Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 62—50

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ

В. И. Ухоботов

(Челябинск)

Описывается один способ построения u-стабильного моста. Указан класс игр с интегральным ограничением, применительно к которому этот способ позволяет построить u-стабильный мост в явном виде. Следуя схеме, изложенной в работах [1-3], можно построить экстремальную к найденному u-стабильному мосту стратегию первого игрока, которая обеспечивает попадание позиции игры на терминальное множество.

1. В k-мерном евклидовом пространстве R^k происходит движение вектора z, которое подчиняется уравнению

$$z^{\bullet} = Cz + Nu + v, \quad u \in R^l, \quad v \in Q \tag{1.1}$$

Здесь C — постоянная $k \times k$-матрица, R^l — l-мерное евклидово пространство, N — постоянная $k \times l$-матрица, Q — выпуклый компакт в R^k.

На выбор управления u наложено интегральное ограничение

$$\mu(t) = \mu_0 - \int_0^t |u(\tau)|^2 d\tau \geqslant 0 \tag{1.2}$$

Здесь $|u|$ — евклидова норма вектора u, μ_0 — некоторая положительная постоянная.

Обозначим через I множество чисел $\mu \geqslant 0$. Тогда $R^k \times I$ означает прямое произведение R^k и I, а позицией игры будет точка $[z, \mu]$ из $R^k \times I$.

Предполагается, что заданы m-мерное евклидово пространство R^m ($m \leqslant k$), линейное отображение π пространства R^k в R^m.

В $R^k \times I$ выделено терминальное множество Z, которое имеет следующий вид:

$$Z = \{[z, \mu]: \pi z = 0, \ \mu \geqslant 0\} \tag{1.3}$$

Чтобы сформулировать условия u-стабильности [1-3] в удобной для дальнейшего форме, введем, следуя работе [4], многозначное отображение $T_\sigma(X)$.

Пусть X — некоторое замкнутое множество в $R^k \times I$, а $\sigma \geqslant 0$. Тогда $T_\sigma(X)$ — множество позиций $[z_0, \mu_0]$, для каждой из которых по любому измеримому на отрезке $[0, \sigma]$ управлению $v(t) \in Q$ можно указать измеримое управление $u(t)$, удовлетворяющее при $0 \leqslant t \leqslant \sigma$ ограничению (1.2), такое, чтобы $[z(\sigma), \mu(\sigma)] \in X$. Здесь $[z(\sigma), \mu(\sigma)]$ — позиция игры в момент времени σ.

Для заданного числа $t_1 > 0$ требуется построить семейство непустых замкнутых множеств $W(t) \subset R^k \times I$, определенных при $0 \leqslant t \leqslant t_1$ и удовлетворяющих условиям $W(0) \subset Z$ и

(1.4) $$W(t) \subset T_\sigma(W(t-\sigma)) \quad \text{при } 0 < \sigma < t \leqslant t_1$$

Отображение T_σ обладает рядом свойств [4]. Следующие свойства будут использованы в п. 2.

Свойство 1. $T_{\sigma_1}(T_{\sigma_2}(X)) \subset T_{\sigma_1+\sigma_2}(X)$

Свойство 2. $T_\sigma(X) \subset T_\sigma(X_1)$ при $X \subset X_1$

Свойство 3. Если X замкнуто и $T_\sigma(X) \neq \varnothing$, то $T_\sigma(X)$ замкнуто.

2. Опишем один способ построения u-стабильного моста.

Пусть задано замкнутое множество Y в q-мерном линейном нормированном пространстве R^q с нормой $\| y \|$, $y \in R^q$. Предположим, что при каждых $y \in Y$ и $t \geqslant 0$ определено непустое замкнутое множество $B(t, y) \subset R^k \times I$.

Условие А. Если последовательность векторов $y_n \in Y$ сходится к вектору $y \in Y$, а точка $[z, \mu]$ принадлежит множеству $B(t, y)$, то существует последовательность точек $[z_n, \mu_n] \in B(t, y_n)$, которая сходится к точке $[z, \mu]$.

Пусть задано число $\varepsilon > 0$ и пусть при любых $y \in Y$, $t \geqslant 0$, $0 < \sigma \leqslant \varepsilon$ определена функция $f(\sigma, t, y)$ со значениями во множестве Y.

Условие Б. Для любых $y \in Y$, $t \geqslant 0$, $0 < \sigma \leqslant \varepsilon$ выполнено включение $T_\sigma(B(t, y)) \supset B(t+\sigma, f(\sigma, t, y))$.

