Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 531.36

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ В ЦЕЛОМ САМОНАСТРАИВАЮЩИХСЯ СИСТЕМ С ЭТАЛОННОЙ МОДЕЛЬЮ

В. Р. Носов, Б. И. Прокопов

(Москва)

Устанавливаются достаточные условия асимптотической устойчивости в целом по координатным и параметрическим рассогласованиям для адаптивных систем с эталонной моделью. Применение полученных условий иллюстрируется на примере системы второго порядка.

Одним из основных свойств, которым должна обладать самонастраивающаяся система, является свойство ее асимптотической устойчивости. Важно, чтобы контур самонастройки обеспечивал асимптотическую устойчивость системы не только при малых априори неизвестных изменениях параметров объекта, но и при любых начальных отклонениях, т. е. гарантировал устойчивость системы в целом [1]. При этом следует иметь в виду, что асимптотическая устойчивость адаптивных систем по настраиваемым параметрам зависит от формы управляющих воздействий. Для некоторых видов управляющих воздействий асимптотическая устойчивость по параметрическим рассогласованиям может отсутствовать.

В [2] получены некоторые условия, гарантирующие равномерную асимптотическую устойчивость адаптивной системы с моделью. Однако условий равномерной асимптотической устойчивости в целом в [2] не имеется.

Ниже находятся условия, налагаемые на эталонную модель, контур самонастройки и управляющее воздействие, при которых самонастраивающаяся система будет обладать асимптотической устойчивостью в целом по координатным и параметрическим рассогласованиям.

1. Пусть уравнения системы и эталонной модели имеют вид

$$x^{\bullet}(t) = Ax(t) + [\Delta A + \delta A(t, x, y)]\, x(t) + f(t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1.1}$$

$$y^{\bullet}(t) = Ay(t) + f(t), \quad y(t_0) = y_0 \tag{1.2}$$

Здесь $x(t) \in R^n$, $y(t) \in R^n$ — векторы фазовых координат системы и эталонной модели; A — вещественная, постоянная, устойчивая $n \times n$-матрица; ΔA — вещественная, постоянная $n \times n$-матрица с априори неизвестными коэффициентами, зависящими от объекта управления; $\delta A(t, x, y)$ — $n \times n$-матрица параметров, изменяемых контуром самонастройки. Матрицы A, ΔA и $\delta A(t, x, y)$ имеют вид

$$A = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \ldots a_{n-1} & a_n \end{matrix} \right\| \tag{1.3}$$

$$\Delta A = \left\| \begin{matrix} 0 \ldots 0 \\ \cdots \\ 0 \ldots 0 \\ \Delta a_1 \ldots \Delta a_n \end{matrix} \right\|, \quad \delta A(t, x, y) = \left\| \begin{matrix} 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ \cdots \\ 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ \delta a_1(t, x, y) \ldots \delta a_n(t, x, y) \end{matrix} \right\|$$

Вектор управляющих воздействий имеет вид

$$f'(t) = (0, \ldots, 0, f_n(t))$$

Здесь штрих — знак транспонирования вектора или матрицы.

Рассмотрение систем вида (1.1) и (1.2), представляющих собой матричные записи уравнения n-го порядка, не ограничивает общности рассуждений (всякая линейная система может быть приведена к одному линейному уравнению высокого порядка).

Для вектора координатного рассогласования $\varepsilon(t) = x(t) - y(t)$, вычитая (1.2) из (1.1), получаем уравнение

$$\varepsilon^{\cdot}(t) = A\varepsilon(t) + [\Delta A + \delta A(t, x, y)]\, x(t), \quad \varepsilon(t_0) = \varepsilon_0$$

или в более удобном для дальнейшего виде

$$(1.4) \qquad \varepsilon^{\cdot}(t) = A\varepsilon(t) + X(t)\, \alpha(t, x, y), \quad \varepsilon(t_0) = \varepsilon_0$$

Здесь $X(t)$ — $n \times n$-матрица вида ΔA (1.3), у которой последняя строка совпадает с вектором $x'(t)$; $\alpha(t, x, y)$ — вектор параметрического рассогласования вида

$$\alpha'(t, x, y) = (\Delta a_1 + \delta a_1(t, x, y), \ldots, \Delta a_n + \delta a_n(t, x, y))$$

Рассмотрим контур самонастройки, описываемый уравнением вида

$$(1.5) \qquad \alpha^{\cdot}(t) = -X'(t)\, \Gamma(t, x, y)\, \varepsilon(t), \quad \alpha'(t_0) = \alpha_0' = (\Delta a_1, \ldots, \Delta a_n)$$

Здесь $\Gamma(t, x, y)$ — $n \times n$-матрица положительно-определенная и симметричная, задание которой полностью определяет контур самонастройки.

