Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 62—50

# К РЕШЕНИЮ ИГРОВЫХ ЗАДАЧ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

С. В. Чистяков

(Ленинград)

Предлагаются два метода последовательных приближений функции значения игры преследования с ограниченным временем и функцией выигрыша $\min_{\tau \in [0, t]} H(x(\tau), y(\tau))$, которые непосредственно используются для конструктивного построения последовательностей стратегий преследователя и убегающего, позволяющих по любому $\varepsilon > 0$ находить $\varepsilon$-оптимальные стратегии. Выведены также необходимые и достаточные условия того, чтобы некоторая функция была функцией значения рассматриваемой игры преследования.

Последовательным методам построения функции значения или минимакса выигрыша в игровых задачах сближения в заданный момент времени посвящены работы [1–3]. Эти методы использовались в [1,2] для построения максимальных стабильных мостов, экстремальные стратегии к которым, как известно [4], разрешают соответствующую задачу. В работах [1,2], как и в [5], рассматривались также последовательные процедуры построения максимальных стабильных мостов без предварительного построения функции значения или минимакса выигрыша.

1. Пусть движения преследователя $P$ и убегающего $E$ описываются уравнениями

$$x^{\cdot} = f(x, u), \quad x \in R^n, \quad u \in K_P \tag{1.1}$$

$$y^{\cdot} = g(y, v), \quad y \in R^m, \quad v \in K_E \tag{1.2}$$

где $K_P \subset R^k$ и $K_E \subset R^l$ — выпуклые компакты. Относительно системы (1.1) ((1.2)) сделаем следующие предположения:

а) функция $f(x, u)$ ($g(y, v)$) определена и непрерывна на $R^n \times K_P$ ($R^m \times K_E$) и удовлетворяет локальному условию Липшица по $x$ ($y$) с постоянной, не зависящей от $u$ ($v$);

б) $\| f(x, u) \| \leqslant \lambda (1 + \| x \|)$ ($\| g(y, v) \| \leqslant \lambda (1 + \| y \|)$), $\lambda > 0$ для всех $(x, u) \in R^n \times K_P$ ($(y, v) \in R^m \times K_E$);

в) допустимыми управлениями являются измеримые программные управления $u(\cdot)$ ($v(\cdot)$) со значениями из $K_P$ ($K_E$);

г) для любого $x \in R^n$ ($y \in R^m$) множество $\{f(x, u) \mid u \in K_P\}$ ($\{g(y, v) \mid v \in K_E\}$) выпуклое.

Будем считать далее, что задано начальное состояние $(x_0, y_0, T) \in R^n \times R^m \times (R_+^1 \setminus \{0\})$ игры, где $x_0 \in R^n$ и $y_0 \in R^m$ — начальные положения игроков $P$ и $E$, а $T \in R_+^1 \setminus \{0\}$ ($R_+^1 = \{t \in R^1 \mid t \geqslant 0\}$) — продолжительность игры.

Класс стратегий игрока $P$ ($E$) определим следующим образом. Стратегия $U^q$ ($V^r$) есть упорядоченный набор отображений $U^q = (a^q, \ldots, a^0)$ ($V^r = (b^r, \ldots, b^0)$), заданных на $R^n \times R^m \times (R_+^1 \setminus \{0\})$. Отображение $a^i$ ($b^i$) при $i \in [0 : q]$ ($i \in [0 : r]$) ставит в соответствие состоянию $(x, y,$

$t) \in R^n \times R^m \times (R_+^1 \setminus \{0\})$ допустимое управление $u_i(\cdot)\,(v_i(\cdot))$ совместно с его промежутком задания $[0, t_i>$, $t_i \in (0, t]$, где при $i \in [1:q]$ $(i \in [1:r])$ либо $[0, t_i> = [0, t_i)$, $t_i \in (0, t)$, либо $[0, t_i> = [0, t]$, а при $i = 0$ $[0, t_i> = [0, t]$.

