Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 531.011

ВЫНУЖДЕННЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ В НЕГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Л. Д. Акуленко

(Москва)

Методом последовательных приближений строится основное резонансное решение нелинейной системы с одной степенью свободы, более общей, чем рассмотренные в [1–3], без сведения к системе с вращающейся фазой [4]. Такой подход представляет методический интерес и обладает преимуществом физической наглядности. На основании первого метода Ляпунова [5] исследуется устойчивость возмущенного движения. Теоремы существования и устойчивости резонансного решения имеют конструктивный характер, а достаточные условия получены в компактной наглядной форме и в ряде случаев находятся явно при помощи интегралов невозмущенного уравнения.

Рассматривается важный частный случай системы с одной степенью свободы и проводится расчет конкретного примера.

1. Постановка задачи. Рассматривается система с одной степенью свободы, описываемая уравнением

$$x^{\cdot\cdot} + Q(x, x^{\cdot}) = \varepsilon q(t, x, x^{\cdot}, \varepsilon) \tag{1.1}$$

Здесь x — обобщенная координата, $x^{\cdot} = dx / dt$ — скорость, $\varepsilon \geqslant 0$ — малый параметр.

Предполагается, что невозмущенное уравнение

$$x_0^{\cdot\cdot} + Q(x_0, x_0^{\cdot}) = 0 \tag{1.2}$$

допускает полное семейство периодических решений. К ним будут относиться: а) колебательные движения: $x_0 = \varphi(\psi, a)$, $x_0^{\cdot} = \omega\varphi_\psi'(\psi, a)$; б) вращательные движения: $x_0 = \psi + \eta(\psi, a)$, $x_0^{\cdot} = \omega[1 + \eta_\psi'(\psi, a)]$. Здесь φ, η — некоторые периодические функции фазы $\psi = \omega(a)(t + \tau)$ периода 2π и постоянной интегрирования a (a — первый интеграл уравнения (1.2), τ — фазовая постоянная, $\omega(a)$ — собственная частота колебаний или вращений).

Из (1.2) следует, что для рассматриваемого вида движений «работа внутренних сил» за период $T_0 = 2\pi / \omega$ равна нулю

$$\int_0^{T_0} Q(x_0, x_0^{\cdot}) x_0^{\cdot}\, dt = \oint Q(x_0, x_0^{\cdot})\, dx_0 \equiv 0 \tag{1.3}$$

Кроме того, для вращательных движений необходимо, чтобы функция Q была 2π-периодической по $x : Q(x + 2\pi, x^{\cdot}) \equiv Q(x, x^{\cdot})$. В этом случае тождество (1.3) записывается более просто. Пусть известен первый интеграл уравнения (1.2), разрешимый относительно $x_0^{\cdot}(x_0, a)$; причем $x_0^{\cdot}(x_0 + 2\pi, a) \equiv x_0^{\cdot}(x_0, a)$. Функция $x_0^{\cdot}$ находится как общее знакоопределенное 2π-периодическое решение уравнения фазовой траектории

$$dx_0^{\cdot} / dx_0 = Q(x_0, x_0^{\cdot}) / x_0^{\cdot} \tag{1.4}$$

Тогда соотношение (1.3) должно выполняться независимо от a

$$\int_0^{2\pi} Q(x, x_0^{\cdot}(x, a))\, dx \equiv 0 \tag{1.5}$$

Относительно возмущенной системы предполагаются выполненными следующие требования:

1. Функция $Q(x, x^{\cdot})$ кроме указанных выше свойств обладает вторыми частными производными, удовлетворяющими условиям Липшица. В случае колебаний область изменения аргументов ограничена; для вращений вследствие периодичности Q по x достаточно рассмотреть интервал $[0, 2\pi]$.

2. Функция $q(t, x, x^{\cdot}, \varepsilon)$ непрерывна и периодична по t с постоянным периодом $2\pi / \nu$, 2π-периодична по x в случае вращения и допускает по x, $x^{\cdot}$, ε первые частные производные, удовлетворяющие условиям Липшица с независящими от t постоянными в указанной области изменения x, $x^{\cdot}$ и $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Для возмущенной системы (1.1) ставится задача построения резонансных движений, период которых равен $T = 2\pi m / \nu = nT_0$, где m, n — взаимно-простые целые числа. Тогда параметр a должен удовлетворять уравнению

$$m\omega(a) = n\nu \tag{1.6}$$

и пусть a^* — простой допустимый корень (1.6). За время T вращающаяся переменная x получает приращение $2\pi n$. Условие периодичности типа (1.3) для возмущенного движения имеет вид

$$\int_0^T Q(x, x^{\cdot}) x^{\cdot}\, dt = \varepsilon \int_0^T q(t, x, x^{\cdot}, \varepsilon) x^{\cdot}\, dt, \quad x = x(t, \varepsilon) \tag{1.7}$$

и должно выполняться при любых значениях $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Для рассматриваемой задачи начальный момент времени несуществен, так как метод выделяет индивидуальные периодические движения. Поэтому можно положить $t_0 = 0$, найти соответствующее установившееся решение, а затем определить значения x и $x^{\cdot}$, отвечающие некоторому начальному моменту t_0. Задание таких начальных условий обеспечивает движение вдоль стационарной траектории.

