Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 521.1

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ДАЛАМБЕРОВСКИХ ФУНКЦИЙ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

К. В. Холшевников

(Ленинград)

Доказано, что даламберовская характеристика функций небесной механики представляет собой следствие голоморфности в неограниченной области и некоторого функционального соотношения. Радиус сходимости соответствующих степенных разложений определяется размерами области.

При построении аналитических теорий движения планет и спутников большое внимание уделяется даламберовской характеристике (см. [1], § 69). Под таким названием известно свойство коэффициентов тригонометрического ряда, позволяющее заменить его степенным рядом по $x = re^{i\varphi}$, $y = re^{-i\varphi}$, где φ — угловая переменная, r — эксцентриситет или наклон. Естественно поставить вопрос об определении функциональных свойств суммы, влекущих упомянутую характеристику коэффициентов. Насколько известно автору, ранее такие попытки не предпринимались, по-видимому, в силу следующих причин. Во-первых, для обычных на практике формальных построений (без исследования сходимости и оценок остатка) достаточно формального определения даламберовской характеристики. При этом не исключаются даже всюду расходящиеся ряды. Во-вторых, стандартная область изменения переменных r, φ — декартово произведение круга $|r| < R$ на полосу $|\operatorname{Im} \varphi| < \Phi$ — не годится для исследования даламберовской характеристики. В самом деле, в переменных x, y начало координат $x = y = 0$ оказывается на границе, поскольку сколь угодно малый шар $|x|^2 + |y|^2 < \varepsilon$ содержит точки со сколь угодно большими $|\operatorname{Im} \varphi|$.

В предлагаемой работе найден способ свести даламберовскую характеристику к некоторому функциональному свойству. Ключевой момент состоит в нахождении адекватной области изменения переменных r, φ. В качестве непосредственного приложения получены оценки общего члена и остатка соответствующего ряда.

Исследование даламберовской характеристики непосредственно затрагивает вопрос о соотносимости фазовых координат типа декартовых x, y и полярных r, φ в разных задачах динамики. Например, в задаче отыскания решений системы дифференциальных уравнений в окрестности равновесия, периодического или условно-периодического движения. В зависимости от характера задачи и вкусов исследователя употребляются как декартовы, так и полярные координаты. Формальные решения обычно одинаковы с точностью до обозначений, но оценки областей применимости существенно различны.

Из рассмотрений данной статьи вытекает изоморфизм решений и соответствующих областей в обеих системах координат при выполнении некоторых условий, которые естественно назвать даламберовскими. Результаты работы приложимы к широкому кругу задач, например, для получения оценки коэффициентов разложения возмущающей функции задачи нескольких тел. Более интересно применение к задаче об условно-периодических решениях канонической системы уравнений с гамильтонианом $H_0(p) + \mu H_1(p, q)$ (в общепринятых обозначениях) в случае предельного вырождения H_0, типичного в задачах небесной механики [2]. Последовательность стягивающихся областей [2], в которых определена каноническая система

$$H_{0k}(p_k) + \mu_k H_{1k}(p_k, q_k) \quad (\mu_k \to 0)$$

после k-й замены переменных, можно модифицировать так, чтобы точка $r = 0$ оказалась внутренней, а не выкалывалась бы на первом же шаге. Здесь r отвечает той переменной или группе переменных p, по которым имеется предельное вырождение.

Нахождение оценки возмущающей функции или исследование стягивающихся областей слишком громоздко, чтобы служить лишь иллюстрацией к теоремам данной работы. Здесь будут даны два простых примера. Второй из них показывает, что обобщение результатов на случай более двух измерений вряд ли представляет интерес: в задачах динамики переменные, обладающие даламберовской характеристикой, обычно разбиваются на пары типа действие — угол.

