Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 531.36

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ НА ЗАДАННОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ

К. А. Абгарян, В. Т. Аванян

(Ереван)

Рассматривается задача об устойчивости на бесконечном интервале времени в постановке [1], применимой и на конечном интервале времени. Делаются некоторые сравнения с постановкой по Ляпунову. Получено достаточное условие асимптотической устойчивости, необходимое и достаточное условие устойчивости для линейной однородной автономной системы, достаточные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости для нелинейной автономной системы.

1. Рассматривается задача об устойчивости в следующей постановке [1].

Определение 1.1. Невозмущенный процесс называется устойчивым, если в заданном классе K_Δ^ω существует такая матрица $G(t)$, что при достаточно малом $\rho > 0$ любое возмущение $x(t)$ процесса, начальное значение $x(t_0) = x_0$ которого удовлетворяет условию

$$(G^{-1}(t_0)\,x_0,\ G^{-1}(t_0)\,x_0) \leqslant \rho^2 \tag{1.1}$$

для всех $t > t_0$ удовлетворяет условию

$$(G^{-1}(t)\,x(t),\ G^{-1}(t)\,x(t)) \leqslant \rho^2 \tag{1.2}$$

Под классом K_Δ^ω подразумевается совокупность $n \times n$-матриц $G(t) = (G_1(t), \ldots, G_n(t))$ над полем комплексных чисел, удовлетворяющих на $[t_0, \infty)$ условиям: $|\det G(t)| \neq 0$, эрмитова норма столбцов $G_1(t), \ldots, G_n(t)$ совпадает с заданной положительной функцией $\omega(t)$, т. е. $\| G_j(t) \| = \omega(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Определение 1.2. Невозмущенный процесс называется асимптотически устойчивым на $[a, \infty)$, если он устойчив на $[a, \infty)$ и для любого $t_0 \in [a, \infty)$ существует такое $\rho = \rho(t_0) > 0$, что все возмущения $x(t)$ процесса, удовлетворяющие условию (1.1), обладают свойством $\lim \| x(t) \| = 0$ при $t \to \infty$.

Ниже приводятся некоторые условия устойчивости на неограниченном интервале и асимптотической устойчивости движения в данной постановке.

2. Рассмотрим уравнение

$$dx/dt = X(t, x) \tag{2.1}$$

$$X(t, x) \in C_{t,x}^{(0,1)}(Z), \quad Z = I \times D, \quad I = \{a < t < \infty\}$$

Здесь D — открытая область в общем случае комплексного n-мерного векторного пространства R^n, а X и x — столбцевые матрицы типа $n \times 1$, причем $X(t, 0) \equiv 0$.

Отметим, что при ограниченной функции $\omega(t)$: а) система неустойчива в рассматриваемой постановке, если имеет хотя бы одно неограниченное на I решение, берущее начало в достаточно малой окрестности начала координат; б) если система устойчива, то каждое ее решение, берущее начало в достаточно малой окрестности начала координат, ограничено на I.

Следующий пример показывает, что ограниченность решений системы не достаточна для ее устойчивости.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{t-b}{\sigma^2}x, \quad \sigma = \mathrm{const} > 0$$

тривиальное решение которого ($x \equiv 0$) устойчиво по Ляпунову. Нетривиальное решение имеет вид

$$x(t) = \frac{c}{\sigma}E(t), \quad E(t) = \exp\left[-\frac{(t-b)^2}{2\sigma^2}\right]; \quad x(t_0) = \frac{c}{\sigma}E(t_0) \quad (t_0 < b)$$

В случае скалярного дифференциального уравнения ρ_ω-трубки имеют вид

$$V(t, x) \equiv \omega^{-2}(t)\,|x|^2 \leqslant \rho^2$$

При $|c| \leqslant \sigma\rho E^{-1}(t_0)$ и $\omega(t_0) = 1$ получим $V(t_0, x(t_0)) = |x(t_0)|^2 \leqslant \rho^2$, а например

$$V(b, x(b)) = \frac{1}{\omega^2(b)}\rho^2 \exp\frac{(t_0-b)^2}{\sigma^2}$$

Отсюда видно, что в зависимости от $\omega^2(b)$ в окрестности точки $t = b$ величина $V(t, x(t))$ может превышать ρ^2, хотя и имеет место ограниченность $x(t)$ на интервале $[t_0, \infty)$.

