Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 531.36 + 62—50

ОБ АДАПТИВНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. Р. Гинзбург, А. В. Тимофеев

(Ленинград)

Рассматривается задача стабилизации программных движений механических систем с голономными и неголономными связями при различной степени информированности о параметрах уравнения движения. Вначале синтезируются законы управления, стабилизирующие программные движения в неадаптивном случае, когда параметры уравнения движения известны, а начальные возмущения произвольны. На основе этого строится адаптивное управление, обеспечивающее, спустя время переходного процесса адаптации, близость реального и программного движений. Решение адаптивной задачи основано на использовании предложенного в [1] метода конечно-сходящихся алгоритмов решения систем неравенств. Даются оценки времени переходного процесса в адаптивном и неадаптивном случаях. Обсуждается применение предлагаемых алгоритмов для адаптивной стабилизации программных движений транспортного робота с гусеничным шасси и робота-манипулятора [2–5].

1. Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему, описываемую уравнениями вида

$$A(q, q^{\cdot}, \xi)\, q^{\cdot\cdot} + b(q, q^{\cdot}, \xi) = u \tag{1.1}$$

где q — n-вектор обобщенных координат системы, $q^{\cdot}$, $q^{\cdot\cdot}$ — его первая и вторая производные по времени, u — n-вектор обобщенных сил, играющий роль управления, ξ — r-вектор параметров системы, $A(q, q^{\cdot}, \xi)$ — $n \times n$-неособая матрица-функция, $b(q, q^{\cdot}, \xi)$ — n-вектор-функция. Условия существования и единственности решения для уравнений (1.1) выполнены, так как система (1.1) представляет собой уравнения Лагранжа второго рода, для которых эти условия всегда имеют место. Пусть Q_q, $Q_{q^{\cdot}}$, Q_ξ — ограниченные множества допустимых значений фазовых переменных q, $q^{\cdot}$ и параметров ξ.

Рассмотрим два типа связей между m-вектором z рассматриваемых переменных, связанных с функционированием системы (1.1), и q

$$z = f(q) \tag{1.2}$$

$$z^{\cdot} = f(z, q, q^{\cdot}) \tag{1.3}$$

Связь (1.2) принято называть голономной, а (1.3) — неголономной.

Строго говоря, для правильной записи уравнений движения систем с неголономной связью (1.3) необходимо в аргументы матрицы-функции $A(\cdot)$ и вектор-функции $b(\cdot)$ ввести переменные z и $z^{\cdot}$. Однако для краткости записи это не будет сделано, ибо все дальнейшие рассуждения существенно от этого не зависят и остаются справедливыми.

Примером механической системы с голономной связью служит многозвенный манипулятор [2, 3]. В этом случае вектор q описывает конфигурацию манипулятора (компоненты q — углы между звеньями и т. п.), а z — положение его охвата (компоненты z — координаты и, возможно, направляющие косинусы схвата). Примером механической системы с неголономной связью служит тележка с колесным или гусеничным шасси. В этом случае компоненты q — углы поворота колес или ведущих звездочек гусениц, а компоненты z — декартовы координаты тележки и ее курсовой угол.

Программным движением будем называть вектор-функцию $z_p \equiv z_p(t)$, $t \geqslant t_0$, такую, что функция $q_p(t)$, являющаяся решением уравнений (1.2) или (1.3) при подстановке $z = z_p(t), z^{\cdot} = z_p^{\cdot}(t)$, удовлетворяет условиям

1) $q_p(t) \in Q_q^{\delta_1}, \quad q_p^{\cdot}(t) \in Q_{q^{\cdot}}^{\delta_2} \quad \forall t \geqslant t_0$;

2) $q_p^{\cdot\cdot}(t)$ — кусочно-непрерывна и $\| q_p^{\cdot\cdot}(t) \| \leqslant c_{q^{\cdot\cdot}}$ $\forall t \geqslant t_0$, где $Q_q^{\delta_1} \subset \subset Q_q$, $Q_{q^{\cdot}}^{\delta_2} \subset Q_{q^{\cdot}}$ и расстояние от границ множеств $Q_q^{\delta_1}$ и $Q_{q^{\cdot}}^{\delta_2}$ до границ множеств Q_q и $Q_{q^{\cdot}}$ равно δ_1 и δ_2 соответственно. Положительные параметры δ_1 и δ_2 выбираются далее из соображений обеспечения фазовых ограничений на реальном движении для всех $t \geqslant t_0$.

Замечания. 1°. Обычно $n > m$, т. е. уравнения (1.2) или (1.3) неоднозначно разрешимы относительно q. Эту неоднозначность (кинематическую избыточность системы) можно использовать для удовлетворения некоторым дополнительным условиям (обход препятствий, выбор оптимального $q_p(t)$ по заданному $z_p(t)$ и т. п.). Если $n < m$, то это означает, что часть компонент вектора z — функция остальных и потому может быть отброшена.