Поясним, как реализуется стратегия $U^q$ $(V^r)$ в игре из начального состояния $(x^\circ, y^\circ, t^\circ) \in R^n \times R^m \times (R_+^1 \setminus \{0\})$. Начальному состоянию отображение $a^q$ $(b^r)$ ставит в соответствие допустимое управление $u_q(\tau)$, $\tau \in [0, t_q>$ $(v_r(\tau)$, $\tau \in [0, t_r>)$, которое определяет решение уравнения (1.1) ((1.2)) на соответствующем интервале, с начальным условием $x(0) = x^\circ$ $(y(0) = y^\circ)$. Вследствие сделанных предположений а) — в) это решение, как известно, существует и единственно на всем интервале $[0, t_q]$ $([0, t_r])$. Тогда в случае $q = 0$ $(r = 0)$ или в случае $[0, t_q> = [0, t^\circ]$ $([0, t_r> = [0, t^\circ])$ под реализацией стратегии $U^q$ $(V^r)$ понимаем соответствующее решение уравнения (1.1) ((1.2)). В случае же $q > 0$ $(r > 0)$ и $[0, t_q> = [0, t_q)$, $t_q \in (0, t^\circ)$ $([0, t_r> = [0, t_r)$, $t_r \in (0, t^\circ))$ рассмотрим состояние $(x_q^1, y_q^1, t_q^1)$ $((x_r^1, y_r^1, t_r^1))$, которое реализуется к моменту времени $t_q$ $(t_r)$. В этом состоянии уже отображение $a^{q-1}$ $(b^{r-1})$ посредством допустимого управления $u_{q-1}(\cdot)$ $(v_{r-1}(\cdot))$ определяет на соответствующем интервале решение уравнения (1.1) ((1.2)) с начальным условием $x(0) = x_q^1$ $(y(0) = y_r^1)$. Продолжая и далее аналогичные рассуждения, убеждаемся, что любая стратегия $U$ $(V)$ в игре из начального состояния $(x^\circ, y^\circ, t^\circ)$ порождает, вообще говоря, совместно с некоторой стратегией $V$ $(U)$ единственное решение уравнения (1.1) и ((1.2)), $x(t) = x(t, x^\circ \mid U, V)$ $(y(t) = y(t, y^\circ \mid U, V))$, определенное уже на всем интервале $[0, t^\circ]$, с начальным условием $x(0) = x^\circ$ $(y(0) = y^\circ)$. Здесь допускается, что в формировании этого решения могут быть несущественны некоторые из отображений $a^i$ $(b^i)$, $i \in [0:s]$, $s < q$ $(s < r)$.

Функцию выигрыша в игре из начального состояния $(x_0, y_0, T)$ в ситуации $(U, V)$ определим равенством

$$K(x_0, y_0, T \mid U, V) = \min_{t \in [0, T]} H(x(t), y(t)) \tag{1.3}$$

$x(t) = x(t, x_0 \mid U, V)$, $y(t) = y(t, y_0 \mid U, V)$, где функция $H(x, y)$ определена и непрерывна на $R^n \times R^m$. Считаем, что игрок $E$ максимизирует, а игрок $P$ минимизирует (1.3).

Отметим также, что рассматривается игра с полной информацией, т. е. каждый игрок знает динамику противника и текущее состояние игры. Кроме того, в случае необходимости будем считать, что игрокам известна вся предыстория игры.

Для решения игры из начального состояния $(x_0, y_0, T)$ погрузим его во множество состояний $D_\delta$, где

$$D_\delta = \bigcup_{(x, y, t) \in S_\delta(x_0, y_0, T)} \ \bigcup_{t' \in [0, t]} C^{t-t'}(x) \times C^{t-t'}(y) \times \{t'\}$$

$S_\delta(x_0, y_0, T) \subset R^n \times R^m \times R_+^1$ — замкнутый шар радиусом $\delta \in (0, T]$ с центром в $(x_0, y_0, T)$, $C^{t-t'}(x)$ $(C^{t-t'}(y))$ — множество достижимости системы (1.1) ((1.2)) из начального положения $x(0) = x$ $(y(0) = y)$

к моменту времени $t - t'$. При сделанных предположениях а) — г) множества $C^t(x)$ ($C^t(y)$) для любых $x \in R^n$ ($y \in R^m$), $t \in R_+^1$, а следовательно и множество $D_\delta$, будут компактными [6]. Введем обозначение $D_\delta^\circ = \{(x, y, t) \in D_\delta \mid t > 0\}$.