Этот пример показывает, что система, устойчивая по Ляпунову, может не обладать свойством устойчивости в смысле определения 1.1.

Покажем, что из устойчивости в рассматриваемой постановке всегда следует устойчивость по Ляпунову.

Пусть $\omega(t) \leqslant \omega_0$ и система (2.1) устойчива в смысле определения 1.1. Тогда каждое ее решение, удовлетворяющее условию (1.1), удовлетворяет условию (1.2). Из (1.2) в силу неравенства $\lambda_i(H(t)) \geqslant (\sqrt{2}\omega_0)^{-1}$ $(t_0 \leqslant t < \infty)$ (см. [2]), где $H(t) = G^{-1*}(t)\,G^{-1}(t)$ для всех $t > t_0$, имеем неравенство $\|x(t)\| < (\sqrt{2}\omega_0)^{1/2}\rho$. Пусть ε — сколь угодно малое положительное число. При $\rho < \varepsilon(\sqrt{2}\omega_0)^{-1/2}$ будем иметь $\|x(t)\| < \varepsilon$ для всех решений, начальные значения которых удовлетворяют условию $\|x(t_0)\| < \sqrt{\varepsilon} = \delta$. Это означает, что система устойчива по Ляпунову.

Далее заданная положительная функция $\omega(t)$ рассматривается как постоянное число.

3. Рассмотрим систему (A — постоянная $n \times n$-матрица)

(3.1) $\qquad dx/dt = Ax$

Теорема 3.1. Система (3.1) асимптотически устойчива, если все характеристические корни λ_j $(j = 1, \ldots, n)$ матрицы A обладают отрицательными вещественными частями.

Доказательство. Пусть $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$ $(j = 1, \ldots, n)$. Тогда для любой положительно-определенной эрмитовой матрицы $W = \mathrm{const}$ существует такая положительно-определенная эрмитова матрица $H = \mathrm{const}$, что

(3.2) $\qquad A^*H + HA = -2W$

Решение уравнения (3.2) относительно H имеет вид

$$H = 2\int_0^\infty e^{A^*\tau} W e^{A\tau}\, d\tau$$

при любом W (см., например, [3]). Выберем W так, чтобы для H имело место

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} = \omega^2$$

где μ_i $(i = 1, \ldots, n)$ — собственные значения эрмитовой матрицы H. Следовательно, используя лемму из [4], матрицу H можно представить в виде $H = K^{-1*}K^{-1}$, где для столбцов матрицы $K = (K_1, \ldots, K_n)$ выполняется равенство $\| K_j \| = \omega$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Функция $V(x) = (Hx, x)$ определяет ρ_ω-трубку

$$V(x) \equiv (K^{-1}x, K^{-1}x) = \rho^2$$

так как $K \in K_\Delta{}^\omega$. Ее производная по t в силу системы (3.1) представляется в виде $V^\bullet(x) = -2(Wx, x)$. При $x(t) \not\equiv 0$ на $[a, \infty)$ имеем $V^\bullet(x(t)) < 0$, откуда для всех $t > a$ будет $V(x(t)) \leqslant V(x(a))$. Из этого неравенства следует устойчивость системы (3.1).

С другой стороны, так как каждое решение системы (3.1) имеет вид

$$x(t) = \sum_{j=1}^{m} e^{\lambda_j t} P_i(t) \quad (m \leqslant n)$$

где $P_j(t)$ $(j = 1, \ldots, m)$ — полиномальные матрицы, то

$$\lim_{t\to\infty} \| x(t) \| = 0$$

что и доказывает теорему. Теорема обратима.

Теорема 3.2. Система (3.1) устойчива тогда и только тогда, когда все характеристические корни λ_j $(j = 1, \ldots, n)$ матрицы A обладают неположительными вещественными частями, т. е. $\operatorname{Re} \lambda_j \leqslant 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, где знак равенства имеет место, лишь если соответствующие элементарные делители простые.

Доказательство. Допустим, что $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ — собственные значения матрицы A, отвечающие различным клеткам Жордана, а преобразование $x = Ky$ приводит уравнение (3.1) к виду

$$dy / dt = I(\lambda) y, \quad I(\lambda) = \operatorname{diag}\{I_1(\lambda_1), \ldots, I_p(\lambda_p)\} \tag{3.3}$$

Необходимость. Пусть система (3.1) устойчива. Из существования собственного значения λ_s матрицы A, такого, что $\operatorname{Re} \lambda_s > 0$ или $\operatorname{Re} \lambda_s = 0$ и соответствующий элементарный делитель имеет степень $K_s > 1$, следует, что система (3.1) имеет неограниченное решение. А так как это противоречит условию устойчивости системы (3.1), то необходимость доказана.