2. Построение возмущенного резонансного решения. При помощи замены $x(t, \varepsilon) = x_0(\psi, a^*) + \varepsilon y(t, \varepsilon)$, где y — неизвестная периода T функция t, уравнение (1.1) приводится к квазилинейному виду

$$\begin{gathered} y^{\cdot\cdot} + (Q_x') y^{\cdot} + (Q_x') y = (q) + \varepsilon R(t, y, y^{\cdot}, \varepsilon) \\ R = -{}^1/_2 (Q_{x^{\cdot}x^{\cdot}}'') y^{\cdot 2} - {}^1/_2 (Q_{xx}'') y^2 - (Q_{xx^{\cdot}}'') yy^{\cdot} + (q_{x^{\cdot}}') y^{\cdot} + \\ + (q_x') y + (q_\varepsilon') + r \end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь r — периодическая функция t, удовлетворяющая условиям Липшица по y, $y^{\cdot}$, ε с независящими от t постоянными и обращающаяся в нуль при

$\varepsilon = 0$; выражения типа $(Q_{x^{\cdot}}{}')$, (q), . . ., означают, что аргументы функций $x = x_0$, $x^{\cdot} = x_0^{\cdot}$, $\varepsilon = 0$.

Квазилинейное уравнение с периодическими коэффициентами (2.1) решается последовательными приближениями по малому параметру ε при помощи метода вариации постоянных интегрирования [1]

$$y_{i+1} = \alpha_{i+1}\dot{u} + u\int_0^t dt_1\left\{\int_0^{t_1}[(q)+\varepsilon R_i]\frac{u}{\Delta}\,dt_2 - \right. \tag{2.2}$$

$$\left. -[(q)+\varepsilon R_i]\frac{v}{\Delta}+\beta_{i+1}\right\} + v\left\{\int_0^t [(q)+\varepsilon R_i]\frac{u}{\Delta}\,dt_1+\beta_{i+1}\right\},\quad i=0,1,\ldots$$

Здесь α_{i+1}, β_{i+1} — постоянные, выбираемые на каждом шаге так, чтобы функция y_{i+1} была периодической; u, v — периодические функции t, Δ — определитель Вронского. Их построение дается ниже. Функция R_i определяется на предыдущем шаге с точностью до постоянной α_i

$$R_i \equiv R\,(t,\ y_i,\ y_i^{\cdot},\ \varepsilon) \tag{2.3}$$

Без потери точности в функции r на $(i+1)$-м шаге можно полагать $y = y_{i-1}$, $y^{\cdot} = \dot{y}_{i-1}$.

В нулевом приближении функция y строится как периодическое решение линейного уравнения, получающегося из (2.1) при $\varepsilon = 0$. Общее решение его находится при помощи фундаментальной системы решений однородного уравнения

$$z^{\cdot\cdot} + (Q_{x^{\cdot}}{}')\,z^{\cdot} + (Q_x{}')\,z = 0 \tag{2.4}$$

Линейно-независимые решения уравнения (2.4) получаются дифференцированием x_0 по τ и a при $a = a^*$

$$z_1 = u = x_0^{\cdot}\,(\psi,\ a^*),\quad z_2 = ut + v \tag{2.5}$$

Периодическая функция v выражается через производную x_0 по a: $v = [(\partial x_0\,/\,\partial a)\,/\,(\ln\omega)']\,^*$ и является периодическим решением неоднородного уравнения

$$v^{\cdot\cdot} + (Q_{x^{\cdot}}{}')\,v^{\cdot} + (Q_x{}')\,v = -2\dot{u} - (Q_{x^{\cdot}}{}')\,u \tag{2.6}$$

Так как a^* — простой корень (1.6), то $(\ln\omega)'^* \neq 0$. Функция z_2 есть линейная комбинация z_1 и $z_3 = (Dx_0\,/\,Da)\,^*$, где z_3 — также решение (2.4), а D — символ полной частной производной.

Вследствие линейной независимости z_1 и z_2 определитель Вронского отличен от нуля для всех t и на основании теоремы Лиувилля равен

$$\Delta(t+\tau) = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1^{\cdot} & z_2^{\cdot}\end{vmatrix} = u^2 + uv^{\cdot} - u^{\cdot}v = \Delta_0\exp\left[-\int (Q_{x^{\cdot}}{}')\,dt\right] \tag{2.7}$$

$$\Delta_0 = \Delta(0),\quad \Delta^{\cdot} = -(Q_{x^{\cdot}}{}')\,\Delta,\quad (1\,/\,\Delta)^{\cdot} = (Q_{x^{\cdot}}{}')\,(1\,/\,\Delta)$$

Из (2.7) следует, что функция $(Q_{x^{\cdot}}{}')$ должна иметь нулевое среднее по t.