2. *Определение 1.* Пусть функция $w(\cdot)$ определена на $D_\delta$. Будем говорить, что функция $w(\cdot)$ принадлежит множеству $W_-(D_\delta)$, если

1) $w(x, y, 0) = H(x, y)$ для любой точки $(x, y, 0) \in D_\delta$;

2) $w(\cdot) \in C(D_\delta)$ ($C(D_\delta)$ — множество непрерывных на $D_\delta$ функций);

3) существует такая стратегия $V'$ игрока $E$, что для любой стратегии $U$ игрока $P$ в каждой точке $(x, y, t) \in \overset{\circ}{D}_\delta$ справедливы неравенства $K(x, y, t \mid U, V') \geqslant w(x, y, t)$ и $w(x(\tau, x \mid U, V'),\ y(\tau, y \mid U, V'),\ t - \tau) \geqslant w(x, y, t)$ для всех $\tau \in [0, \tau']$ при некотором $\tau'$, $\tau' \in (0, t]$.

*Лемма 1.* Множество $W_-(D_\delta)$ непусто.

Для доказательства леммы достаточно рассмотреть функцию

$$w(x, y, t) = \max_{\eta(\cdot) \in A^t(y)} \min_{\xi(\cdot) \in A^t(y)} \min_{\tau \in [0, t]} H(\xi(\tau), \eta(\tau)) \tag{2.1}$$

где $A^t(x)$ ($A^t(y)$) — множество решений системы (1.1) ((1.2)), реализующихся при всевозможных допустимых управлениях $u(\cdot)$ ($v(\cdot)$) на интервале $[0, t]$ с начальным условием $x(0) = x$ ($y(0) = y$). Как известно [6], если выполнены условия а) — г), то множества $A^t(x)$ ($A^t(y)$) для любых $x \in R^n$ ($y \in R^m$) и $t \in R_+^1$ будут компактными в метрике пространства непрерывных функций.

Определим оператор $\Phi_- : C(D_\delta) \to C(D_\delta)$ по следующему правилу: для любой функции $w(\cdot) \in C(D_\delta)$

$$\Phi_- \circ w(x, y, t) = \max_{\tau \in [0, t]} \max_{\eta(\cdot) \in A^\tau(y)} \min_{\xi(\cdot) \in A^\tau(x)} \min\{w(\xi(\tau), \eta(\tau), t - \tau),\ \min_{\theta \in [0, \tau]} H(\xi(\theta), \eta(\theta))\} \tag{2.2}$$

Можно показать, что оператор $\Phi_-$ действительно отображает пространство $C(D_\delta)$ в себя.

*Теорема 1.* Оператор $\Phi_-$ отображает $W_-(D_\delta)$ в себя, причем для любой функции $w(\cdot) \in W_-(D_\delta)$ справедливо неравенство $\Phi_- \circ w(\cdot) \geqslant w(\cdot)$

*Доказательство.* Пусть $w'(\cdot) \in W_-(D_\delta)$. Покажем, что $\Phi_- \circ w'(\cdot) \in W_-(D_\delta)$. Учитывая предшествующее теореме замечание, достаточно показать, что функция $\Phi_- \circ w'(\cdot)$ удовлетворяет условию 3) определения 1, так как справедливость условия 1) этого определения для функции $\Phi_- \circ w'(\cdot)$ очевидна.

Поскольку $w'(\cdot) \in W_-(D_\delta)$, то существует стратегия $V'$ игрока $E$ со свойствами относительно функции $w'(\cdot)$, сформулированными в условии 3) определения 1. Пусть для определенности $V' = V^r = (b^r, \ldots, b^0)$. Стратегию $\bar{V}'$ игрока $E$ с аналогичными свойствами относительно функции $\Phi_- \circ w'(\cdot)$ будем искать в виде $\bar{V}' = \bar{V}^{r+1} = (\bar{b}^{r+1}, \ldots, \bar{b}^0)$. Отображение $\bar{b}^{r+1}$ определим из условия, что оно точке $(x, y, t) \in \overset{\circ}{D}_\delta$ ставит в соответствие допустимое управление $v'(\tau)$, $\tau \in [0, \tau'>$, которому соответствует решение $\eta'(\cdot) \in A^{\tau'}(y)$, реализующее совместно с $\tau'$ максимум в правой части (2.2), где $w(\cdot)$ следует заменить на $w'(\cdot)$. Заметим, что $\tau'$, вследствие справедливости для $w'(\cdot)$ условия 3) определения 1, всегда может быть выбрано положительным. Далее, положим $\bar{b}^i = b^i$, $i \in [0:r]$ всюду на $D_\delta^\circ$.