Пусть переменные r, φ изменяются в многосвязной области D_1 пространства C^2, выделяемой неравенством

$$0 < |r| e^{|v|} < R \quad (\varphi = u + iv)$$

где R — произвольное положительное число. От односвязной области D_2: $|r| e^{|v|} < R$ область D_1 отличается отсутствием плоскости $r = 0$. Как можно убедиться, целые функции

(1) $$x = re^{i\varphi}, \quad y = re^{-i\varphi}$$

бесконечнолистно отображают D_1 на E_1: $0 < |x| < R$, $0 < |y| < R$. Обычное отождествление $(r, \varphi) \sim (r, \varphi + 2\pi)$ приводит к двулистному отображению. Отождествление

(2) $$(r, \varphi) \sim (-r, \varphi + \pi)$$

естественное в полярных координатах, влечет однолистность.

Итак, целые функции (1) взаимно-однозначно отображают D_1° на E_1. Здесь D_1° — фактор-множество D_1 по эквивалентности (2).

Назовем функцию f ограниченной R-даламберовской, если она голоморфна и ограничена на D_1°. Это значит, что f голоморфна и ограничена на D_1 и удовлетворяет соотношению

(3) $$f(r, \varphi) = f(-r, \varphi + \pi)$$

Область D_1 отличается от односвязной области D_2 тонким множеством $r = 0$. По теореме о стирании особенностей (см. [3], ч. II, п. 19) даламберовская функция будет голоморфна и ограничена на D_2.

Композиция $f^*(x, y) = f(r(x, y), \varphi(x, y))$ очевидным образом голоморфна и ограничена на E_1, и по той же теореме на всем бикруге E_2: $|x| < R$, $|y| < R$.

Пусть, обратно, f^* голоморфна и ограничена на E_1, а следовательно, и на E_2. Замена переменных (1) переведет ее в ограниченную R-даламберовскую функцию на D_1°, а следовательно, и на D_2°. Очевидно, ограниченности достаточно требовать лишь в окрестности особых множеств $r = 0$ или $xy = 0$ (особенность — в нарушении взаимной однозначности отображения (1)). Назовем функцию R-даламберовской, если она ограниченная R'-даламберовская при каждом $R' < R$.

Сформулируем основной результат: замена переменных (1) переводит R-даламберовскую функцию f в функцию f^*, голоморфную на бикруге E_2, и обратно.

Изучим некоторые свойства R-даламберовских функций.

По периодичности f разлагается в ряд Фурье

$$f(r, \varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(r) e^{in\varphi} \tag{4}$$

полуширина сходимости которого зависит от r

$$|v| < \ln |R / r| \tag{5}$$

Отсюда для ограниченных функций $c_n = O(|r|^{|n|})$. Обозначим

$$M = \sup_{\substack{|r|<R \\ v=0}} |f(r, \varphi)|, \quad M_1 = \sup_{|r|<R} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r, \varphi)| d\varphi \tag{6}$$

$$M_2^2 = \sup_{|r|<R} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r, \varphi)|^2 d\varphi, \quad M_1 \leqslant M_2 \leqslant M$$

Поскольку c_n можно представить интегралом вдоль вещественной оси, c_n в круге $|r| < R$ голоморфны и ограничены числом M_1.

Лемма. Пусть функция g в круге $|r| < R$ голоморфна, ограничена числом G и при $r \to 0$ имеет порядок $|r|^n$. Тогда в том же круге справедлива точная оценка

$$|g(r)| \leqslant G |r / R|^n \tag{7}$$

Действительно, при $n = 0$ неравенство постулируется, при $n = 1$ — обращается в лемму Шварца (см. [3], ч. I, п. 35). Обобщение на произвольное n тривиально, что позволяет называть сформулированное утверждение леммой Шварца вне зависимости от значения n.

Из полученных свойств коэффициентов c_n и леммы Шварца вытекает

$$|c_n(r)| \leqslant M_1 |r / R|^{|n|} \tag{8}$$

откуда следует аналог формулы Коши — Адамара

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[|n|]{|c_n(r)|} \leqslant |r / R| \tag{9}$$

Соотношение (3) влечет $c_n(r) = (-1)^n c_n(-r)$, поэтому с учетом (8)

$$c_n(r) = (r / R)^{|n|} \sigma_n(r^2) \tag{10}$$

где функции σ_n в круге $|r| < R$ голоморфны и ограничены числом M_1.