Методом вариации постоянных интегрирования искомое общее решение для y_0 можно записать в виде (2.2)

$$y_0 = \alpha_0 u + u\int_0^t dt_1\left[\int_0^{t_1}(q)\frac{u}{\Delta}\,dt_2 - (q)\frac{v}{\Delta} + \beta_0\right] + v\left[\int_0^t (q)\frac{u}{\Delta}\,dt_1 + \beta_0\right] \tag{2.8}$$

Из (2.8) следует, что функция y_0 будет периодической для любого α_0 при условии

$$P(\tau) \equiv \int_0^T q(t, x_0, x_0^{\cdot}, 0)\frac{u}{\Delta}\,dt = 0 \tag{2.9}$$

если положить

$$\beta_0 = -\frac{1}{T}\int_0^T dt\left[\int_0^t (q)\frac{u}{\Delta}\,dt_1 - (q)\frac{v}{\Delta}\right] \tag{2.10}$$

Пусть уравнение (2.9) допускает вещественный корень τ^*. Тогда периодическое решение y_0 определено с точностью до параметра α_0. Подстановка (2.10) и $\tau = \tau^*$ в (2.8) приводит к выражению: $y_0 = \alpha_0 u + y_0^*$, где y_0^* — известная периодическая функция t.

Решение уравнения первого приближения имеет вид (2.2), где $i = 0$, $R_0 = R\,(t, \alpha_0 u + y_0^*, \alpha_0 u^{\cdot} + y_0^{\cdot *}, 0)$, а значение α_0 пока не определено. Для нахождения α_0 используется основное условие периодичности функции y_1, аналогичное (2.9)

$$\int_0^T R_0\frac{u}{\Delta}\,dt = 0 \tag{2.11}$$

Соотношение (2.11) может быть упрощено, если воспользоваться условиями периодичности функций $y_0^{\cdot}$ и $u^{\cdot}$ вида

$$\int_0^T [(q_t') + (q_x')u + (q_{x^{\cdot}}')u^{\cdot} - \tag{2.12}$$

$$- (Q_{x^{\cdot 2}}'')y_0^{\cdot}u^{\cdot} - (Q_{x^2}'')y_0 u - (Q_{xx^{\cdot}}'')(y_0 u)^{\cdot}]\frac{u}{\Delta}\,dt \equiv 0$$

$$-\int_0^T [(Q_{x^{\cdot 2}}'')u^{\cdot 2} + 2(Q_{xx^{\cdot}}'')uu^{\cdot} + (Q_{x^2}'')u^2]\frac{u}{\Delta}\,dt \equiv 0 \tag{2.13}$$

Сложением тождества (2.13), умноженного на $\alpha_0^2 / 2$ с (2.12), умноженным на α_0, и вычитанием полученной суммы из (2.11) приходим к линейному уравнению относительно α_0. Это уравнение разрешимо при $P'(\tau^*) \neq 0$:

$$\alpha_0^* = -\frac{1}{P'(\tau^*)}\int_0^T R_0^*\frac{u}{\Delta}\,dt, \quad R_0^* = R\,(t, y_0^*, y_0^{\cdot *}, 0) \tag{2.14}$$

Здесь также используется тождество

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\left[(q)\frac{u}{\Delta}\right]dt = P'(\tau^*) + \int_0^T (q_t')\frac{u}{\Delta}\,dt \equiv 0 \tag{2.15}$$

Таким образом, если τ^* — простой вещественный корень уравнения (2.9), то параметр α_0 определяется однозначно, а $y_1 = \alpha_1 u + y_1^*$, где y_1^* — известная периодическая функция, α_1 — неизвестный параметр, причем $\alpha_1 = \alpha_0^* + O(\varepsilon)$.

Дальнейшие построения проводятся по индукции. Итак, пусть периодические функции $y_0, y_1, \ldots, y_{i-1}$ полностью построены, а функция $y_i = \alpha_i u + y_i^*$ определена с точностью до α_i. Параметр β_i согласно (2.2) равен

$$\beta_i = -\frac{1}{T}\int_0^T dt\left\{\int_0^t [(q)+\varepsilon R_{i-1}]\frac{u}{\Delta}\,dt_1 - [(q)+\varepsilon R_{i-1}]\frac{v}{\Delta}\right\} \tag{2.16}$$

Неизвестный параметр α_i находится из условия периодичности функции y_{i+1} типа (2.11)

$$\int_0^T R(t, \alpha_i u + y_i^*, \alpha_i u^{\cdot} + y_i^{\cdot *}, \varepsilon)\frac{u}{\Delta}\,dt = 0 \tag{2.17}$$

Сложение условия периодичности функции $y_i^{\cdot}$ типа (2.12), умноженного на α_i, с (2.13), умноженным на $\alpha_i^2 / 2$, приводит уравнение (2.17) относительно α_i к виду

$$\alpha_i = -\frac{1}{P'(\tau^*)}\int_0^T \{[R(t, y_i^*, y_i^{\cdot *}, 0) + \tag{2.18}$$

$$+ r(t, \alpha_i u + y_i^*, \alpha_i u^{\cdot} + y_i^{\cdot *}, \varepsilon)]\,u + \varepsilon\alpha_i R_{i-1}[u^{\cdot} + (Q_{x^{\cdot}}')\,u]\}\,dt$$

Так как $r(t, y, y^{\cdot}, 0) \equiv 0$, $y_i^*(t, 0) = y_0^*$, то $\alpha_i(\varepsilon = 0) = \alpha_0^*$. При достаточно малых значениях ε соотношение (2.18) однозначно разрешимо относительно $\alpha_i = \alpha_i(\varepsilon)$, так как правая часть удовлетворяет для любого фиксированного i условию Липшица с постоянной, не зависящей от индекса i, величина которой порядка ε. Корень уравнения (2.18) может быть определен последовательными приближениями. В функции r без потери точности можно полагать $y = y_{i-1}$. Тогда параметр $\alpha_i(\varepsilon)$ находится явно из линейного уравнения.