Покажем, что построенная стратегия $\bar{V}'$ — искомая. Зафиксируем произвольную стратегию $U$ игрока $P$ и произвольную точку $(x, y, t) \in D_\delta^\circ$. Пусть $\xi'(\tau) = \xi(\tau, x \mid U, \bar{V}')$, $\tau \in [0, \tau']$, где $\tau'$ определяется отображением $\bar{b}^{r+1}$. Нетрудно заметить, что найдется стратегия $U'$ игрока $P$, такая, что

$$K(x, y, t \mid U, \bar{V}') = \min \{K(\xi'(\tau'), \eta'(\tau'), t - \tau' \mid U', V'), \min_{\theta \in [0, \tau']} H(\xi'(\theta), \eta'(\theta))\}$$

Отсюда, учитывая свойство стратегии $V'$ и выбор, посредством отображения $\bar{b}^{r+1}$, управления $v'(\tau)$, $\tau \in [0, \tau' >$ получаем

$$K(x, y, t \mid U, \bar{V}') \geqslant \min \{w'(\xi'(\tau'), \eta'(\tau'), t - \tau'), \min_{\theta \in [0, \tau']} H(\xi'(\theta), \eta'(\theta))\} \geqslant \Phi_- \circ w'(x, y, t) \tag{2.3}$$

кроме того, учитывая, что $\eta'(\tau) = \eta(\tau, y, v'(\cdot)) = \eta(\tau, y \mid U, \bar{V}')$, $\tau \in [0, \tau']$, получаем

$$\Phi_- \circ w'(\xi(\tau, x \mid U, \bar{V}'), \eta(\tau, y \mid U, \bar{V}'), t - \tau) \geqslant \min_{\xi(\cdot) \in A^{\tau'}(x)} \min \{w'(\xi(\tau'), \eta'(\tau'), t - \tau'), \min_{\theta \in [0, \tau']} H(\xi(\theta), \eta'(\theta))\} = \Phi_- \circ w'(x, y, t)$$

при всех $\tau \in [0, \tau']$. Таким образом, условие 3) определения 1 для функции $\Phi_- \circ w'(\cdot)$ выполнено.

Для доказательства последнего утверждения теоремы заметим, что для любой точки $(x, y, t) \in D_\delta$ справедливо неравенство

$$\Phi_- \circ w'(x, y, t) \geqslant \min \{w'(x, y, t), H(x, y)\}$$

С другой стороны, учитывая выбор стратегии $V'$ игрока $E$, получаем $H(x, y) \geqslant K(x, y, t \mid U, V') \geqslant w'(x, y, t)$. Следовательно, $\Phi_- \circ w'(x, y, t) \geqslant w'(x, y, t)$ в каждой точке $(x, y, t) \in D_\delta$. Теорема доказана.

Выберем произвольную функцию $w_0(\cdot) \in W_-(D_\delta)$ и построим последовательные приближения: для $n > 0$

$$\Phi_- \circ w_{n-1}(\cdot) = w_n(\cdot) \tag{2.4}$$

Построим также последовательность стратегий $\{V_n\}_{n=0}^\infty$ игрока $E$: $V_0$ — стратегия, для которой согласно определению 1 в каждой точке $(x, y, t) \in D_\delta^\circ$ справедливо неравенство $K(x, y, t \mid U, V_0) \geqslant w_0(x, y, t)$, какова бы ни была стратегия $U$ игрока $P$; каждая из стратегий $V_n$, $n > 0$ строится по стратегии $V_{n-1}$ и по приближению $w_{n-1}(\cdot)$ так же, как и в теореме 1. По построению последовательностей $\{V_n\}_{n=0}^\infty$ и $\{w_n(\cdot)\}_{n=0}^\infty$ для любого $n$ в каждой точке $(x, y, t) \in D_\delta^\circ$ справедливо неравенство $K(x, y, t \mid U, V_n) \geqslant w_n(x, y, t)$, какова бы ни была стратегия $U$ игрока $P$.