Необходимость выбора контура самонастройки в виде (1.5) подробно обсуждалась в [1, 2]. Отметим только принципиальное значение независимости правой части (1.5) от неизвестного и неизмеряемого вектора параметрических рассогласований $\alpha(t)$. Отсутствие $\alpha(t)$ в правой части (1.5) вызывает большие трудности при исследовании устойчивости системы (1.4), (1.5).

Поставим задачу: найти достаточные условия асимптотической устойчивости в целом тривиального решения системы уравнений (1.4), (1.5).

Для решения этой задачи воспользуемся одной общей теоремой, к формулировке которой сейчас перейдем.

2. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$(2.1) \qquad z^{\cdot}(t) = F(z, t), \quad F(0, t) \equiv 0, \quad z(t_0) = z_0$$

$$F : R^m \times [0, \infty) \to R^m$$

Здесь F — некоторый нелинейный оператор, удовлетворяющий условиям, при которых справедливы теоремы о локальном существовании и единственности решения задачи (2.1).

Обозначим через $\langle z, y \rangle$ скалярное произведение в R^m, $\| z \|$ — евклидову норму вектора $z \in R^m$ и через $d(z, G)$ — расстояние от вектора $z \in R^m$ до некоторого множества $G \subset R^m$.

Определение. Тривиальное решение системы (2.1) назовем асимптотически устойчивым в целом равномерно по начальным данным, если оно устойчиво равномерно по начальному моменту t_0 и если для любого шара $S_k = \{z \in R^m : \| z \| \leqslant K\}$ и любого числа $\gamma > 0$ найдется такое число $T(\gamma, K) > 0$, что при всех $t \geqslant t_0 + T(\gamma, K)$ будет $\| z(t) \| \leqslant \gamma$ для любых $t_0 \geqslant 0$ и любых $z_0 \in S_k$ [3].

Теорема 1. Пусть существуют две непрерывно-дифференцируемые функции $V(z, t)$ и $W(z, t)$, $V, W : R^m \times [0, \infty) \to R^1$, обладающие в произвольном шаре S_k следующими свойствами:

А) $\omega_1(\| z \|) \leqslant V(z, t) \leqslant \omega_2(\| z \|)$

где $\omega_1(u)$ и $\omega_2(u)$ — непрерывные неубывающие функции, такие, что $\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0, \omega_1(u) > 0, \omega_2(u) > 0, u \neq 0$ и $\omega_1(u) \to \infty$ при $u \to \infty$;

Б) на решениях системы (2.1)

$$V^{\cdot}(t) = \frac{dV}{\partial t} + < \operatorname{grad} V, \quad F > \leqslant \omega_3(z) \leqslant 0$$

где $\omega_3(z)$ — непрерывная неположительная на R^m функция и $O(\omega_3 = 0)$ означает множество из R^m, для которого $\omega_3(z) = 0$;

В) для $0 \leqslant t < \infty$ и всех $z \in S_k$ функция $W(z, t)$ ограничена, $| W(z, t) | \leqslant L(K)$;

Г) для некоторого числа $B > 2L(K)$, всякого $t_* \geqslant t_0 > 0$ и любого числа μ, $0 < \mu < K$, найдутся такие числа $T(B)$, $0 < T(B) < \infty$ и $\rho_0(\mu, B, T(B))$, что

$$W^{\cdot}(t) = \partial W / \partial t + < \operatorname{grad} W, \quad F > = \xi(z, t)$$

удовлетворяет равномерно по $z \in E(\mu, \rho)$ неравенству

$$\left| \int_{t_*}^{t_*+T(B)} \xi(z(s), s)\, ds \right| \geqslant B \tag{2.2}$$

где $0 < \rho < \rho_0(\mu, B, T, (B))$ и $E(\mu, \rho)$ — множество вида

$$E(\mu, \rho) = \{\mu \leqslant \| z \| \leqslant K, \; d(z, O(\omega_3 = 0)) \leqslant \rho\}$$

Тогда тривиальное решение системы (2.1) будет асимптотически устойчиво в целом равномерно по начальным данным.