Обоснование предложенной схемы последовательных приближений (2.2), (2.16), (2.18) построения периодического решения уравнения (2.1), т. е. основного m / n-резонансного решения (1.1), может быть проведено при помощи соответствующей методики [1]. Сходимость к точному решению при достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеет степенной характер: $y_{i+1} = y_i + O(\varepsilon^{i+1})$.

Теорема 2.1. Возмущенное уравнение (1.1) при выполнении указанных в п. 1, 2 условий периодичности и гладкости и $\varepsilon > 0$ достаточно малом допускает простое m / n-резонансное решение вида $x = x_0(\psi, a^*) +$

$+\varepsilon y(t, \varepsilon)$, где y — периодическое ограниченное при $\varepsilon \to 0$ решение уравнения (2.1), если

1) соотношение резонанса (1.6) имеет простой корень a^*, принадлежащий допустимой области;

2) уравнение (2.9) относительно фазовой постоянной τ допускает простой вещественный корень τ^*.

Замечание 2.1. Случаи, когда уравнения (1.6), (2.9) допускают кратные корни, являются критическими и требуют дополнительного рассмотрения при помощи общей схемы метода Пуанкаре [1,6]. Решения строятся в виде рядов или последовательными приближениями по дробным степеням малого параметра ε, причем может иметь место расщепление траекторий, т. е. кратным корням a^* и τ^* может отвечать несколько возмущенных траекторий. Возникают дополнительные условия существования установившегося решения, а требования гладкости усиливаются.

Замечание 2. 2. Случай, когда уравнение (2.9) удовлетворяется тождественно по τ, связан с движениями высших степеней [1,2,6-8]. При помощи метода Пуанкаре могут быть получены достаточные условия их существования, аналогичные теореме 2.1. Так как непосредственное рассмотрение системы (1.1) приводит при этом к необозримо громоздким выражениям, то для анализа удобнее перейти к системе с вращающейся фазой [8].

Если же уравнение (1.6) удовлетворяется тождественно по a, т. е. $\omega = \mathrm{const}$, то имеет место более простая «квазилинейная» система, исследование которой сводится к рассмотрению стандартной системы [1].

3. Исследование устойчивости возмущенных резонансных решений. К системе (1.1) нельзя применить теорему об устойчивости построенного периодического решения при постоянно действующих возмущениях [5], сколь бы малым ни было значение $\varepsilon > 0$, так как порождающее решение неустойчиво, причем двукратному нулевому характеристическому показателю системы в вариациях при $\varepsilon = 0$ соответствует одна группа решений. Поэтому для исследования устойчивости возмущенного движения необходимо учитывать более высокие степени малого параметра ε. Анализ показывает, что разложения характеристических показателей проводятся по степеням $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, т. е. имеет место сложный критический случай [1-5].

Задача сводится к исследованию устойчивости точки покоя $W = W^{\cdot} = 0$ уравнения в вариациях

$$W^{\cdot\cdot} + Q_{x^{\cdot}}' W^{\cdot} + Q_x' W = \varepsilon (q_{x^{\cdot}}' W^{\cdot} + q_x' W) \tag{3.1}$$

которое получается из (1.1) заменой $x = x(t, \varepsilon) + W$ и отбрасыванием нелинейных членов. На основании исследований Флоке — Ляпунова [5] линейное уравнение (3.1) с периодическими коэффициентами имеет решение $W = w \exp \lambda t$, где λ — характеристический показатель, w — периодическая периода T функция. Она удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} & w^{\cdot\cdot} + (Q_{x^{\cdot}}' + 2\lambda) w^{\cdot} + (Q_x' + \lambda Q_{x^{\cdot}}' + \lambda^2) w = \\ & = \varepsilon q_{x^{\cdot}}' w^{\cdot} + \varepsilon (q_x' + \lambda q_{x^{\cdot}}') w \end{aligned} \tag{3.2}$$

Требуется найти такое значение λ, для которого уравнение (3.2) допускает нетривиальное периодическое решение.