*Теорема 2. 1.* Последовательные приближения (2.4) для любого начального приближения из $W_{-}(D_\delta)$ сходятся равномерно на $D_\delta$ к некоторой функции $w^*(\cdot)$. Функция $w^*(\cdot)$ непрерывна на $D_\delta$ и удовлетворяет уравнению

$$\Phi_{-} \circ w(\cdot) = w(\cdot) \tag{2.5}$$

*2.* Функция $w^*(\cdot)$ является функцией значения семейства игр $\Gamma_\delta$ из начальных состояний $(x, y, t) \in \operatorname{int} D_\delta^\circ$ и, следовательно, предел последовательных приближений (2.4) не зависит от начального приближения из $W_{-}(D_\delta)$.

*3.* Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N$, что для $n \geqslant N$ стратегия $V_n$ является $\varepsilon$-оптимальной стратегией игрока $E$ в каждой игре семейства $\Gamma_\delta$.

*Доказательство.* Доказательство равномерной сходимости последовательности $\{w_n(\cdot)\}_{n=0}^{\infty}$ вследствие ее монотонности $w_0(\cdot) \leqslant w_1(\cdot) \leqslant, \ldots$ $\ldots, \leqslant w_n(\cdot) \leqslant, \ldots$ сводится к установлению равномерной ограниченности и равностепенной непрерывности множества функций $\{w_n(\cdot)\}_{n=0}^{\infty}$. Соответствующее доказательство достаточно громоздко, поэтому приводить его не будем. Как следствие равномерной сходимости получаем, что $w^*(\cdot) \in C(D_\delta)$, и, кроме того, функция $w^*(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (2.5) (здесь следует отметить, что оператор $\Phi_{-} : C(D_\delta) \to C(D_\delta)$ непрерывен).

Покажем, что в каждой игре из начального состояния $(x, y, t) \in$ $\in \operatorname{int} D_\delta^\circ$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая пара стратегий $V_\varepsilon$ и $U_\varepsilon$, что для любых стратегий $U$ и $V$ справедливы неравенства

$$\begin{gathered} K(x, y, t \mid U, V_\varepsilon) \geqslant w^*(x, y, t) - \varepsilon \\ K(x, y, t \mid U_\varepsilon, V) \leqslant w^*(x, y, t) + \varepsilon \end{gathered} \tag{2.6}$$

Это и будет означать, что $w^*(\cdot)$ — функция значения семейства игр $\Gamma_\delta$. Последовательность $\{w_n(\cdot)\}_{n=0}^{\infty}$ сходится равномерно к $w^*(\cdot)$, поэтому существует такое $N$, что $\nu(w^*(\cdot) - w_n(\cdot)) \leqslant \varepsilon$ для всех $n \geqslant N$, где $\nu$ — норма в пространстве $C(D_\delta)$. Пусть $n_0 \geqslant N$. Возьмем произвольную точку $(x, y, t) \in D_\delta^\circ$, тогда по выбору $n_0$ получаем

$$K(x, y, t \mid U, V_{n_0}) \geqslant w_{n_0}(x, y, t) \geqslant w^*(x, y, t) - \varepsilon$$

для любой стратегии $U$ игрока $P$. Таким образом, если положить $V_\varepsilon = V_{n_0}$, то первое из неравенств (2.6) доказано.