Оценим совокупность коэффициентов с симметричными индексами. Фиксируем n, r_0 и обозначим

$$c_n(r_0) = |c_n(r_0)| e^{i\psi_n}$$

$$B(r) = c_n(r) e^{-i\psi_n} + c_{-n}(r) e^{-i\psi_{-n}}$$

Очевидно

$$B(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \zeta f(r, \varphi) d\varphi, \quad \zeta = e^{i(-n\varphi-\psi_n)} + e^{i(n\varphi-\psi_{-n})}$$

По неравенству Буняковского

$$|B(r)| \leqslant \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(r, \varphi)|^2 d\varphi\right\}^{1/2} \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\zeta|^2 d\varphi\right\}^{1/2}$$

Поскольку $|\zeta|^2 = 2 + 2\cos(2n\varphi + \psi_n - \psi_{-n})$, то при $n \neq 0$ получим $|B(r)| \leqslant M_2\sqrt{2}$ и по лемме Шварца $|B(r)| \leqslant M_2\sqrt{2}\,|r/R|^{|n|}$. Подставляя $r = r_0$ и опуская индекс в силу произвольности r_0, получим окончательно

$$|c_n(r)| + |c_{-n}(r)| \leqslant M_2\sqrt{2}\,|r/R|^{|n|} \quad (n \neq 0) \tag{11}$$

Аналогично можно получить

$$|c_n(r)| + |c_{-n}(r)| < 4M\pi^{-1}\,|r/R|^{|n|} \quad (n \neq 0) \tag{12}$$

В силу голоморфности по r функция f разлагается в ряд Маклорена

$$f(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\varphi) r^k \tag{13}$$

радиус сходимости которого зависит от v:

$$|r| < Re^{-|v|} \tag{14}$$

Интегральные формулы Коши определяют коэффициенты a_k при любом φ. Соответствующая оценка Коши дает для ограниченных функций

$$|a_k(\varphi)| \leqslant M_3(v)\left(\frac{e^{|v|}}{R}\right)^k \tag{15}$$

$$2\pi M_3(v) = \sup \int_0^{2\pi} |f(R'e^{iz}, u + iv)|\,dz \quad (-\infty < u < +\infty,\ 0 < R' < Re^{-|v|})$$

Заметим, что $M_3(v) \leqslant M_0 \equiv \sup\limits_{D_2} |f(r, \varphi)|$. В данном случае $M_0 = M$, поскольку границей Шилова (см. [3], ч. II, п. 6) области D_2 служит цилиндр $|r| = R$, $v = 0$.

Формула (15) показывает, что $a_k(\varphi)$ — тригонометрический многочлен степени не выше k. Из (3) следует

$$a_k(\varphi + \pi) = (-1)^k a_k(\varphi) \tag{16}$$

Поэтому

$$a_k(\varphi) = \sum_{m=0}^{k} a_{km} e^{i(k-2m)\varphi} \tag{17}$$

Другим способом соотношение (17) доказано в [4].

Свойства (8)—(17) распространяются на произвольные R-даламберовские функции. Например, формула (8) тривиальна при $M_1 = \infty$; при $M_1 < \infty$ она устанавливается предельным переходом $R' \to R$. Для получения эффективного неравенства при $M_1 = \infty$ следует заменить R меньшим числом R', а в соотношении (6), определяющем M_1, брать верхнюю грань для $|r| < R'$.