Теорема 1 представляет собой некоторое усиление известного критерия устойчивости [4]. Требование А можно иначе сформулировать как требование, чтобы функция $V(z, t)$ была определенно-положительной и допускала бесконечно малый высший и бесконечно большой низший пределы. Требования А, Б, В совпадают с соответствующими требованиями теоремы В. М. Матросова. Требование Г слабее соответствующего условия работы [4].

Доказательство теоремы 1 имеет отличие от доказательства теоремы В. М. Матросова [4] только в лемме «о выбрасывании» по терминологии, предложенной в [5]. Приведем поэтому только доказательство этой леммы.

Лемма «о выбрасывании». Возмущенное движение $z(t)$ системы (2.1) не может постоянно оставаться в множестве $E(\mu, \rho)$ в течение времени $T(B)$, где $E(\mu, \rho)$, B и $T(B)$ определены в условии Г теоремы 1.

Доказательство. Допустим, что возмущенное движение $z(t)$ находится в множестве $E(\mu, \rho)$ в течение времени $T(B)$. Тогда, используя (2.2), получим, что

$$(2.3)\qquad |W(z(t+T(B)), t+T(B)) - W(z(t), t)| = \left| \int_{t_*}^{t_*+T(B)} \xi(z(s), s)\, ds \right| \geqslant B$$

Неравенство (2.3) противоречит условию В теоремы 1.

3. Применим теорему 1 для нахождения условий асимптотической устойчивости в целом равномерной по начальным данным тривиального решения системы (1.4), (1.5).

Рассмотрим функцию

$$(3.1)\qquad V(\varepsilon, \alpha, t) = \varepsilon'\Gamma(t, x, y)\,\varepsilon + \alpha'\alpha$$

где матрица $\Gamma(t, x, y)$ та же, что и в уравнении (1.5). Полная производная по времени функции (3.1), вычисленная на решениях системы (1.4), (1.5), равна

$$(3.2)\qquad V^{\cdot}(t) = \varepsilon'(A'\Gamma + \Gamma A + \Gamma^{\cdot})\,\varepsilon$$

Предположим, что для всех $t \geqslant 0$ и произвольного вектора $p \in R^n$ выполнены условия

$$(3.3)\qquad C_1\|p\|^2 \leqslant p'\Gamma(t, x, y)\,p \leqslant C_2\|p\|^2$$

$$(3.4)\qquad p'(A'\Gamma + \Gamma A + \Gamma^{\cdot})\,p \leqslant -C_3\|p\|^2$$

Здесь и в дальнейшем через C_i обозначены положительные постоянные, точные значения которых несущественны.

Из (3.3) можно получить, что

$$(3.5)\qquad \|\Gamma(t, x, y)\| \leqslant C_4$$

Отметим, что существуют, например, постоянные матрицы, удовлетворяющие условиям (3.3) и (3.4) [6].

Покажем, что функция (3.1) удовлетворяет требованиям А и Б теоремы 1. Видно, что

$$(3.6)\qquad C_5(\|\varepsilon\|^2 + \|\alpha\|^2) \leqslant V(\varepsilon, \alpha, t) \leqslant C_6(\|\varepsilon\|^2 + \|\alpha\|^2)$$

$$(C_5 = \min(C_1, 1),\ C_6 = \max(C_2, 1))$$

Таким образом, требование А теоремы 1 выполнено. Требование Б сразу следует из условия (3.4). При этом множество O ($\omega_3 = 0$) — гиперплоскость вида $\varepsilon = 0$ в пространстве R^{2n}.

Функция (3.1) удовлетворяет условиям теоремы К. П. Персидского [3], из которой вытекает, что тривиальное решение системы (1.4), (1.5) устойчиво равномерно по t_0. Из этого следует, что при всех $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, $\|\varepsilon_0\| \leqslant K$, $\|\alpha_0\| \leqslant K$ будет

$$\|\varepsilon(t)\|^2 + \|\alpha(t)\|^2 \leqslant \frac{1}{C_5} V(\varepsilon_0, \alpha_0, t_0) \leqslant \frac{C_6}{C_5} K^2 = D^2(K)$$

или

$$(3.7)\qquad \|\varepsilon(t)\| \leqslant D(K),\quad \|\alpha(t)\| \leqslant D(K)$$