Достаточность. Пусть λ_j $(j = 1, \ldots, q;\ q < p)$ — все характеристические корни матрицы A, которым отвечают различные клетки Жордана и $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$, a λ_s $(s = q + 1, \ldots, p)$ — все характеристические корни матрицы A, где $\operatorname{Re} \lambda_s = 0$, причем все λ_s допускают лишь простые элементарные делители. Тогда столбцевую матрицу $y(t)$ в (3.3) можно разбить на два блока так, чтобы число в первом блоке равнялось $r = k_1 + k_2 + \ldots + k_q$ (k_j — порядок клетки $I_j(\lambda_j)$), после чего система (3.3) расщепляется на две независимые подсистемы

$$(3.4) \qquad dy^{(1)}/dt = My^{(1)}, \quad dy^{(2)}/dt = \Lambda y^{(2)}$$

$$M = \operatorname{diag}\{I_1(\lambda_1), \ldots, I_q(\lambda_q)\}, \quad \Lambda = \operatorname{diag}\{I_{q+1}(\lambda_{q+1}), \ldots, I_p(\lambda_p)\}$$

Для первой системы (3.4) выполняются все условия теоремы 3.1, поэтому она устойчива, т. е. существует матрица $G_1(t) \in K_\Delta{}^\omega$, такая, что вдоль решения $y^{(1)}(t)$ из

$$(3.5) \qquad V_1(y^{(1)}(t_0)) \leqslant \rho_1{}^2$$

для всех $t > t_0$ следует ($\rho_1 > 0$ — произвольное достаточно малое число)

$$(3.6) \qquad V_1(y^{(1)}(t)) = (H_1 y^{(1)}, y^{(1)}) \leqslant$$

$$\leqslant \rho_1{}^2 \left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \mu_i{}^{-1}(H_1) = \omega^2\right), \quad H_1 = G_1^{-1*} G_1{}^{-1}$$

Возьмем функцию (H_2 — квадратная матрица порядка $n - r$)

$$(3.7) \qquad V_2(\eta(t)) \equiv (H_2\eta(t), \eta(t)) = \omega^{-2} \|\eta(t)\|^2$$

$$H_2 = \operatorname{diag}\{\omega^{-2}, \ldots, \omega^{-2}\}$$

Ее производная по t в силу второй системы (3.4) имеет вид

$$V_0{}^\bullet(y^{(2)}(t)) = 2\omega^{-2} \sum_{k=1}^{n-r} \operatorname{Re}\lambda_{q+k} |y_{q+k}|^2$$

Отсюда получаем, что $V_2{}^\bullet(y^{(2)}(t)) = 0$ на $[t_0, \infty)$. Это означает, что при выборе начального значения $y^{(2)}(t_0)$ столь малым, чтобы

$$(3.8) \qquad V_2(y^{(2)}(t_0)) \leqslant \rho_2{}^2$$

для всех $t > t_0$ будем иметь

$$(3.9) \qquad V_2(y^{(2)}(t)) \leqslant \rho_2{}^2$$

($\rho_2 > 0$ — произвольное, достаточно малое), т. е. вторая система (3.4) также устойчива.

Произвольное решение $y(t)$ системы (3.3) имеет вид

$$(3.10) \qquad y(t) = \begin{Vmatrix} y^{(1)}(t) \\ y^{(2)}(t) \end{Vmatrix}$$

где $y^{(1)}(t)$, $y^{(2)}(t)$ — решения первой и второй системы (3.4) соответственно.

Возьмем функцию $V(y(t)) = (Hy(t), y(t))$, где $H = \operatorname{diag}\{H_1 H_2\}$ и $n^{-1}[\mu_1{}^{-1}(H) + \ldots + \mu_n{}^{-1}(H)] = \omega^2$, определяющую ρ_ω-трубку: $V(y) \equiv (Hy, y) = \rho^2$. Вдоль решения (3.10) в силу (3.5) и (3.8) в начальный момент имеем

$$V(y(t_0)) = V_1(y^{(1)}(t_0)) + V_2(y^{(2)}(t_0)) \leqslant \rho^2 \quad (\rho^2 = \rho_1{}^2 + \rho_2{}^2)$$

а в силу (3.6) и (3.9) для всех $t > t_0$

$$V(y(t)) = V_1(y^{(1)}(t)) + V_2(y^{(2)}(t)) \leqslant \rho^2$$

(при выборе ρ_1 и ρ_2 достаточно малыми $\rho > 0$ также будет достаточно мало). Теорема доказана.