Для неизвестных λ и w имеют место представления

$$\lambda = \delta\lambda_1 + \delta^2\lambda_2 + \delta^3\lambda_3(\delta), \quad w = w_0 + \delta w_1 + \delta^2 w_2 + \delta^3 w_3(t, \delta) \tag{3.3}$$

Согласно (3.2) периодические функции w_0 и w_1 равны: $w_0 = c_0 u$, $w_1 = c_1 u + \lambda_1 c_0 v$. Здесь c_0, $c_1 = \mathrm{const}$, а u, v — периодические функции, определяемые формулами (2.4) — (2.6). Далее, из уравнения для w_2, которое получается подстановкой (3.3) в (3.2) и приравниванием коэффициентов при $\delta^2 = \varepsilon$, следует, что

$$w_2 = \lambda_2 c_0 v + \lambda_1 c_1 v + c_2 u + c_0 w_2^* (t, \lambda_1^2), \qquad c_2 = \mathrm{const}$$

Функция w_2^* будет периодической, если выполнено условие типа (2.17), которое следует рассматривать как уравнение относительно λ_1. При помощи методики п. 1, 2 оно приводится к виду

$$\lambda_1^2 \int_0^T [2v^\cdot + (Q_{x^\cdot}')v + u] \frac{u}{\Delta} dt = -\int_0^T (q_t') \frac{u}{\Delta} dt$$

Здесь правая часть понимается в смысле (2.15). На основании определения (2.7)

$$\int_0^T [2v^\cdot + (Q_{x^\cdot}')v + u] \frac{u}{\Delta} dt = \int_0^T \left[(2v^\cdot + u)\frac{u}{\Delta} + \left(\frac{1}{\Delta}\right)^\cdot uv\right] dt = T$$

уравнение для λ_1 приводится к виду

(3.4) $$\lambda_1^2 = P'(\tau^*) / T$$

Из (3.4) следует, что при $P' > 0$ один из корней λ_1 положителен, а точка покоя уравнения (3.1) неустойчива, так как один из характеристических показателей имеет заведомо положительную вещественную часть. Если же $P' < 0$, то оба корня чисто мнимые в вычисленном приближении, а устойчивость определяется величиной λ_2.

Для более точного вычисления характеристического показателя далее выписывается, аналогично w_2, уравнение нулевого приближения функции w_3. Условие периодичности w_3 определяет искомую величину λ_2. Чтобы упростить получающееся соотношение, нужно уравнение для w_2 умножить на w_1 / Δ, вычесть его из уравнения для w_1, умноженного на w_2 / Δ, и проинтегрировать по t от 0 до T. Затем полученная комбинация складывается с условием периодичности w_{30}, умноженным на постоянную c_0. В результате для λ_2 получается выражение

(3.5) $$\lambda_2 = \frac{1}{2T} \int_0^T [(q_{x^\cdot}') - (Q''_{x^{\cdot 2}}) y_0^\cdot - (Q''_{x^\cdot x}) y_0]\, dt$$

Теорема 3.1. Возмущенное m / n-резонансное решение уравнения (1.1) устойчиво при $\varepsilon > 0$ достаточно малом и притом асимптотически, если

$P'(\tau^*) < 0$ — необходимое условие;

величина λ_2, вычисленная согласно (3.5), отрицательна.

Замечание 3.1. Величина $P'(\tau^*) \neq 0$ на основании условия 2) теоремы 2.1.

Замечание 3.2. В случае, когда $\lambda_0 = 0$, требуется вычислить величину $\lambda(\varepsilon)$ более точно, что связано с более сильными требованиями гладкости системы (см. [2]).

Замечание 3.3. В отличие от исследованных систем, близких к консервативным [1-3], выражение λ_2 содержит два дополнительных члена со знаком минус (см. (3.5)).

Эти величины определяются не только порождающим решением x_0, но и нулевым приближением y_0 периодической добавки y (t, ε). Они соответствуют некоторым дополнительным коэффициентам «вязкого трения». Для рассмотренного ниже частного случая системы (1.1) их вклад в λ_2 равен нулю.

4. Частный случай. Расчет примера о резонансных вращениях кулисного механизма. Пусть функция Лагранжа невозмущенной системы имеет вид $L = \mu(x) x^{\cdot 2} / 2 - U(x)$, где $\mu(x) \geqslant \mu^\circ > 0$ — масса, зависящая от обобщенной координаты x, $U(x)$ — потенциал, а работа внешних возмущающих сил равна $\varepsilon \int f(t, x, x^\cdot) x^\cdot dt$, где ε — малый параметр, а f — периодическая функция t. Для случая вращений предполагается, что все функции периодичны по x с периодом 2π.

Уравнение движения возмущенной системы приводится к виду (1.1), где (штрих — производная по x)

$$Q = (\mu' / \mu) x^{\cdot 2} / 2 + F, \quad F = U' / \mu, \quad q = f / \mu \tag{4.1}$$

Пусть рассматривается случай вращательно-колебательной системы. При $\varepsilon = 0$ сохраняется интеграл энергии $h = \mu(x_0) x_0^{\cdot 2} / 2 + U(x_0) = \text{const}$. Так как U — гладкая периодическая функция, то на интервале $x \in [0, 2\pi]$ она достигает своих минимального $U_1 = U(x_1)$ и максимального $U_2 = U(x_2)$ значений, причем $U_1 \leqslant h$. Пусть, ради простоты, это происходит однократно и $F(x) = 0$ лишь в точках $x = x_{1,2}$. Тогда при $U_1 < h < U_2$ в системе имеют место колебания в пределах $x_0 \in [\xi_1, \xi_2]$, где $\xi_1(h)$, $\xi_2(h)$ — простые корни уравнения $U(x_0) = h$. При $h > U_2$ происходят прямые ($x_0^\cdot \geqslant \alpha > 0$) или обратные ($x_0^\cdot \leqslant -\alpha < 0$) вращения. Периоды собственных колебаний и вращений равны соответственно

$$T_0(h) = 2\int\limits_{\xi_1(h)}^{\xi_2(h)} \frac{dx}{v(x, h)}, \quad T_0(h) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{v(x, h)}, \quad v = \left\{\frac{\mu(x)}{2[h - U(x)]}\right\}^{1/2} \tag{4.2}$$