2°. Фазовые ограничения можно переформулировать в терминах z (с помощью уравнений связей (1.2) или (1.3)). Именно, $z \in Q_z$, $z^{\cdot} \in Q_{z^{\cdot}}$. Тогда программное движение $z_p(t)$ обязано при всех $t \geqslant t_0$ удовлетворять условиям $z_p(t) \in Q_z^{\delta_3}$, $z_p^{\cdot}(t) \in \in Q_{z^{\cdot}}^{\delta_4}$, $z_p^{\cdot\cdot}(t)$ кусочно-непрерывна и $\| z_p^{\cdot\cdot}(t) \| \leqslant c_{z^{\cdot\cdot}}$.

3°. В определение программного движения входит требование удовлетворения фазовым ограничениям на программном движении с некоторыми «запасами» δ_1 и δ_2. Ниже будут даны формулы для вычисления δ_1 и δ_2 через известные априори параметры и через невязку между реальными и программным движениями в начальный момент времени. Практически выбор программного движения можно осуществлять, например, так: взять функцию, претендующую на роль программного движения, измерить начальную невязку (реальное начальное состояние системы предполагается всегда известным), подсчитать запасы δ_1 и δ_2, с которыми должны удовлетворяться фазовые ограничения, и проверить этот факт для предлагаемой функции при всех $t \geqslant t_0$. Если ограничения выполнены, то принять эту функцию за программное движение. В противном случае подобрать другую функцию с меньшей начальной невязкой и повторить описанную процедуру.

В рассматриваемой схеме программное движение предполагается заданным и удовлетворяющим всем необходимым требованиям.

Цель управления состоит в возможно более точном осуществлении программного движения системы. Если $z_p(t_0) = z(t_0)$, $z_p^{\cdot}(t_0) = z^{\cdot}(t_0)$, $q_p(t_0) = q(t_0)$ и известны значения параметров уравнения движения, то программный закон управления $u_p(t) = A(q_p, q_p^{\cdot}, \xi)\, q_p^{\cdot\cdot} + b(q_p, q_p^{\cdot}, \xi)$ обеспечивает желаемое движение, т. е. реальное движение $z(t)$ совпадает с программным $z_p(t)$ при всех $t \geqslant t_0$. Однако в реальных условиях значения параметров ξ уравнения движения могут быть известны лишь с точностью до принадлежности заданному множеству Q_ξ. Кроме того, обычно имеют место начальные возмущения, т. е. $z(t_0) \neq z_p(t_0)$ и $z^\cdot(t_0) \neq z_p^\cdot(t_0)$. Поэтому воспользоваться программным управлением $u_p(t)$ нельзя.

Задача адаптивной стабилизации программного движения состоит в синтезе закона управления $u = U(q, q^\cdot, z, z^\cdot, t)$ в классе кусочно-непрерывных ограниченных функций, обеспечивающего для любых значений параметров $\xi \in Q_\xi$ и любых заданных начальных возмущений выход системы на программное движение с заданной точностью, начиная с некоторого конечного момента времени $t_* \geqslant t_0$

$$(1.4)\qquad \| z(t) - z_p(t) \| < \varepsilon_1, \ \| z^\cdot(t) - z_p^\cdot(t) \| \leqslant \varepsilon_2, \ \forall t \geqslant t_* \quad \forall \xi \in Q_\xi, \ \varepsilon_1, \ \varepsilon_2 > 0$$

Время $t_* - t_0$, $t_* = t_*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \xi)$ будем называть временем переходного процесса адаптации в смысле целевого условия (1.4).

Сформулированная задача решается в два этапа. Вначале в предположении, что параметры ξ известны, строятся стабилизирующие законы управления, отличные от предложенных ранее [6–8]. Затем на основе этой неадаптивной схемы управления решается адаптивная задача путем сведения к решению системы неравенств относительно параметров искомого закона управления методом конечно-сходящихся алгоритмов, предложенным в [1].

2. Стабилизация программных движений в неадаптивном случае. Предположим, что параметры ξ уравнения движения (1.1) известны. Рассмотрим сначала механические системы с голономной связью вида (1.1), (1.2). Будем строить стабилизирующее управление исходя из того, чтобы разность между реальным и программным движениями $e_z(t) = z(t) - z_p(t)$ или $e_q(t) = q(t) - q_p(t)$ удовлетворяла дифференциальному уравнению невязок

$$(2.1)\qquad e^{\cdot\cdot} = \Gamma_1 e^\cdot + \Gamma_2 e$$

где Γ_1 и Γ_2 — постоянные матрицы, такие, что нулевое решение этого уравнения асимптотически устойчиво.

В общем случае уравнение невязок может быть выбрано из класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, имеющих тривиальное решение и обеспечивающих заданное качество переходного процесса. В описанном варианте выбор матриц Γ_1, Γ_2 (и далее B_1 и B_2) зависит от требований к переходному процессу и производится с помощью известных методов теории линейных дифференциальных уравнений; в частности, эти матрицы могут быть выбраны из некоторых оптимальных соображений.