В качестве второй функции $W(\varepsilon, \alpha, t)$ возьмем функцию

$$(3.8)\qquad W(\varepsilon, \alpha, t) = \varepsilon' X(t)\,\alpha$$

Предположим, что вектор управляющих воздействий ограничен, т. е.

$$\|f(t)\| \leqslant F_0, \quad 0 \leqslant t_0 \leqslant t < \infty \tag{3.9}$$

При этом в силу асимптотической устойчивости системы (1.2) вектор $y(t)$ также будет ограниченным при всех $0 \leqslant t_0 \leqslant t < \infty$ и $\|y_0\| \leqslant H$, т. е.

$$\|y(t)\| \leqslant Y \tag{3.10}$$

Поскольку $x(t) = y(t) + \varepsilon(t)$, то, учитывая (3.7) и (3.10), получим, что при $t \geqslant t_0$, $\|\varepsilon_0\| \leqslant K$, $\|\alpha_0\| \leqslant K$, $\|y_0\| \leqslant H$

$$\|x(t)\| = \|X(t)\| \leqslant \|y(t)\| + \|\varepsilon(t)\| \leqslant Y + D(K) = X_1(K) \tag{3.11}$$

Из (3.11) следует, что функция W вида (3.8) будет ограниченной в произвольном шаре S_k так, как

$$|W(\varepsilon, \alpha, t)| \leqslant \|\varepsilon(t)\| \, \|X(t)\| \, \|\alpha(t)\| \leqslant D^2(K) X_1(K) = L(K) \tag{3.12}$$

Полная производная по времени функции (3.8), вычисленная на решениях системы (1.4), (1.5), равна

$$\begin{aligned} W^{\cdot}(t) &= \alpha' X' X \alpha + \varepsilon' (A' X \alpha + X^{\cdot} \alpha - X X' \Gamma \varepsilon) = \langle \alpha, y \rangle^2 + \\ &+ \varepsilon' (A' X \alpha + X^{\cdot} \alpha - X X' \Gamma \varepsilon) + 2 \langle \alpha, y \rangle \langle \alpha, \varepsilon \rangle + \langle \alpha, \varepsilon \rangle^2 \end{aligned} \tag{3.13}$$

поскольку

$$\alpha' X' X \alpha = \langle \alpha, x \rangle^2 = \langle \alpha, y + \varepsilon \rangle^2$$

Все величины в правой части (3.13) вычисляются в один и тот же момент времени t.

Из уравнения (1.5) для любого t и t_*, $t \geqslant t_* \geqslant t_0$ получаем, что

$$\alpha(t) = \alpha(t_*) - \int_{t_*}^{t} X'(s) \Gamma(s, x(s), y(s)) \varepsilon(s) \, ds \tag{3.14}$$

Подставляя (3.14) в (3.13), получим следующее выражение для производной функции $W(\varepsilon, \alpha, t)$:

$$\begin{aligned} W^{\cdot}(t) &= \langle \alpha(t_*), y(t) \rangle^2 + \varepsilon' [A' X \alpha + X^{\cdot} \alpha - X X' \Gamma \varepsilon] + \\ &+ \langle \alpha(t), \varepsilon(t) \rangle^2 + 2 \langle \alpha(t), y(t) \rangle \langle \alpha(t), \varepsilon(t) \rangle + \\ &+ \Big\langle \int_{t_*}^{t} X'(s) \Gamma(s, x(s), y(s)) \varepsilon(s) \, ds, y(t) \Big\rangle^2 - \\ &- 2 \Big\langle \int_{t_*}^{t} X'(s) \Gamma(s, x(s), y(s)) \varepsilon(s) \, ds, y(t) \Big\rangle \langle \alpha(t_*), y(t) \rangle \end{aligned} \tag{3.15}$$

Из уравнения (1.1) и условий (3.7), (3.9) и (3.11) следует, что

$$\begin{aligned} \|X^{\cdot}(t)\| &= \|x^{\cdot}(t)\| \leqslant \|A\| \, \|x(t)\| + \|\alpha(t)\| \, \|x(t)\| + \\ &+ \|f(t)\| \leqslant (\|A\| + D(K)) X_1(K) + F_0 = X_2(K) \end{aligned} \tag{3.16}$$