Теперь заметим, что если будет доказано второе из неравенств (2.6), то будет доказано и третье утверждение теоремы. Здесь, однако, будем предполагать, что $(x, y, t) \in \inf D_\delta^\circ$. Построение стратегии $U_\varepsilon$, для которой в точке $(x, y, t) \in \operatorname{int} D_\delta^\circ$ справедливо второе из неравенств (2.6), не вызывает принципиальных затруднений. Действительно, поскольку $w^*(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (2.5), то соответствующую стратегию можно построить, используя неравенство

$$w^*(x, y, t) \geqslant \min_{\xi(\cdot) \in A^\tau(x)} \min \{w^*(\xi(\tau), \eta(\tau), t - \tau), \min_{\theta \in [0, \tau]} H(\xi(\theta), \eta(\theta))\} \tag{2.7}$$

справедливое для любых $(x, y, t) \in D_\delta^\circ$, $\tau \in [0, t]$ и $\eta(\cdot) \in A^\tau(y)$. Формальное построение стратегии $U_\varepsilon$ осуществляется при помощи вспомогательной игры, в которой используется знание предыдущей реализации управления игрока $E$ на некотором малом интервале времени и текущим состоянием которой считается состояние $(\xi, y, t-h)$, $\xi \in C^h(x)$ для достаточно малого $h > 0$, а не состояние $(x, y, t)$ исходной игры. Последнее и обусловливает ограниченность использования неравенства (2.7) лишь для точек $(\xi, y, t-h) \in D_\delta^\circ$, $\xi \in C^h(x)$ таких, что $(x, y, t) \in \operatorname{int} D_\delta^\circ$. Детали построения стратегии $U_\varepsilon^1$ опускаем.

Поскольку функция значения единственна на множестве $\operatorname{int} D_\delta^\circ$, а $w^*(\cdot) \in C(D_\delta)$ и замыкание $\operatorname{int} D_\delta^\circ$ совпадает с $D_\delta$, то последовательные приближения (2.4) сходятся к одному пределу независимо от выбранного начального приближения из $W_-(D_\delta)$. Теорема доказана.

3. *Определение 2*. Пусть функция $w(\cdot)$ определена на $D_\delta$. Будем говорить, что функция $w(\cdot)$ принадлежит множеству $W_+(D_\delta)$, если

1) $w(x, y, t) \leqslant H(x, y)$ для любой точки $(x, y, t) \in D_\delta^\circ$; и $w(x, y, 0) = H(x, y)$ для любой точки $(x, y, 0) \in D_\delta$;

2) $w(\cdot) \in C(D_\delta)$;

3) существует такая стратегия $U'$ игрока $P$, что для любой стратегии $V$ игрока $E$ в каждой точке $(x, y, t) \in D_\delta^\circ$ справедливы неравенства $K(x, y, t \mid U', V) \leqslant w(x, y, t)$ и $w(x(\tau, x \mid U', V), y(\tau, y \mid U', V), t-\tau) \leqslant w(x, y, t)$ для всех $\tau \in [0, \tau']$ при некотором $\tau'$, $\tau' \in (0, t]$.

*Замечание 1*. Некоторое отличие условия 1) этого определения от соответствующего условия в определении 1 объясняется тем, что там неравенство $w(x, y, t) \leqslant H(x, y)$, $(x, y, t) \in D_\delta^\circ$ было заведомо выполнено вследствие условия 3) (см. доказательство теоремы 1).

*Лемма 2*. Множество $W_+(D_\delta)$ непусто.

Для доказательства леммы достаточно рассмотреть функцию

$$w(x, y, t) = \min_{\xi(\cdot)\in A^t(x)} \max_{\eta(\cdot)\in A^t(y)} \min_{\tau\in[0, t]} H(\xi(\tau), \eta(\tau)) \tag{3.1}$$

Определим оператор $\Phi_+ : C(D_\delta) \to C(D_\delta)$ по следующему правилу: для любой функции $w(\cdot) \in C(D_\delta)$

$$\Phi_+ \circ w(x, y, t) = \min_{\tau\in[0, t]} \min_{\xi(\cdot)\in A^\tau(x)} \max_{\eta(\cdot)\in A^\tau(y)} \min\{w(\xi(\tau), \eta(\tau), t-\tau), \min_{\theta\in[0, \tau]} H(\xi(\theta), \eta(\theta))\} \tag{3.2}$$

*Теорема 3*. Оператор $\Phi_+$ отображает $W_+(D_\delta)$ в себя, причем для любой функции $w(\cdot) \in W_+(D_\delta)$ справедливо неравенство $\Phi_+ \circ w(\cdot) \leqslant w(\cdot)$.