Нормальная форма уравнения (2.1) имеет вид

$$E^\cdot = \Gamma E, \quad E = \begin{Vmatrix} e \\ e^\cdot \end{Vmatrix}, \quad \Gamma = \begin{Vmatrix} 0 & I \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 \end{Vmatrix}$$

где 0 — нуль-матрица, I — единичная матрица соответствующей размерности. Матрица Γ устойчива; предположим, что ее собственные числа γ_i

имеют единичную кратность. Тогда справедлива оценка

$$\| E(t) \| \leqslant C \| E(t_0) \| \exp[-\gamma(t - t_0)], \quad \gamma = -\max_i \{\operatorname{Re} \gamma_i\} \tag{2.2}$$

где C — положительная постоянная, зависящая от выбора матриц Γ_1 и Γ_2.

В рассматриваемом голономном случае подчиним уравнению невязок (2.1) величину $e_q(t)$. Выберем запасы

$$\delta_1 = \delta_2 = C \| E_q(t_0) \|, \quad E_q(t) = (e_q(t), e_q^{\cdot}(t))^T$$

Теорема 1. Пусть функция $f(q)$ в (1.2) и ее первая производная по времени $f_1(q, q^{\cdot}) \equiv (df/dq) q^{\cdot}$ принадлежат классам Липшица по своим аргументам с постоянными L, L_q, $L_{q^{\cdot}}$ соответственно. Тогда закон управления

$$u = A(q, q^{\cdot}, \xi)[q_p^{\cdot\cdot} + \Gamma_1(q^{\cdot} - q_p^{\cdot}) + \Gamma_2(q - q_p)] + b(q, q^{\cdot}, \xi) \tag{2.3}$$

обеспечивает выполнение условий (1.4), причем для времени переходного процесса справедлива оценка

$$t_* - t_0 < \frac{1}{\gamma} \max\left\{\ln \frac{CL \| E_q(t_0) \|}{\varepsilon_1}, \ \ln \frac{C(L_q + L_{q^{\cdot}}) \| E_q(t_0) \|}{\varepsilon_2}\right\} \tag{2.4}$$

Доказательство. Управление (2.3) очевидным образом кусочно-непрерывно и ограничено. Замкнем этим управлением систему (1.1). Тогда по обратимости матрицы $A(\cdot)$ получим

$$e_q^{\cdot\cdot} = \Gamma_1 e_q^{\cdot} + \Gamma_2 e_q$$

Так как $\| e_q \| \leqslant \| E_q \|$, $\| e^{\cdot}_q \| \leqslant \| E_q \|$, то, учитывая (2.2), получим

$$\left.\begin{matrix} \| q(t) - q_p(t) \| \\ \| q^{\cdot}(t) - q_p^{\cdot}(t) \| \end{matrix}\right\} \leqslant C \| E_q(t_0) \| \exp[-\gamma(t - t_0)]$$

Реальное движение $q(t)$ не выходит из допустимых множеств Q_q и $Q_{q^{\cdot}}$, так как оно не уходит от программного движения дальше, чем на $C \| E_q(t_0) \|$.

Видно, что справедливы оценки

$$\| z(t) - z_p(t) \| \leqslant LC \| E_q(t_0) \| \exp[-\gamma(t - t_0)]$$
$$\| z^{\cdot}(t) - z_p^{\cdot}(t) \| \leqslant C(L_q + L_{q^{\cdot}}) \| E_q(t_0) \| \exp[-\gamma(t - t_0)]$$

Решая систему неравенств

$$LC \| E_q(t_0) \| \exp[-\gamma(t - t_0)] < \varepsilon_1$$
$$C(L_q + L_{q^{\cdot}}) \| E_q(t_0) \| \exp[-\gamma(t - t_0)] < \varepsilon_2, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$$

получим

$$t - t_0 > \frac{1}{\gamma} \max\left\{\ln \frac{CL \| E_q(t_0) \|}{\varepsilon_1}, \ \ln \frac{C(L_q + L_{q^{\cdot}}) \| E_q(t_0) \|}{\varepsilon_2}\right\}$$

Отсюда непосредственно вытекает требуемая оценка (2.4).

Рассмотрим неголономную механическую систему, обобщенные координаты которой z и q связаны уравнениями (1.1), (1.3). В этом случае из близости $q(t)$ и $q_p(t)$ и $q^{\cdot}(t)$ и $q_p^{\cdot}(t)$, вообще говоря, не следует близость между $z(t)$ и $z_p(t)$ и $z^{\cdot}(t)$ и $z_p^{\cdot}(t)$ в смысле (1.4). Поэтому закон управления (2.3), определяемый теоремой 1, не обеспечивает выполнения целевых условий (1.4) для систем с неголономной связью (1.3).

В отличие от голономного случая будем строить управление, стремясь подчинить уравнению невязок (2.1) величину $e_z(t)$. Введем обозначение

$$H(t, \Gamma_1, \Gamma_2) = z_p^{\cdot\cdot} + \Gamma_1(z^{\cdot} - z_p^{\cdot}) + \Gamma_2(z - z_p), \quad E_z = \left\| \begin{matrix} e_z \\ e_z^{\cdot} \end{matrix} \right\| \tag{2.5}$$

Выберем запасы $\delta_3 = \delta_4 = C \| E_z(t_0) \|$.