а само невозмущенное периодическое движение определяется соотношением

$$\psi = \omega(h) \int \frac{dx_0}{x_0^\cdot(x_0, h)}, \quad x_0^\cdot = \pm v, \quad \psi = \omega(h)(t + \tau) \tag{4.3}$$

Пусть для некоторых взаимно-простых целых чисел m и n из условия резонанса (1.6) определена величина h^*. Тогда уравнение (2.9) относительно τ при помощи (4.3) записывается в виде

$$P(\tau) = \frac{\mu_0}{\Delta_0} \int\limits_0^T f(t, x_0, x_0^\cdot) x_0^\cdot dt = \tag{4.4}$$

$$= \frac{\mu_0}{\Delta_0} \oint\limits_n f\left(\int \frac{dx}{x_0^\cdot(x, h^*)} - \tau, x, x_0^\cdot\right) dx = 0$$

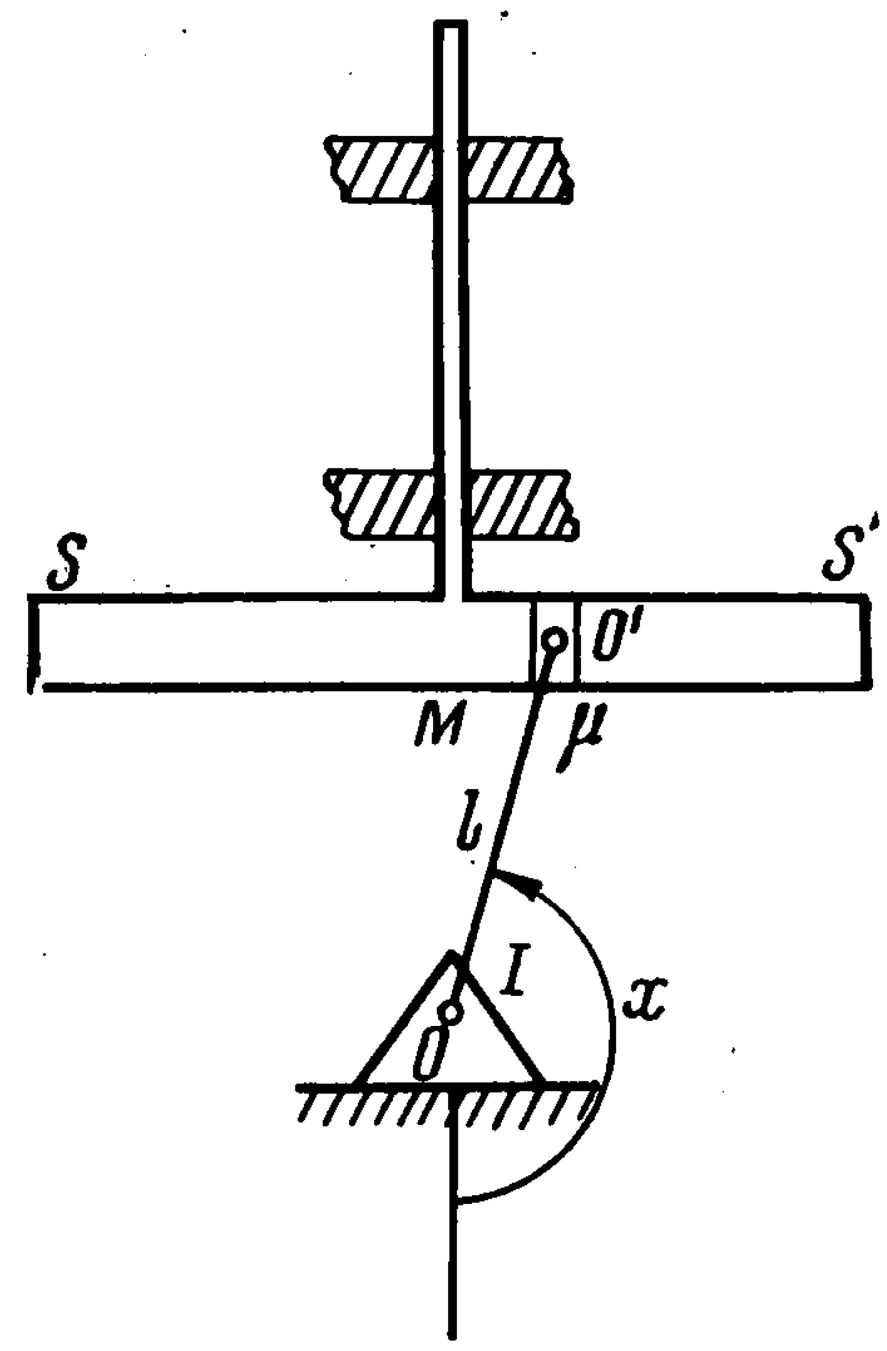
Для режима вращений выражение (4.4) упрощается

$$P(\tau) = \frac{\mu_0}{\Delta_0} \int\limits_0^{2\pi n} (f)\, dx = 0 \tag{4.5}$$