Условие В. При всех $y \in Y$ и $t \geqslant 0$ определена непрерывная q-мерная вектор-функция $F(t, y)$, такая, что для любых последовательностей $y_i \in Y$, $t_i \geqslant 0$ и $0 < \sigma_i \leqslant \varepsilon$, сходящихся соответственно к y, t и 0, выполнено равенство

(2.1) $$\lim_{i\to\infty} (f(\sigma_i, t_i, y_i) - y_i) / \sigma_i = F(t, y)$$

Теорема 1. Пусть через точку $y_0 \in Y$ проходит единственное на отрезке $[0, t_1]$ решение $y(t) \in Y$ задачи Коши

(2.2) $$y^{\cdot} = F(t, y), \quad y(0) = y_0$$

Тогда семейство множеств $W(t) = B(t, y(t))$ удовлетворяет включению (1.4).

Замечание. Единственность решения $y(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant t_1$ понимается в том смысле, что если $y_1(t) \in Y$ — решение задачи (2.2) при $0 \leqslant t \leqslant t_2$ и $t_2 < t_1$, то $y_1(t) = y(t)$ для $0 \leqslant t \leqslant t_2$.

Доказательство теоремы. Зафиксируем число $\gamma > 0$ и рассмотрим замкнутое ограниченное множество

(2.3) $$Y_1 = \{y \in Y: \| y - y(t) \| \leqslant \gamma \quad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant t_1\}$$

Как следует из условия В, существует число $0 < \varepsilon_0 \leqslant \varepsilon$, такое, что

(2.4) $$\| f(\sigma, t, y) - y \| \leqslant (\sigma\gamma) / \varepsilon_0' \quad \text{при} \quad y \in Y_1, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad 0 < \sigma \leqslant \varepsilon_0$$

Возьмем любые числа $0 \leqslant t_0 < t_2 \leqslant t_1$, удовлетворяющие условию $\sigma = t_2 - t_0 \leqslant \varepsilon_0$. Покажем, что

(2.5) $$T_\sigma(B(t_0, y(t_0))) \supset B(t_2, y(t_2))$$

Отсюда будет следовать, что множество $W(t) = B(t, y(t))$ удовлетворяет включению (1.4) при $0 \leqslant t \leqslant t_1$ и $0 < \sigma \leqslant \min(\varepsilon_0; t)$. Применяя свойства 1 и 2 отображения T_σ, можно получить, что включение (1.4) будет выполняться при всех $0 < \sigma < t \leqslant t_1$.

Разобьем отрезок $[t_0, t_2]$ на n равных частей длиной $\sigma_n = \sigma / n$. Рассмотрим конечный набор векторов

(2.6) $$y_n(0) = y(t_0), \ldots, \quad y_n(i) = f(\sigma_n, t_0 + i\sigma_n, y_n(i-1)), \quad i = 1, \ldots, n$$

Как следует из условия Б и из свойств 1 и 2 отображения T_σ, при каждом n выполнено следующее включение:

(2.7) $$T_\sigma(B(t_0, y(t_0))) \supset B(t_2, y_n(n))$$

Согласно свойству 3 отображения T_σ, множество, стоящее в левой части включения (2.7), замкнутое. Поэтому, как следует из условия А, для доказательства включения (2.5) достаточно показать, что некоторая подпоследовательность последовательности векторов $y_n(n)$ сходится к вектору $y(t_2)$.

При каждом n векторы (2.6) обладают следующими свойствами:

(2.8) $$y_n(i) \in Y_1, \quad \| y_n(i) - y_n(i-1) \| \leqslant (\sigma_n \gamma) / \varepsilon_0, \quad i = 1, \ldots, n$$

Доказательство этих свойств проводится индукцией по i с использованием неравенства (2.4) и определения множества (2.3).

Определим при $t_0 \leqslant t \leqslant t_2$ ломаную

(2.9) $$x_n(t) = y_n(i-1) + \frac{y_n(i) - y_n(i-1)}{\sigma_n}(t - t_0 - (i-1)\sigma_n)$$

$$(i-1)\sigma_n \leqslant t - t_0 < i\sigma_n$$

$$x_n(t) = y_n(n) \quad \text{при } t = t_2$$

Функция $x_n(t)$ непрерывна при $t_0 \leqslant t \leqslant t_2$ и, как следует из неравенства (2.8), $\| x_n^{\boldsymbol\cdot}(t) \| \leqslant \gamma / \varepsilon_0$ для почти всех $t_0 \leqslant t \leqslant t_2$. Отсюда следует, что функция $x_n(t)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной γ / ε_0. Стало быть, последовательность функций $x_n(t)$ удовлетворяет условию теоремы Арцела. Поэтому (переходя, если нужно, к подпоследовательности) можно считать, что последовательность $x_n(t)$ равномерно сходится к некоторой функции $x(t)$. Предельная функция $x(t)$ также удовлетворяет условию Липшица с той же постоянной γ / ε_0. Поэтому у нее почти всюду при $t_0 \leqslant t \leqslant t_2$ существует производная. Кроме того, из включения (2.8) и первого равенства в (2.6) следует, что