Лемма 1. Вектор-функция $q_\gamma(t)$, выбранная при $t \geqslant t_0$ из условия

$$\int_{t_0}^{t} H(t, \Gamma_1, \Gamma_2)\, dt + z^{\cdot}(t_0) = f(z, q_\gamma, q_\gamma^{\cdot}) \tag{2.6}$$

$$q_\gamma(t_0) = q(t_0), \quad q_\gamma^{\cdot}(t_0) = q^{\cdot}(t_0)$$

удовлетворяет фазовым ограничениям и обеспечивает выполнение условий

$$\lim \| z(t) - z_v(t) \| = 0, \quad \lim \| z^{\cdot}(t) - z_p^{\cdot}(t) \| = 0, \quad t \to \infty \tag{2.7}$$

а следовательно, и условий (1.4).

Замечание. 4°. Для реальных механических систем уравнения (1.3) или (2.6) имеют единственное решение относительно переменных q (или части этих переменных, если $n > m$). В случаях, когда эти уравнения алгебраически разрешимы относительно $q^{\cdot}$ (что бывает не всегда), численное решение может быть получено одним из стандартных методов. Однако и в случае неразрешимости (как и в рассматриваемом ниже примере) обычно удается с учетом специфики уравнений (1.3) или (2.6) найти решение; функция $q_\gamma^{\cdot\cdot}(t)$ предполагается кусочно-непрерывной, что обычно тоже имеет место при кусочно-непрерывной $z_p^{\cdot\cdot}(t)$.

Доказательство. Из (1.3) и (2.6) имеем

$$z^{\cdot} = \int_{t_0}^{t} H(t, \Gamma_1, \Gamma_2)\, dt + z^{\cdot}(t_0)$$

и дифференцируя по времени

$$z^{\cdot\cdot} = H(t, \Gamma_1, \Gamma_2) = z_p^{\cdot\cdot} + \Gamma_1(z^{\cdot} - z_p^{\cdot}) + \Gamma_2(z - z_p)$$

или $e_z^{\cdot\cdot} = \Gamma_1 e_z^{\cdot} + \Gamma_2 e_z$. В силу (2.2) и (2.6) получим

$$\left. \begin{matrix} \| z(t) - z_p(t) \| \\ \| z^{\cdot}(t) - z_p^{\cdot}(t) \| \end{matrix} \right\} \leqslant C \| E_z(t_0) \| \exp[-\gamma(t - t_0)] \tag{2.8}$$

откуда следуют условия (2.7), а значит, и (1.4). Реальные фазовые переменные z и $z^{\cdot}$ не уходят от программных дальше, чем на $C \| E_z(t_0) \|$, и, следовательно, фазовые ограничения не нарушаются. Этому движению в терминах q соответствует движение $q_\gamma(t)$, которое также не выходит в силу сказанного из допустимых множеств.

Теорема 2. Закон управления

$$u = A(q, q^{\cdot}, \xi) q_\gamma^{\cdot\cdot} + b(q, q^{\cdot}, \xi) \tag{2.9}$$

где $q_\gamma(t)$ выбирается согласно лемме 1, обеспечивает выполнение условия $q(t) = q_\gamma(t)$ при всех $t \geqslant t_0$ и, следовательно, гарантирует выполнение условий (1.4).

Доказательство. Замкнем систему (1.1) управлением (2.9). По обратимости матрицы $A(\cdot)$ получим $q_\gamma^{\cdot\cdot}(t) = q^{\cdot\cdot}(t)$ при всех $t \geqslant t_0$. Интегрируя дважды по времени и учитывая совпадение начальных условий, имеем требуемое. Кусочная непрерывность и ограниченность управления (2.9) проверяется очевидным образом.

Оценим время переходного процесса. Решая неравенство

$$C \| E_z(t_0) \| \exp [-\gamma (t - t_0)] < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

имеем

$$t > t_*, \quad t_* = t_0 + \frac{1}{\gamma} \ln \frac{C \| E_z(t_0) \|}{\varepsilon}$$

Учитывая (2.8), получаем выполнение условий (1.4) с $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, начиная по крайней мере с момента времени t_*.

3. Адаптивная стабилизация программных движений механических систем. Рассмотрим важный для приложений случай, когда значения параметров ξ уравнения движения (1.1) неизвестны. В этом случае воспользоваться законами управления (2.3) и (2.9) нельзя, и возникает необходимость в построении адаптивного управления.

Предположим, что выполнены следующие условия:

1) Уравнение движения (1.1) представимо в виде

$$G(q, q^\cdot, q^{\cdot\cdot}) \tau(\xi) = u \tag{3.1}$$

где $G(\cdot)$ — $n \times N$-матрица-функция, $\tau(\xi)$ — N-вектор.

2) Множество $Q_\tau \equiv \tau(Q_\xi)$ выпукло в R^N.

Рассмотрим неголономную систему (1.1), (1.3) (случай голономной системы (1.1), (1.2) исследуется аналогично).