Зафиксируем произвольную функцию $\overline{w}_0(\cdot) \in W_+(D_\delta)$ и построим последовательные приближения по следующему правилу: для $n > 0$

$$\Phi_+ \circ \overline{w}_{n-1}(\cdot) = \overline{w}_n(\cdot) \tag{3.3}$$

Построим также последовательность стратегий $\{U_n\}_{n=0}^\infty$ игрока $P$ : $U_0$ — стратегия для которой согласно определению 2 в каждой точке $(x, y, t) \in D_\delta^\circ$ справедливо неравенство $K(x, y, t \mid U_0, V) \leqslant \overline{w}_0(x, y, t)$, какова бы ни была стратегия $V$ игрока $E$; каждая из стратегий $U_n$, $n > 0$

строится по стратегии $U_{n-1}$ и по приближению $\overline{w}_{n-1}(\cdot)$ по аналогии с п. 2. По построению последовательностей $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\overline{w}_n(\cdot)\}_{n=0}^{\infty}$ для любого $n$ в каждой точке $(x, y, t) \in D_\delta{}^\circ$ будет справедливо неравенство $K(x, y, t \mid U_n, V) \leqslant \overline{w}_n(x, y, t)$, какова бы ни была стратегия $V$ игрока $E$.

*Теорема 4.* 1. Последовательные приближения (3.3) для любого начального приближения из $W_+(D_\delta)$ сходятся равномерно на $D_\delta$ к некоторой функции $w^*(\cdot)$. Функция $w^*(\cdot)$ непрерывна на $D_\delta$ и удовлетворяет уравнению

$$\Phi_+ \circ w(\cdot) = w(\cdot) \tag{3.4}$$

2. Функция $w^*(\cdot)$ является функцией значения семейства игр $\Gamma_\delta$ из начальных состояний $(x, y, t) \in \operatorname{int} D_\delta{}^\circ$, и, следовательно, предел последовательных приближений (3.3) не зависит от начального приближения из $W_+(D_\delta)$.

3. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N$, что для $n \geqslant N$ стратегия $U_n$ является $\varepsilon$-оптимальной стратегией игрока $P$ в каждой игре семейства $\Gamma_\delta$.

*Следствие* (из теоремы 2 и теоремы 4). Общий предел $w^*(\cdot)$ последовательных приближений (2.4) и (3.3) есть функция значения семейства игр из начальных состояний $(x, y, t) \in D_\delta{}^\circ$, причем в каждой игре этого семейства игр $\varepsilon$-оптимальные стратегии можно найти, используя последовательности стратегий $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$.

*Доказательство.* Поскольку $w^*(\cdot)$ — общий предел последовательных приближений (2.4) и (3.3), то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N$, что для всех $n \geqslant N$ в каждой точке $(x, y, t) \in D_\delta{}^\circ$ будут справедливы неравенства

$$K(x, y, t \mid U, V_n) \geqslant w_n(x, y, t) \geqslant w^*(x, y, t) - \varepsilon$$
$$K(x, y, t \mid U_n, V) \leqslant w_n(x, y, t) \leqslant w^*(x, y, t) + \varepsilon$$

каковы бы ни были стратегии $U$ и $V$. Это и доказывает требуемое утверждение.

*Замечание 2.* Если интересоваться только решением игры из начального состояния $(x_0, y_0, T)$, то для определения значения игры и $\varepsilon$-оптимальных стратегий, как видно из соответствующих построений, нет необходимости погружать состояние $(x_0, y_0, T)$ во множество $D_\delta$, а достаточно погрузить его во множество $D$, где

$$D = \bigcup_{t \in [0, T]} C^{T-t}(x_0) \times C^{T-t}(y_0) \times \{t\}$$

Погружение состояния $(x_0, y_0, T)$ во множество $D_\delta$ было осуществлено исключительно в целях доказательства.

*Замечание 3.* В теоремах 2 и 4 содержится доказательство существования значения игры и $\varepsilon$-оптимальных стратегий. В отличие от работ [7-9] здесь предложен способ построения стратегий, разрешающих, в смысле третьих утверждений теорем 2 и 4, рассматриваемую игру преследования. Кроме того, в этих работах, трактующих дифференциальную игру как предельный случай $n$-шаговой игры, при доказательстве предельных теорем было существенным условие, что длина шага в $n$-шаговой игре стремится к нулю при $n \to \infty$. Здесь же, как видно, какое-либо из подобных условий выполненным априори не предполагается.