Предположим теперь, что решение $y(t)$ эталонной модели (1.2) таково, что для любого постоянного вектора $\eta = \alpha(t_*)$, $\eta \in R^n$, $\|\eta\| \geqslant \mu > 0$ и некоторого числа $B > L(K)$ найдется такое $T(B)$, что для любого $t_* \geqslant t_p$

$$\int\limits_{t_*}^{t_*+T(B)} \langle \eta, y(s) \rangle^2 ds \geqslant 3B \tag{3.17}$$

Для справедливости (3.17) необходимо, чтобы компоненты вектора были линейно-независимы на произвольном отрезке $[t_*, t_* + T(B)]$. Кроме того, нужно, чтобы скалярное произведение вектора $y(t)$ на произвольный постоянный вектор η, $\|\eta\| \geqslant \mu > 0$ стремилось не слишком быстро к нулю при $t \to \infty$. Таким образом, условие (3.17) — неявное условие, наложенное на форму управляющего воздействия $f(t)$.

Из (3.15) вытекает, что при всех t, $0 \leqslant t_0 \leqslant t_* \leqslant t \leqslant t_* + T(B)$ равномерно по $\varepsilon(t)$ и $\alpha(t)$, таким, что $\|\varepsilon(t)\| \leqslant \rho$ и $\mu \leqslant \|\alpha(t)\| \leqslant K$, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} W^{\cdot}(t) \geqslant{}& \langle \eta, y(t) \rangle^2 - \rho(\|A\| X_1(K) D(K) + X_2(K) D(K) + \\ &+ X_1^2(K) \|\Gamma\| \rho) - 2\rho D^2(K) Y - \rho^2 D^2(K) - \rho^2 X_1^2(K) \times \\ &\times \|\Gamma\|^2 Y^4 T^2(B) - 2\rho X_1(K) \|\Gamma\| Y^2 D(K) T(B) = \\ &= \langle \eta, y(t) \rangle^2 - \rho N(K, Y, T(B)) \end{aligned} \tag{3.18}$$

В силу (3.17) и (3.18) при любом постоянном векторе $\eta \in R^n$ будет

$$\begin{aligned} \int\limits_{t_*}^{t_*+T(B)} W^{\cdot}(s) ds \geqslant{}& \int\limits_{t_*}^{t_*+T(B)} \langle \eta, y(s) \rangle^2 ds - \\ &- \rho T(B) N(K, Y, T(B)) > 2B > 2L(K) \end{aligned} \tag{3.19}$$

при $B > L(K)$ и $\rho \leqslant \rho_0$, где ρ_0 таково, что $\rho_0 T(B) N(K, Y, T(B)) = {}^1/_2 B$.

Из (3.18) и (3.19) вытекает, что функция $W(\varepsilon, \alpha, t)$ удовлетворяет условию Г теоремы 1.

Используя теперь теорему 1, а также известную теорему об устойчивости при постоянно действующих возмущениях [7], получаем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть A — устойчивая матрица, управляющее воздействие $f(t)$ ограничено и $\|y_0\| \leqslant H$. Пусть решение $y(t)$ эталонной модели удовлетворяет условию (3.17), а матрица $\Gamma(t, x, y)$ — условиям (3.3) и (3.4). Тогда тривиальное решение системы (1.4), (1.5) асимптотически устойчиво в целом равномерно по начальным данным. Кроме того, тривиальное решение системы (1.4), (1.5) устойчиво при постоянно действующих возмущениях.

В приложениях встречаются системы, у которых изменяются не все параметры a_i $(i = 1, \ldots, n)$, а только некоторые из них. В таких системах контур самонастройки должен быть построен так, чтобы регулировать только изменяемые параметры. Условия асимптотической устойчивости в целом для таких систем могут быть получены как следствие теоремы 1.

Пусть эталонная модель описывается уравнением (1.2) и пусть в системе получили постоянные априори неизвестные приращения параметры, стоящие только на $i_1, \ldots, i_k$-м местах. Тогда систему можно описать уравнением

$$x^{\cdot}(t) = Ax(t) + [\Delta A_* + \delta A_*(t, x, y)]\, x_*(t) + f(t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{3.20}$$

где $n \times n$-матрицы ΔA_* и $\delta A_*(t, x, y)$ имеют вид (1.3), причем в последней строке этих матриц ненулевые элементы стоят только на $i_1, \ldots, i_k$-м местах, $k \leqslant n$. Через $x_*(t)$ обозначен $n \times 1$-вектор, у которого компоненты $i_1, \ldots, i_k$ совпадают с соответствующими компонентами вектора $x(t)$, а все остальные компоненты равны нулю.