Закон управления определим формулой

$$u = G[q, q^\cdot, q_\gamma^{\cdot\cdot} + B_1(q^\cdot - q_\gamma^\cdot) + B_2(q - q_\gamma)]\tau_k, \quad t \in (t_k, t_{k+1}] \tag{3.2}$$

где B_1, B_2 — некоторые $n \times n$-матрицы, τ_k — N-вектор, интерпретируемый как оценка неизвестного вектора $\tau(\xi)$ на интервале времени $(t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots$; t_k — определенные ниже моменты коррекции вектора τ. Управление (3.2), очевидно, кусочно-непрерывно и ограничено.

Рассмотрим вспомогательные неравенства

$$\Phi(\tau, \tau_k, t) \equiv \varepsilon_u - \| u - G(q, q^\cdot, q^{\cdot\cdot})\tau \| > 0, \quad \varepsilon_u > 0 \tag{3.3}$$

Очевидно, что неравенства (3.3) разрешимы при $\tau = \tau(\xi)$ с запасом ε_u. Поэтому для их решения применимы конечно-сходящиеся алгоритмы (см. подробнее [1-4]) вида

$$\tau_{k+1} = \begin{cases} \tau_k, & \text{если } \Phi(\tau_k, \tau_k, t) > 0 \\ T[\tau_k, \Phi(\tau_k, \tau_k, t_k')] \end{cases} \tag{3.4}$$

где t_k' — первый момент времени из $(t_k, t_{k+1}]$, такой, что $\Phi(\tau_k, \tau_k, t_k') \leqslant 0$, τ_0 — произвольный N-вектор начального приближения из Q_τ. Эти алгоритмы, называемые алгоритмами адаптации, гарантируют после конечного числа r нарушения неравенств (3.3) и, следовательно, после r коррекций τ в силу (3.4) выполнение (3.3) для всех $t \geqslant t_r$ при $\tau = \tau_r = \mathrm{const}$. Иначе говоря, начиная с некоторого конечного момента времени оценка τ_k вектора τ (ξ) «заморозится», а неравенства (3.3) будут выполнены.

Обозначим через θ время, необходимое для вычисления τ_{k+1} по τ_k согласно (3.4). Тогда, очевидно, $t_{k+1} = t_k' + \theta$. Неравенство (3.3) будет справедливо при $t \in U_k$ $(t_k, t_{k+1} - \theta]$ и нарушено при $t \in U_k$ $(t_{k+1} - \theta, t_{k+1}]$.

Примером рекуррентного конечно-сходящегося алгоритма является алгоритм (3.4) с

$$T[\tau_k, \varphi(\tau_k, \tau_k, t_k')] = P_{Q_\tau}[\tau_k + G_k^T (G_k G_k^T)^{-1} (u(t_k') - G_k \tau_k)] \tag{3.5}$$

$$\tau_0 \in Q_\tau, \quad G_k = G[q_k^{\cdot\cdot}(t_k'), q_k^{\cdot}(t_k'), q^{\cdot\cdot}(t_k')]$$

где P_{Q_τ} — оператор ортогонального проектирования на множество Q_τ. Можно показать, что для числа r коррекций алгоритма (3.4), (3.5) справедлива оценка

$$r \leqslant \frac{\|\tau(\xi) - \tau_0\|^2 C_G^2}{\varepsilon_u^2}, \quad C_G = \sup \|G(\cdot)\| \tag{3.6}$$

Все величины, входящие в левую часть неравенств (3.3), ограничены, поэтому существует положительное число Δ, такое, что

$$\|u - G(q, q^{\cdot}, q^{\cdot\cdot})\tau\| < \Delta, \quad t \geqslant t_0$$

Для дальнейшего потребуется следующая лемма.

Лемма 2. Пусть матрица

$$\Gamma = \begin{Vmatrix} 0 & I \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 \end{Vmatrix}$$

устойчива и ее собственные числа γ_i имеют единичную кратность. Пусть вектор-функция $\eta(t)$, кусочно-непрерывная на $[t_0, \infty)$, удовлетворяет условию

$$\|\eta(t)\| \leqslant \begin{cases} \delta, & t \in [t_0, \infty) \setminus F \\ \Delta, & t \in F \end{cases} \tag{3.7}$$

причем лебегова мера $\mu(F) < \nu$, где δ, Δ, ν — некоторые положительные числа. Тогда для решения уравнения

$$e^{\cdot\cdot} = \Gamma_1 e^{\cdot} + \Gamma_2 e + \eta(t),$$

с начальными данными $e(t_0)$, $e^{\cdot}(t_0)$ справедлива оценка

$$\left.\begin{matrix} \|e(t)\| \\ \|e^{\cdot}(t)\| \end{matrix}\right\} \leqslant C \exp[-\gamma(t - t_0)] \|s_0\| + \frac{C}{\gamma}\delta + C\Delta\nu$$

$$s_0 = (e(t_0), e^{\cdot}(t_0))^T, \quad \gamma = -\max_i \{\mathrm{Re}\, \gamma_i\}$$

(C — некоторая положительная постоянная).