Здесь в (4.4), (4.5) использовалось выражение (2.7) для определителя Вронского

$$\Delta = \Delta_0 \exp \int (Q_{x^\cdot}') \, dt = \Delta_0 \mu_0 / \mu(x), \quad \mu_0 = \mu(x(0))$$

Если τ^* — простой вещественный корень трансцендентного уравнения (4.4) (или (4.5)), то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ резонансное решение возмущенного уравнения существует и единственно. В частности, соотношение (4.3) при $h = h^*$, $\tau = \tau^*$ определяет его с погрешностью $O(\varepsilon)$ для всех $|t| < \infty$. Более высокие приближения строятся при помощи схемы (2.2). Если при этом $F = U' \equiv 0$, то функция $z_2 = ut$, а $\Delta = u^2 = u^2(0)\,\mu_0 / \mu(x_0)$.



Для исследования устойчивости возмущенного решения вычисляются функции $(Q_{x^{\cdot 2}}'')$ и $(Q''_{x^\cdot x})$, которые равны: $(Q''_{x^{\cdot 2}}) = \mu' / \mu$, $(Q''_{x^\cdot x}) = (\mu' / \mu)' x_0^\cdot$. Интересно отметить (см. замечание 3.3), что в рассматриваемой системе дополнительные члены для λ_2 (3.5) взаимно уничтожаются. Действительно

$$\int_0^T (Q''_{x^{\cdot 2}}) y_0^\cdot \, dt = \int_0^T \left(\frac{\mu'}{\mu}\right) y_0^\cdot \, dt = y_0 \frac{\mu'}{\mu}\Big|_0^T - \int_0^T \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)' x_0^\cdot y_0 \, dt$$

Таким образом, стационарное резонансное решение асимптотически устойчиво для одного из значений τ^*, если эквивалентный коэффициент вязкого трения внешних сил εf отрицателен, т. е. если [2, 3]

$$\lambda_2 = \frac{1}{2T} \int_0^T (f_{x^\cdot}') \, dt < 0 \tag{4.6}$$

Для иллюстрации методики далее исследуется пример основных $(m = n = 1)$ резонансных вращений симметричного возвратно-поступательного кривошипно-кулисного механизма [9], расположенного перпендикулярно силе тяжести (фигура, вид сверху). Здесь M — масса кулисы SS', μ — масса ползуна O', I — момент инерции кривошипа OO' относительно точки вращения O, l — длина кривошипа, x — угловая координата.

В рассматриваемой задаче $U' \equiv 0$, а энергия системы h равна

$$h = [I + l^2(\mu + M \sin^2 x)] \, x^{\cdot 2} / 2 = \mathrm{const} > 0 \tag{4.7}$$

Невозмущенное вращательное движение x_0 и его период T_0 определяются при помощи первого интеграла (4.7)

$$\psi = \frac{\pi}{2}\left[1 - \frac{E(\pi/2 - x_0, k)}{\mathrm{E}(k)}\right], \quad T_0(h) = 2l \sqrt{\frac{2M}{h}} \frac{\mathrm{E}(k)}{k} \tag{4.8}$$

$$k = l\,\{M / [I + l^2(\mu + M)]\}^{1/2} \quad (0 < k < 1)$$

Здесь $E(\varphi, k)$ — эллиптический интеграл второго рода, $\mathrm{E}(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода.

Пусть на ползун O' извне действует малая периодическая сила $\varepsilon f_0 \sin(\nu t + \gamma)$, параллельная направляющей SS', а со стороны кулисы — малая вязкая сила трения.

пропорциональная относительной скорости: $-2\varepsilon l\lambda\, x^{\cdot} \cos x$ ($\lambda > 0$). Тогда момент возмущающих сил равен

$$\varepsilon f = \varepsilon f_0\, l \cos x \sin (\nu t + \gamma) - 2\varepsilon\lambda l^2 x^{\cdot} \cos^2 x$$

где $\varepsilon \geqslant 0$ — малый числовой параметр; f_0, ν, γ, λ — постоянные.