Вектор координатного рассогласования $\varepsilon(t) = x(t) - y(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon^{\cdot}(t) = A\varepsilon(t) + X_*(t)\, \alpha(t, x, y), \quad \varepsilon(t_0) = \varepsilon_0 \tag{3.21}$$

где $\alpha_*'(t, x, y)$ — $1 \times n$-вектор параметрического рассогласования, совпадающий с последней строкой матрицы $\Delta A_* + \delta A_*(t, x, y)$; $X_*(t)$ — $n \times n$-матрица, все строки которой, кроме последней, состоят из нулей, а последняя строка совпадает с вектором $x_*'(t)$.

Алгоритм самонастройки примем в виде

$$\begin{gathered} \alpha_*^{\cdot}(t) = -X_*'(t)\, \Gamma(t, x, y)\, \varepsilon(t) \\ \alpha_*'(t_0) = \alpha_{0*}' = \{\Delta A_*\}_n \end{gathered} \tag{3.22}$$

К системе (3.21), (3.22) применим теорему 1. Все условия теоремы 1 сохраняются в прежнем виде, кроме условия (3.17), которое в данном случае принимает следующую форму. Для любого $t_* \geqslant t_0 \geqslant 0$ и любого вектора η_*, $\| \eta_* \| \geqslant \mu > 0$, у которого компоненты, кроме $i_1, \ldots, i_k$-й, равны нулю, вектор эталонной модели $y(t)$ должен быть таким, что

$$\int_{t_*}^{t_*+T(B)} \langle \eta_*, y(s) \rangle^2 ds = \int_{t_*}^{t_*+T(B)} \langle \eta_*, y_*(s) \rangle^2 ds \geqslant 3B \tag{3.23}$$

где $y_*(s)$ — вектор, у которого $i_1, \ldots, i_k$-я компоненты совпадают с компонентами вектора $y(s)$, а остальные компоненты равны нулю. Таким образом, в рассматриваемом случае условие (3.17) заменяется на более слабое условие (3.23).

Условия асимптотической устойчивости системы (3.21), (3.22) можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть выполнены все условия теоремы 1, кроме условия (3.17), которое заменяется на (3.23). Тогда тривиальное решение системы (3.21), (3.22) асимптотически устойчиво в целом равномерно по начальным данным.

4. Поясним на примере, насколько ограничительными являются условия (3.17) и (3.23).

Пусть эталонная модель имеет вид (4.1), а система описывается уравнением вида (4.2)

$$y^{\cdot\cdot}(t) + 2\delta y^{\cdot}(t) + ay(t) = f(t), \quad y(t_0) = y_0, \; y^{\cdot}(t_0) = y_1 \tag{4.1}$$

$$\begin{gathered} x^{\cdot\cdot}(t) + 2[\delta + \alpha_1(t, x, y)]\, x^{\cdot}(t) + [a + \alpha_0(t, x, y)]\, x(t) = \\ = f(t) \end{gathered} \tag{4.2}$$

Уравнение (4.1) будет асимптотически устойчивым, если $\delta > 0$ и $a > 0$.

Пусть $f(t) \equiv 1$, тогда решение уравнения (4.1) имеет вид $y(t) = a^{-1} + \beta_1 y_1(t) + \beta_2 y_2(t)$, $y^{\cdot}(t) = \beta_1 y_1^{\cdot}(t) + \beta_2 y_2^{\cdot}(t)$.

Здесь $y_1(t)$, $y_2(t)$ — два линейно-независимых решения уравнения (4.1), а β_1 и β_2 — постоянные, определяемые начальными условиями. Очевидно, что

$$|y_1(t)| + |y_1^{\cdot}(t)| \leqslant C_7 \exp(-C_9 t), \quad C_7, C_9 > 0$$
$$|y_2(t)| + |y_2^{\cdot}(t)| \leqslant C_8 \exp(-C_{10} t), \quad C_8, C_{10} > 0$$