Доказательство леммы 2 тривиально (см., например, [7]).

Из условия 1) и формулы (3.2) следует

$$u = A(q, q^{\cdot}, \xi_k)[q_\gamma^{\cdot\cdot} + B_1(q^{\cdot} - q_\gamma^{\cdot}) + B_2(q - q_\gamma)] +$$
$$+ b(q, q^{\cdot}, \xi_k)$$

где вектор $\xi_k \in Q_\xi$ такой, что $\tau(\xi_k) = \tau_k \in Q_\tau$.

Имеем

$$v - u = A\,(q, q^{\cdot}, \xi_k)\,[q^{\cdot\cdot} - q_\gamma^{\cdot\cdot} - B_1\,(q^{\cdot} - q_\gamma^{\cdot}) - B_2\,(q - q_\gamma)]$$

$$v = G\,(q, q^{\cdot}, q^{\cdot\cdot})\tau_k \equiv A\,(q, q^{\cdot}, \xi_k)\,q^{\cdot\cdot} + b\,(q, q^{\cdot}, \xi_k)$$

Пусть $e_q\,(t) = q\,(t) - q_\gamma\,(t)$. Тогда

$$e_q^{\cdot\cdot} = B_1 e_q^{\cdot} + B_2 e_q + A^{-1}\,(q, q^{\cdot}, \xi_k)\,(v - u),\quad e_q\,(t_0) = e_q^{\cdot}\,(t_0) = 0 \tag{3.8}$$

При этом в силу (3.2)—(3.5) справедлива оценка

$$\| A^{-1}\,(q, q^{\cdot}, \xi_k)\,(v - u)\,\| \leqslant \begin{cases} C_A \varepsilon_u, & t \in [t_0, \infty) \setminus F \\ C_A \Delta, & t \in F \equiv \bigcup\limits_{k=1}^{l} (t_k - \theta, t_k] \end{cases} \tag{3.9}$$

$$C_A = \sup \| A^{-1}\,(\cdot)\,\|,\quad l \leqslant r$$

Очевидно, лебегова мера $\mu\,(F) \leqslant r\theta$.

Пусть матрица

$$B = \begin{Vmatrix} 0 & I \\ B_1 & B_2 \end{Vmatrix}$$

устойчива и ее собственные числа имеют единичную кратность. Тогда применяя лемму 2 к уравнению (3.8) с учетом оценки (3.9), получим

$$\left.\begin{array}{l} \| e_q\,(t)\, \| \\ \| e_q^{\cdot}\,(t)\, \| \end{array}\right\} \leqslant \frac{C_q}{\gamma_q} C_A \varepsilon_u + C_A C_q \Delta r\theta \tag{3.10}$$

Из (3.8)

$$\| e_q^{\cdot\cdot}\,(t)\, \| \leqslant C_q C_A \left(\frac{\varepsilon_u}{\gamma_q} + \Delta r\theta\right)(\| B_1 \| + \| B_2 \|) + \| \eta\,(t)\, \| \tag{3.11}$$

$$\eta\,(t) = A^{-1}\,(q, q^{\cdot}, \xi_k)\,(v - u)$$

Продифференцируем условия (2.6) и (1.3) по времени

$$H\,(t, \Gamma_1, \Gamma_2) = \frac{d}{dt} f\,(z, q_\gamma, q_\gamma^{\cdot}) = \frac{\partial f}{\partial z} z^{\cdot} + \frac{\partial f}{\partial q} q_\gamma^{\cdot} + \frac{\partial f}{\partial q^{\cdot}} q_\gamma^{\cdot\cdot} \equiv$$

$$\equiv f_1\,(z, z^{\cdot}, q_\gamma, q_\gamma^{\cdot}, q_\gamma^{\cdot\cdot})$$

$$z^{\cdot\cdot} = f_1\,(z, z^{\cdot}, q, q^{\cdot}, q^{\cdot\cdot})$$

Предположим, что функция $f_1\,(\cdot)$ принадлежит классу Липшица по q, $q^{\cdot}$ и $q^{\cdot\cdot}$ с постоянными L_q, $L_{q^{\cdot}}$, $L_{q^{\cdot\cdot}}$ соответственно. Тогда, учитывая (2.5), (3.10) и (3.11), получим

$$\| z^{\cdot\cdot} - z_p^{\cdot\cdot} - \Gamma_1\,(z^{\cdot} - z_p^{\cdot}) - \Gamma_2\,(z - z_p)\, \| = \| f_1\,(z, z^{\cdot}, q, q^{\cdot}, q^{\cdot\cdot}) -$$

$$- f_1\,(z, z^{\cdot}, q_\gamma, q_\gamma^{\cdot}, q_\gamma^{\cdot\cdot})\, \| \leqslant L_q \| q\,(t) - q_\gamma\,(t)\, \| + L_{q^{\cdot}} \| q^{\cdot}\,(t) -$$

$$- q_\gamma^{\cdot}\,(t)\, \| + L_{q^{\cdot\cdot}} \| q^{\cdot\cdot}\,(t) - q_\gamma^{\cdot\cdot}\,(t)\, \| \leqslant (L_q + L_{q^{\cdot}} + L_{q^{\cdot\cdot}} \times$$

$$\times (\| B_1 \| + \| B_2 \|)) \left(\frac{C_q}{\gamma_q} C_A \varepsilon_u + C_q C_A \Delta r\theta\right) + L_{q^{\cdot\cdot}} \| \eta\,(t)\, \|$$