4. *Теорема 5.* Пусть функция $w^*(\cdot)$ определена и непрерывна на $R^n \times R^m \times R_+{}^1$. Пусть также $w^*(x, y, t) \leqslant H(x, y)$ для всех $(x, y, t) \in R^n \times R^m \times R_+{}^1$ и $w^*(x, y, 0) = H(x, y)$ для всех $(x, y) \in R^n \times R^m$. Тогда следующие утверждения равносильны.

1. Функция $w^*(\cdot)$ — функция значения на $R^n \times R^m \times R_+{}^1$.

2. Функция $w^*(\cdot)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\Phi_- \circ w(\cdot) = w(\cdot), \quad \Phi_+ \circ w(\cdot) = w(\cdot) \tag{4.1}$$

3. Функция $w^*(\cdot)$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi_- \circ w(\cdot) = \Phi_+ \circ w(\cdot) \tag{4.2}$$

*Доказательство.* Импликация 1. $\Rightarrow$ 2. следует из теорем 2 и 4. Импликация 2. $\Rightarrow$ 1. доказывается с привлечением двух вспомогательных многошаговых игр с поочередными ходами: в одной игре первым делает ход игрок $P$, а в другой — игрок $E$ (последняя вспомогательная игра уже упоминалась при доказательстве теоремы 2). Импликация 2. $\Rightarrow$ 3. очевидна.

Покажем, что 3. $\Rightarrow$ 2. Пусть функция $w^*(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (4.2). Возьмем произвольную точку $(x, y, t) \in R^n \times R^m \times R_+^1$, тогда, учитывая неравенство $w^*(x, y, t) \leqslant H(x, y)$, получаем

$$w^*(x, y, t) = \min\{w^*(x, y, t), H(x, y)\} \leqslant \Phi_- \circ w^*(x, y, t) =$$
$$= \Phi_+ \circ w^*(x, y, t) \leqslant \min\{w^*(x, y, t), H(x, y)\} = w^*(x, y, t)$$

Следовательно, функция $w^*(\cdot)$ удовлетворяет системе (4.1). Теорема доказана.

*Замечание 4.* В работах [1,2] рассматривался метод последовательных приближений функции значения или минимакса выигрыша в игре сближения в заданный момент времени с общей игровой динамикой: $x^\cdot = f(x, u, v)$. В связи с этим отметим, что если следовать изложению в [4,9], то результаты данной статьи без существенных изменений могут быть перенесены и на дифференциальную игру с игровой динамикой общего вида (при условии седловой точки маленькой игры [4]) и соответственно с функцией выигрыша $\min_{\tau \in [0, t]} H(x(\tau))$. Отметим также, что предложенный здесь подход к решению рассмотренной игры преследования, как и подобные подходы [1–3,5], где рассматривались другие постановки игровых задач динамики, позволяет находить решение как регулярных (см. [4,10]), так и нерегулярных игровых задач.

Поступила 3 I 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ченцов А. Г.* О структуре одной игровой задачи сближения. Докл. АН СССР, 1975, т. 224, № 6.
2. *Ченцов А. Г.* Об игровой задаче сближения в заданный момент времени. Матем. сб., 1976, т. 99, № 3.
3. *Чистяков С. В., Петросян Л. А.* Об одном подходе к решению игр преследования. Вестн. ЛГУ, 1977, вып. 1.
4. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
5. *Ченцов А. Г.* К игровой задаче наведения. Докл. АН СССР, 1976, т. 226, № 1.
6. *Roxin E.* The existence of optimal controls. Michigan Math. J., 1962, vol. 9, No. 2, p. 109—119.
7. *Петров Н. Н.* Существование значения игры преследования. Дифференциальные уравнения, 1971, т. 7, № 5.
8. *Fleming W. H.* The convergence problem for differential games. J. Math. Analys. and Appl., 1961, vol. 3, No. 1, p. 102—116.
9. *Friedman A.* On the definition of differential games and the existence of value and of saddle points. J. Differential Equat., 1970, vol. 7, No. 1, p. 69—91.
10. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.