Возьмем произвольный вектор $\eta' = (\eta_1, \eta_2)$, $\eta_1^2 + \eta_2^2 \geqslant \mu^2$ и рассмотрим скалярное произведение $\langle \eta, y(t) \rangle = \eta_1 y(t) + \eta_2 y^{\cdot}(t)$. Если $\eta_1 = 0$ и $\eta_2 = \mu$, то

$$\int_{t_*}^{t_*+T(B)} \eta_2^2 (y^{\cdot}(s))^2 ds \leqslant \mu^2 \int_0^\infty (\beta_1 y_1^{\cdot}(s) + \beta_2 y_2^{\cdot}(s))^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2\mu^2 \int_0^\infty (\beta_1^2 (y_1^{\cdot}(s))^2 + \beta_2^2 (y_2^{\cdot}(s)))^2 ds \leqslant 2\mu^2 \left(\frac{\beta_1^2 C_7^2}{2C_9} + \frac{\beta_2^2 C_8^2}{2C_{10}} \right)$$

Таким образом, в этом случае условие (3.17) не выполняется для достаточно больших чисел B. Асимптотической устойчивости в целом по всем регулируемым параметрам в системе (4.2) с эталонной моделью (4.1) может не быть.

Если же система имеет вид

$$x^{\cdot\cdot}(t) + 2\delta x^{\cdot}(t) + [a + \alpha_0(t, x, y)]x(t) = f(t) \tag{4.3}$$

то можно воспользоваться теоремой 3. Тогда при $f(t) \equiv 1$ условие (3.23) будет выполнено, поскольку для любого t_*, η_*, $\|\eta_*\| \geqslant \mu > 0$ и любого $B > 0$

$$\int_{t_*}^{t_*+T(B)} \langle \eta_*, y_*(s) \rangle^2 ds = \int_{t_*}^{t_*+T(B)} \eta_1^2 y^2(s) ds \geqslant \mu^2 \frac{1}{a} T(B) \geqslant 3B$$

при $T(B) \geqslant 3Ba/\mu^2$. Таким образом, асимптотическая устойчивость по параметру α_0 в данном случае будет иметь место.

Пусть теперь

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{k} (A_k \sin \omega_k t + B_k \cos \omega_k t), \quad \omega_k \neq 0 \tag{4.4}$$

Тогда решение уравнения (4.1) имеет вид

$$y(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (E_k \sin \omega_k t + D_k \cos \omega_k t) + \beta_3 y_1(t) + \beta_4 y_2(t)$$
$$E_k = \frac{A_k (a - \omega_k^2) + 2B_k \delta \omega_k}{(a - \omega_k^2)^2 + 4\delta^2 \omega_k^2}, \quad D_k = \frac{B_k (a - \omega_k^2) - 2A_k \delta \omega_k}{(a - \omega_k^2)^2 + 4\delta^2 \omega_k^2}$$

Видно, что условие (3.17) принимает в этом случае вид

$$\int_{t_*}^{t_*+T(B)} (\eta_1 y(s) + \eta_2 y^{\cdot}(s))^2 ds = \tag{4.5}$$
$$= \frac{T(B)}{2} (\eta_1^2 + \eta_2^2) \sum_{k=1}^{n} (E_k^2 + D_k^2) + g(t_*, T(B), \eta_1, \eta_2, \beta_3, \beta_4)$$

где $g(t_*, T(B), \eta_1, \eta_2, \beta_3, \beta_4)$ — ограниченная функция для всех $t_* \geqslant 0$, $T(B) > 0$ и всех ограниченных η_1, η_2, β_3, β_4. Из (4.5) следует, что решение $y(t)$ уравнения (4.1) при воздействии (4.4), таком, что $A_1^2 + B_1^2 + \ldots + A_n^2 + B_n^2 > 0$, будет удовлетворять условию (3.17).

По теореме 1 получаем, что в этом случае имеет место асимптотическая устойчивость в целом по всем регулируемым параметрам и по координатному рассогласованию.

Авторы благодарят В. Б. Колмановского за обсуждение результатов.

Поступила 18 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петров Б. Н., Рутковский В. Ю., Крутова И. Н., Земляков С. Д.* Принципы построения и проектирования самонастраивающихся систем управления. М., «Машиностроение», 1972.
2. *Земляков С. Д., Рутковский В. Ю.* Синтез систем координатно-параметрического управления на основе беспоисковых самонастраивающихся систем с эталонной моделью. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973, № 2.
3. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.
4. *Матросов В. М.* Об устойчивости движения. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
5. *Rouche N., Mawhin J.* Equations differentielles ordinaires, vol. 2, Paris, Mason et Cie, 1973.
6. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
7. *Гермаидзе В. Е., Красовский Н. Н.* Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях. ПММ, 1957, т. 21, вып. 6.