Введем обозначения

$$e_z\,(t) = z\,(t) - z_p\,(t)$$

$$(L_q + L_{q^{\cdot}} + L_{q^{\cdot\cdot}} (\| B_1 \| + \| B_2 \|))\left(\frac{C_q}{\gamma_q} C_A \varepsilon_u + C_q C_A \Delta r\theta\right) = K\,(\varepsilon_u, r, \theta)$$

Тогда имеем

$$e_z^{\cdot\cdot} = \Gamma_1 e_z^{\cdot} + \Gamma_2 e_z + \zeta(t)$$

$$\|\zeta(t)\| \leqslant \begin{cases} K(\varepsilon_u, r, \theta) + L_{q^{\cdot\cdot}} C_A \varepsilon_u, & t \in [t_0, \infty) \setminus F \\ K(\varepsilon_u, r, \theta) + L_{q^{\cdot\cdot}} C_A \Delta, & t \in F \equiv \bigcup\limits_{k=1}^{l} (t_k - \theta, t_k] \end{cases}$$

Применяя еще раз лемму 2, получим оценку

$$\left.\begin{array}{l} \|z(t) - z_p(t)\| \\ \|z^{\cdot}(t) - z_p^{\cdot}(t)\| \end{array}\right\} \leqslant C_z \|E_z(t_0)\| \exp[-\gamma_z(t - t_0)] + \Psi(\varepsilon_u, r, \theta)$$

$$\Psi(\varepsilon_u, r, \theta) = \frac{C_z}{\gamma_z}(L_{q^{\cdot\cdot}} C_A \varepsilon_u + K(\varepsilon_u, r, \theta)) + C_z r \theta (L_{q^{\cdot\cdot}} C_A \Delta + K(\varepsilon_u, r, \theta)) \tag{3.12}$$

$$E_z(t_0) = (e_z(t_0), e_z^{\cdot}(t_0))^T$$

Отсюда следует, что рассматриваемое адаптивное управление может обеспечить выполнение (1.4) с $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon > \Psi$. Для того, чтобы реальное движение $z(t)$ удовлетворяло фазовым ограничениям, следует потребовать, чтобы на программном движении $z_p(t)$ эти ограничения были выполнены с запасом $\delta_3 = \delta_4 = C_z \|E_z(t_0)\| + \Psi$.

Оценим время $t_* - t_0$ переходного процесса адаптации. Решая неравенство

$$C_z \|E_z(t_0)\| \exp[-\gamma_z(t - t_0)] + \Psi < \varepsilon, \quad \varepsilon > \Psi$$

получаем, учитывая (3.12)

$$t_* - t_0 < \frac{1}{\gamma_z} \ln \frac{C_z \|E_z(t_0)\|}{\varepsilon - \Psi} \tag{3.13}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1) и 2) и матрица B устойчива с простыми собственными числами. Пусть функция $f_1(\cdot)$ принадлежит классу Липшица по q, $q^{\cdot}$ и $q^{\cdot\cdot}$ с константами L_q, $L_{q^{\cdot}}$ и $L_{q^{\cdot\cdot}}$ соответственно. Пусть также фазовые ограничения на $z_p(t)$ выполнены с запасом $\delta_3 = \delta_4 = C_z \|E_z(t_0)\| + \Psi$. Тогда закон управления (3.2) — (3.5) обеспечивает выполнение условий (1.4) с $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon > \Psi$, причем время переходного процесса адаптации удовлетворяет оценке (3.13).

На практике время переходного процесса адаптации должно быть минимальным. Этого можно достичь оптимальным выбором значений параметров ε_u и θ (характеризующего быстродействие алгоритма (3.4), (3.5)) с целью минимизации правой части неравенства (3.12). Используя неравенство (3.6), заменим число коррекций r его оценкой. Далее, в силу того, что $\partial\Psi / \partial\theta > 0$, возьмем время $\theta = \theta_*$ минимально возможным (исходя из технических ограничений при реализации алгоритма адаптации). После этого выберем $\varepsilon_u^* > 0$ из условия минимизации функции $\Psi(\varepsilon_u, \theta_*)$. Такое ε_u^* существует и единственно, так как $\Psi(\varepsilon_u, \theta_*)$ как функция ε_u

имеет вид

$$\Psi(\varepsilon_u, \theta_*) = \alpha_1\varepsilon_u + \frac{\alpha_2}{\varepsilon_u} + \frac{\alpha_3}{\varepsilon_u^2} + \frac{\alpha_4}{\varepsilon_u^4}, \quad \alpha_i > 0$$