Аналогичные построения можно провести в элементах $x' = r\cos\varphi$, $y' = r\sin\varphi$. В этом случае области D_1, D_2 будут задаваться неравенствами

$$0 < |r|\sqrt{\operatorname{ch} 2v} < R, \quad |r|\sqrt{\operatorname{ch} 2v} < R$$

Областью E_1 будет шар без двух плоскостей $|x'|^2+|y'|^2<R^2$, $x'^2+y'^2\neq 0$; областью E_2 — шар $|x'|^2+|y'|^2<R^2$. Область сходимости рядов (4), (13) увеличится

$$2|v|<\ln\frac{R^2+\sqrt{R^4-|r|^4}}{|r|^2},\quad |r|<\frac{R}{\sqrt{\operatorname{ch}2v}}$$

Поэтому соотношения (4)—(17) останутся справедливыми; оценки можно даже несколько усилить. Например, неравенство (15) можно заменить на

$$|a_k(\varphi)|\leqslant M_3(v)\left(\frac{\sqrt{\operatorname{ch}2v}}{R}\right)^k$$

Укажем простейшие даламберовские функции: 1, r^2, многочлен от r^2, голоморфная в окрестности начала функция от r^2, $r^{|n|}e^{in\varphi}$. (Простейшие не даламберовские функции: r, $\cos n\varphi$.) Даламберовскими функциями будут сумма, разность, частное (если знаменатель не имеет корней в D_2°) и произведение даламберовских функций; сумма ряда даламберовских функций, сходящегося локально-равномерно в D_2°; голоморфная в соответствующей области функция от нескольких даламберовских функций.

Рассмотрим операторы

$$A_1f=r\frac{\partial f}{\partial r},\quad A_2f=\frac{\partial f}{\partial\varphi}$$

$$A_3(f,g)=\frac{1}{r}(f,g)_{r\varphi}\equiv\frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial\varphi}-\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\partial g}{\partial r}\right)$$

$$A_4f(r,\varphi)=\frac{1}{r}\int_0^r f(z,\varphi)\,dz,\quad A_5f(r^2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\varphi)\,d\varphi$$

$$A_6f(r,\varphi)=\int[f(r,\varphi)-A_5f(r^2)]\,d\varphi$$

где постоянная в неопределенном интеграле выбирается из условия $A_5(A_6f)=0$. Операторы A_k переводят множество R-даламберовских функций в себя. Для A_1, A_2, A_3 это вытекает из равенств

$$r\frac{\partial}{\partial r}=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}=x'\frac{\partial}{\partial x'}+y'\frac{\partial}{\partial y'}$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}=i\left(x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y}\right)=-y'\frac{\partial}{\partial x'}+x'\frac{\partial}{\partial y'}$$

$$(fg)_{r\varphi}=-2ir(fg)_{xy}=r(fg)_{x'y'}$$

Для A_4, A_5 — из их ограниченности $\max|A_{4,5}f|\leqslant\max|f|$ и легко проверяемого соотношения (3). Для A_6 — из возможности почленного интегрирования ряда (4). Норма оператора A_6 ограничена

$$\max_{D_2}|A_6f|\leqslant\frac{\pi}{2}\max_{D_2}|f-A_5f|\leqslant\pi\max_{D_2}|f|$$

что непосредственно следует из неравенства Норткотта [5]. Последнее доказано для вещественных функций. Распространение на комплексный случай тривиально.

Пример 1. Истинная аномалия θ элементарно выражается через эксцентрическую φ

$$\theta=\varphi+i\ln\frac{1-re^{i\varphi}}{1-re^{-i\varphi}},\quad r=\frac{\nu}{1+\sqrt{1-\nu^2}}$$

где ν — эксцентриситет. Очевидно, $\theta - \varphi$ — 1-даламберовская функция. Для ее коэффициентов Фурье из (9) следует неравенство

$$\overline{\lim} \sqrt[|n|]{|c_n(r)|} \leqslant |r|$$

В действительности (см. [6], гл. 6, § 6), здесь тождественно по r осуществляется равенство.