Уравнение типа (4.5), определяющее фазовую постоянную τ в (4.8), приводится к виду

(4.9)
$$R \cos (\nu\tau + \gamma + \theta) - C = 0$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \cos\theta = A / R, \ \sin\theta = B / R$$

$$A = \frac{f_0 l}{\Delta_0} \int_0^{2\pi} \cos x \cos \frac{E(\pi/2 - x, k)}{\mathrm{E}(k)}\, dx,$$

$$B = \frac{f_0 l}{\Delta_0} \int_0^{2\pi} \cos x \sin \frac{E(\pi/2 - x, k)}{\mathrm{E}(k)}\, dx$$

$$C = 8 \frac{\lambda l^2}{\Delta_0 k} \sqrt{\frac{2h^*}{M}}\, [\mathrm{K}(k) - \mathrm{E}(k)]$$

$$h^* = 2M \left(\frac{l\nu}{\pi}\right)^2 \frac{\mathrm{E}^2(k)}{k^2}, \qquad \Delta_0 = x_0^{\cdot 2}(0) = \frac{2h^*}{I + \mu l^2} > 0$$

Здесь $\mathrm{K}(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Выражения для коэффициентов A, B и C могут быть вычислены приближенно с любой степенью точности по степеням модуля k. Эти вычисления эффективны при малых k, когда невозмущенное движение близко к равномерному вращению со скоростью $[2h^* / (I + \mu l^2)]^{1/2}$; в частности

$$A = O(k^4), \quad B = (f_0 l / \Delta_0)(\pi - k^2 / 8) + O(k^4)$$

$$C = \pi (2\lambda\, l^2 / \Delta_0)(1 + {}^3/_8 k^2)\, [2h^* / (I + \mu l^2)]^{1/2} + O(k^4)$$

Уравнение (4.9) при $|C / R| < 1$ допускает на интервале длины 2π два простых вещественных корня:

$$\tau_{1,2} = (1 / \nu)\, [\pm \arccos (C / R) - \theta - \gamma]$$

Каждому из корней $\tau_{1,2}$ при $\varepsilon > 0$ достаточно малом отвечает одно стационарное решение. Так как согласно (4.8) x_0 зависит от h лишь через фазу ψ, то $z_2 = ut$. Поэтому $\Delta = u^2$, а добавка εy к x_0 находится при помощи более простой схемы

$$y_{i+1} = \alpha_{i+1} u + u \left\{ \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} [(q) + \varepsilon R_i] \frac{dt_2}{u} - \frac{1}{T_0} \int_0^T dt \int_0^t [(q) + \varepsilon R_i] \frac{dt_1}{u} \right\}$$

$$\int_0^T R_i \frac{dt}{u} = 0, \quad i = 0, 1, \ldots$$

$$(q) + \varepsilon R_i = f_i \{I + l^2 [\mu + M \sin^2 (x_0 + \varepsilon y_i)]\}^{-1}, \quad f_i = f(t,\ x_0 + \varepsilon y_i,\ x_0^{\cdot} + \varepsilon y_i^{\cdot})$$

Для одного из корней $\tau_{1,2}$ величина $P'(\tau) < 0$; следовательно, возмущенное вращение, отвечающее этому корню, будет асимптотически устойчивым, так как $\lambda_2 = -\lambda < 0$.

Если система находится в однородном поле сил тяжести, то второй интеграл невозмущенного движения (4.8) и периоды колебаний или вращений (4.2) выражаются через эллиптические интегралы третьего рода. Пусть механизм расположен так, что движение кулисы происходит вдоль вектора сил тяжести. Тогда

$$U(x) = \mp [(\mu + M)\, l + md]\, g\, (1 - \cos x)$$

Здесь m — масса кривошипа, d — его «плечо». Пусть, далее, на систему действует момент внешних периодических сил и сил трения f

$$f = f_0\, l \cos x \sin (\nu t + \gamma) - 2\lambda l^2 x^{\cdot} \cos^2 x$$

и пусть

$$g\,[(\mu + M)\,l + md]\,/\,\nu^2\,(I + \mu l^2) \sim \varepsilon$$

т. е. рассматривается задача о быстрых вынужденных вращениях. Тогда если ввести «быстрое время» $s = \nu t$ и предположить, что отношения $f_0 l\,/\,(I + \mu l^2)\,\nu^2$, $2\lambda l^2\,/\,(I + \mu l^2)\,\nu$ — малые величины того же порядка малости ε, то выражения (4.7) — (4.9) остаются прежними, так как интеграл типа (4.5) от возмущающей потенциальной силы равен нулю

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x_0 u\, ds}{[I + l^2(\mu + M\sin^2 x_0)]\,\Delta} = \frac{\mu_0}{\Delta_0}\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = 0$$

Таким образом, задача о вынужденных быстрых вращениях кулисного механизма сводится к исследованной ранее.

Поступила 9 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
2. *Кац А. М.* Вынужденные колебания нелинейных систем с одной степенью свободы, близких к консервативным. ПММ, 1955, т. 19, вып. 1.
3. *Акуленко Л. Д., Волосов В. М.* О резонансе во вращательной системе. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1967, № 1.
4. *Акуленко Л. Д.* О резонансе в нелинейных системах с одной степенью свободы. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 6.
5. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
6. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., «Наука», 1969.
7. *Акуленко Л. Д., Волосов В. М.* Резонансные вращения высших степеней. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1967, № 2.
8. *Акуленко Л. Д.* О резонансных движениях в существенно нелинейной системе с одной степенью свободы в критическом случае. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, т. 7, № 6.
9. *Артоболевский И. И.* Теория механизмов и машин. М., «Наука», 1975.