Таким образом, оптимальная оценка времени переходного процесса адаптации при $\varepsilon > \Psi(\varepsilon_u{}^*, \theta_*)$ записывается в виде

$$t_* - t_0 < \frac{1}{\gamma_z} \ln \frac{C_z \| E_z(t_0) \|}{\varepsilon - \Psi(\varepsilon_u{}^*, \theta_*)}$$

В частном случае, когда $\| E_z(t_0) \| = 0$ и $\varepsilon > \Psi(\varepsilon_u{}^*, \theta_*)$, время переходного процесса адаптации обращается в нуль, т. е. условия (1.4) будут выполнены с начального момента времени $t = t_* = t_0$ благодаря адаптивной подстройке параметров τ_k закона управления (3.2) согласно (3.4), (3.5).

4. Примеры. Рассмотрим транспортный робот — самоходную тележку с гусеничным шасси. Уравнения неголономных связей (1.3) (при некоторой степени идеализации) имеют вид

$$x^{\cdot} = \frac{r}{2}(\varphi_1{}^{\cdot} + \varphi_2{}^{\cdot}) \cos\psi, \quad y^{\cdot} = \frac{r}{2}(\varphi_1{}^{\cdot} + \varphi_2{}^{\cdot}) \sin\psi \tag{4.1}$$

$$\psi^{\cdot} = \frac{r}{2l}(\varphi_1{}^{\cdot} - \varphi_2{}^{\cdot}), \quad \varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0) = 0, \quad \psi(t_0) = \psi_0$$

где x, y — декартовы координаты середины оси, на которой находятся ведущие звездочки гусениц, ψ — курсовой угол тележки, φ_1, φ_2 — углы поворотов ведущих звездочек, r — их радиус, l — полубаза тележки. Интегрируя в (4.1) третье уравнение и подставляя результат в первые два, получим

$$\begin{Bmatrix} x^{\cdot} \\ y^{\cdot} \end{Bmatrix} = \frac{r}{2}(\varphi_1{}^{\cdot} + \varphi_2{}^{\cdot}) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \left[\frac{r}{2l}(\varphi_1 - \varphi_2) + \psi_0 \right] \tag{4.2}$$

Таким образом, $z = (x, y)^T$, $q = (\varphi_1, \varphi_2)^T$. Связи (4.2) алгебраически неразрешимы относительно $\varphi_1{}^{\cdot}$ и $\varphi_2{}^{\cdot}$, однако все-таки удается выразить $\varphi_1{}^{\cdot}$ и $\varphi_2{}^{\cdot}$ через переменные z (см. замечание 4°), именно

$$\dot{\varphi}_{1,2} = \frac{1}{r}\left(\sqrt{x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2}} \pm l \frac{y^{\cdot\cdot}x^{\cdot} - y^{\cdot}x^{\cdot\cdot}}{x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2}}\right)$$

Следовательно, связи (4.2) удовлетворяют условиям леммы 1. По виду связей эта система относится к неголономным системам Чаплыгина. Уравнения движения имеют вид (1.1), где $A(\cdot) = A(\xi)$ — постоянная неособая 2×2-матрица, элементы которой зависят от масс, моментов инерции, линейных размеров различных частей тележки, $b(\cdot) = b(q^{\cdot}, \xi)$ — 2-вектор-функция, зависящая от $q^{\cdot}$ и параметров ξ, в которые, кроме уже перечисленных, входят коэффициенты трения (внешнего и внутреннего), $u = (u_1, u_2)^T$ — 2-вектор управляющих моментов. Уравнения движения и связи удовлетворяют требованиям теоремы 3, следовательно, для адаптивной стабилизации программных движений транспортного робота-тележки можно применять построенные выше алгоритмы.

Аналогичные алгоритмы применимы также для адаптивной стабилизации программных движений робота-манипулятора, представляющего собой систему с голономными связями. Подробное изложение решения этой задачи вместе с экспериментальными результатами ее моделирования на ЭВМ содержится в работах [2–4].

Поступила 28 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Якубович В. А.* Конечно сходящиеся алгорифмы решения счетных систем неравенств и их применение в задачах синтеза адаптивных систем. Докл. АН СССР, 1969, т. 189, № 3.
2. *Гусев С. В., Тимофеев А. В., Якубович В. А.* Об одной иерархической системе управления интегральным роботом. Тр. IV Междунар. объединенной конференции по искусственному интеллекту, т. 9. Алгоритмы управления движением и роботы. М., ВИНИТИ, 1975.
3. *Тимофеев А. В., Якубович В. А.* Адаптивное управление программным движением робота-манипулятора. В сб.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М., «Наука», 1976.
4. *Тимофеев А. В., Экало Ю. В.* Устойчивость и стабилизация программных движений робота-манипулятора. Автоматика и телемеханика, 1976, № 10.
5. *Аксенов Г. С., Фомин В. Н.* К задаче об адаптивном управлении манипулятором. В сб.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М., «Наука», 1976.
6. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. М., «Наука», 1975.
7. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. М., «Наука», 1967.
8. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М., «Наука», 1968.