Пример 2. Декартовы координаты X_1, X_2, X_3 в эллиптическом движении можно [6] следующим образом выразить через кеплеровы элементы:

$$\begin{aligned}
X_1 + iX_2 &= ae^{i\lambda}e^{i(\varphi-l)}[(1-r_1^2)(1-r_3^2) + r_1^2r_3^2e^{2i(\varphi_1-\varphi_2)}] + \\
&+ ae^{-i\lambda}e^{-i(\varphi-l)}[(1-r_1^2)r_3^2e^{2i\varphi_2} + r_1^2(1-r_3^2)e^{2i\varphi_1}] - \\
&- a(1-r_1^2)r_2e^{i\varphi_2} - ar_1^2r_2e^{i(2\varphi_1-\varphi_2)} \\
iX_3 &= ar_1\sqrt{1-r_1^2}\,\{e^{i\lambda}e^{i(\varphi-l)}[(1-r_3^2)e^{-i\varphi_1} - r_3^2e^{i(\varphi_1-2\varphi_2)}] - \\
&- e^{-i\lambda}e^{-i(\varphi-l)}[(1-r_3^2)e^{i\varphi_1} - r_3^2e^{-i(\varphi_1-2\varphi_2)}] + \\
&+ r_2[e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} - e^{-i(\varphi_1-\varphi_2)}]\} \\
&(r_3 = r_2[2(1+\sqrt{1-r_2^2})]^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Здесь и далее a — большая полуось, λ — средняя долгота, φ и l — эксцентрическая и средняя аномалии, r_1 — синус половины наклона, r_2 — эксцентриситет, φ_1 — долгота восходящего узла, φ_2 — долгота перицентра. Независимыми элементами считаем $a, \lambda, r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2$.

Очевидно, r_3^2 — 1-даламберовская функция от r_2, причем $|r_3|^2 \leqslant |r_2|^2/2$. В [7] доказано, что для любого фиксированного $b \geqslant 1$ функция $\varphi - l$ от трех переменных λ, r_2, φ_2 голоморфна при

$$|r_2|\,e^{|\mathrm{Im}\,\varphi_2|} < 1/\mathrm{ch}\, b, \quad |\mathrm{Im}\,\lambda| \leqslant b - 1$$

причем в этой области $|\mathrm{Im}(\varphi - l)| < 1$.

Итак, при любом $a \in \mathbf{C}$ и λ из полосы $|\mathrm{Im}\,\lambda| \leqslant b - 1$ координаты X_1, X_2, X_3 — ограниченные голоморфные функции, 1-даламберовские относительно r_1, φ_1 и $(1/\mathrm{ch}\, b)$-даламберовские относительно r_2, φ_2.

В меньшей области, не содержащей точек соударения, гамильтониан и возмущающая функция задачи нескольких тел будут даламберовскими относительно пар (r_{1k}, φ_{1k}), (r_{2k}, φ_{2k}), где k — номер планеты.

Заметим, что голоморфность по эксцентриситету при остальных вещественных переменных гарантируется в круге $|r_2| < 1/\mathrm{ch}\,1 = 0.648054$, лежащем внутри круга Лапласа $|r_2| < 0.662743$. Как следует из [7], предел Лапласа достигается лишь при усложнении структуры области задания даламберовских функций: областью Рейнхарта (см. [3], ч. II, п. 2) ограничиться невозможно.

Поступила 30 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пуанкаре А.* Лекции по небесной механике. М., «Наука», 1965.
2. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблема устойчивости движения в классической и небесной механике. Успехи матем. наук, 1963, т. 18, № 6.
3. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М., «Наука», 1969.
4. *Henrard J.* Virtual singularities in the artificial satellite theory. Celest. Mech., 1974, vol. 10, No. 4.
5. *Northcott D. G.* Some inequalities between periodic functions and their derivatives. J. London Math. Soc., 1939, vol. 14, pt 3, No. 55.
6. *Субботин М. Ф.* Введение в теоретическую астрономию. М., «Наука», 1968.
7. *Холшевников К. В.* О поведении основных функций небесной механики в комплексной области. В сб.: Динамика и эволюция звездных систем. Сер. Проблемы исследования Вселенной, вып. 4. М.— Л., 1975.