k+1$-го порядка к решению $y(t)$.

Можно убедиться, что известные результаты об обосновании метода усреднения на бесконечном интервале времени [3] также вытекают из теорем 1 и 2. Для этого достаточно повторить доказательство, положив в (2.6) и (2.16) $\nu < 0$.

Поступила 22 XI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Найфэ А.* Методы возмущений. М., «Мир», 1976.
2. *Sandri G.* Uniformization of asymptotic expansions. In: Non-linear partial differential equations. New York, Acad. Press, 1967.
3. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев, «Наукова думка», 1971.
4. *Забрейко П. П., Ледовская И. Б.* О старших приближениях метода усреднения Н. Н. Боголюбова — Н. М. Крылова. Докл. АН СССР, 1966, т. 171, № 2.
5. *Забрейко П. П., Ледовская И. Б.* К обоснованию метода Н. Н. Боголюбова — Н. М. Крылова для обыкновенных дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения, 1969, т. 5, № 2.
6. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., «Наука», 1976.
7. *Джеффрис Г., Свирлс Б.* Методы математической физики, т. 1. М., «Мир», 1969.