4. *Критерии устойчивости по первому приближению.* Пусть дифференциальное уравнение имеет вид

$$dx/dt = Ax + f(x), \quad f(x) = \mathrm{col}\,(f_1(x), \ldots, f_n(x)) \tag{4.1}$$

где A — постоянная $n \times n$-матрица, а функции $f_s(x) = f_s(x_1, \ldots, x_n)$ $(s = 1, \ldots, n)$ в области $\|x\| \leqslant L < \infty$ разлагаются в ряд по степеням $x_1, \ldots, x_n$, первые члены которого не ниже второго порядка. В дальнейшем будем иметь дело еще с уравнением первого приближения системы (4.1)

$$dx/dt = Ax \tag{4.2}$$

Теорема 4.1. Система (4.1) будет асимптотически устойчива, если все характеристические корни матрицы A обладают отрицательными вещественными частями.

Доказательство. Пусть $\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, тогда в силу теоремы 3.1 система (4.2) асимптотически устойчива.

Возьмем функцию

$$V(x) \equiv (Hx, x) \equiv (K^{-1}x, K^{-1}x)$$

построенную в теореме 3.1. Ее производная по t в силу системы (4.1) имеет вид

$$V^{\bullet}(x(t)) = -2(Wx, x) + (Hx, f(x)) + (Hf(x), x) \tag{4.3}$$

Так как в выражении $(Hx, f(x)) + (Hf(x), x)$ первые члены не ниже третьего порядка, то функция (4.3) при достаточно малых x $(\|x\| \leqslant h < L)$ будет отрицательно-определенной на $[a, \infty)$ для любых функций $f_s(x)$ $(s = 1, \ldots, n)$. Следовательно, для всех $t > t_0 \geqslant a$ выполняется неравенство $V(x(t)) \leqslant V(x(t_0))$, а это означает, что система (4.1) устойчива.

Покажем, что при этом

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0 \tag{4.4}$$

Действительно, из (4.3) следует, что функция $V(x(t))$ — монотонно убывающая, и поэтому при $t \to \infty$ имеем $V(x(t)) \to \nu \geqslant 0$. Следовательно, при всех $t > t_0$

$$V(x(t)) > \nu \tag{4.5}$$

Докажем, что $\nu = 0$. Пусть $\nu \neq 0$. Так как функция $V(x(t))$ положительно-определенная, $\nu > 0$. В силу непрерывности функции $V(x(t))$ из (4.5) вытекает $\|x(t)\| \geqslant \beta > 0$. Однако, поскольку форма (4.3) отрицательно-определенная при $\|x(t)\| \geqslant \beta > 0$, имеет место неравенство $V^{\bullet}(x(t)) \leqslant -\gamma < 0$ на $[t_0, \infty)$. Следовательно, при всех $t > t_0$

$$V(x(t)) \leqslant V(x(t_0)) - \gamma(t - t_0)$$

что, очевидно, невозможно. Значит, $\lim_{t\to\infty} V(x(t)) = 0$, откуда вследствие знакоопределенности формы $V(x(t))$ вытекает (4.4), что и доказывает теорему.

Теорема 4.2. Система (4.1) неустойчива, если среди характеристических корней матрицы A имеется хотя бы один с положительной вещественной частью.

Доказательство. Система (4.1) не может быть устойчивой, так как при ограниченной функции $\omega(t)$ из устойчивости в смысле определения 1.1 следовала бы устойчивость по Ляпунову, а при условии теоремы система (4.1) неустойчива по Ляпунову (см., например, [5]).

Поступила 15 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абгарян К. А.* Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем. М., «Наука», 1973.
2. *Абгарян К. А.* К теории устойчивости процессов на заданном промежутке времени. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
3. *Далецкий Ф. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., «Наука», 1970.
4. *Абгарян К. А., Аванян В. Т.* К теории устойчивости процессов на заданном промежутке времени. Тр. Моск. авиац. ин-та, 1975, вып. 339.
5. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.