(2.10) $$x(t_0) = y(t_0), \quad x(t) \in Y_1 \subset Y \quad \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant t_2$$

Покажем, что

(2.11) $$x^{\boldsymbol\cdot}(t) = F(t, x(t)) \quad \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant t_2$$

Пусть в точке $t_0 \leqslant t < t_2$ существует производная $x^{\cdot}(t)$. Для любого $0 < h < t_2 - t$ выполнено равенство

$$(2.12) \qquad (x(t+h) - x(t)) / h = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n^{\cdot}(t + h\tau)\, d\tau$$

Из формул (2.6) и (2.9) следует, что для почти всех $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ выполнено равенство

$$(2.13) \qquad x_n^{\cdot}(t + h\tau) = (f(\sigma_n, t_0 + \tau_n\sigma_n, x_n(t_0 + \tau_n\sigma_n)) - x_n(t_0 + \tau_n\sigma_n)) / \sigma_n$$

Здесь посредством τ_n обозначена целая часть числа $(t + h\tau - t_0) / \sigma_n$. Так как числовая последовательность $\tau_n\sigma_n$ сходится к $t + h\tau - t_0$ при $n \to \infty$, а последовательность функций $x_n(t)$ равномерно сходится к $x(t)$, то $\lim x_n(t_0 + \tau_n\sigma_n) = x(t + h\tau)$ при $n \to \infty$. Поэтому из равенства (2.13) и из условия B следует, что для почти всех $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ последовательность $x_n^{\cdot}(t + h\tau)$ сходится к $F(t + h\tau, x(t + h\tau))$ при $n \to \infty$. Кроме того, $\| x_n^{\cdot}(t + h\tau) \| \leqslant \gamma / \varepsilon_0$. Следовательно, применяя к равенству (2.12) теорему Лебега [5], получим

$$(x(t+h) - x(t)) / h = \int_0^1 F(t + h\tau, x(t + h\tau))\, d\tau$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $h \to 0$ и используя непрерывность функции $F(t, y)$ при $t \geqslant 0$, $y \in Y$, а также включение (2.10), получим (2.11).

Стало быть, равенство (2.11) выполнено для почти всех $t_0 \leqslant t \leqslant t_2$. Из непрерывности функции $F(t, y)$ следует, что оно выполнено при всех $t_0 \leqslant t \leqslant t_2$. Поэтому, учитывая соотношения (2.10) и условие единственности решения задачи (2.2) при $0 \leqslant t \leqslant t_1$, получим равенство $x(t) = y(t)$ для всех $t_0 \leqslant t \leqslant t_2$.

Таким образом, доказано, что существует подпоследовательность последовательности векторов $y_n(n) = x_n(t_2)$, которая сходится к вектору $y(t_2)$.

3. Будем строить u-стабильный мост $W(t)$ для игры из п. 1 при следующих предположениях:

1°. $\pi e^{tC} Q = \alpha(t) U, \quad \alpha(t) \geqslant 0$ при $t \geqslant 0$

2°. $\{\pi e^{tC} Nu\colon |u| \leqslant 1\} = \beta(t) S, \quad \beta(t) \geqslant 0$ при $t \geqslant 0$

3°. $S \overset{*}{-} \nu U \neq \varnothing$ при $0 \leqslant \nu \leqslant 1$

Здесь U и S — выпуклые компакты в R^m, причем S — симметрический относительно начала координат, содержащий нулевой вектор в качестве внутренней точки; $S \overset{*}{-} \nu U$ — геометрическая разность [6] множеств S и νU; $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — непрерывные скалярные функции.

Прежде всего отметим, что функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ могут обращаться в нуль только в изолированных точках. В противном случае можно показать, что они тождественно равны нулю.

Предположение 4°. Функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ не равны тождественно нулю и $\lim [\alpha(\tau) / \beta(\tau)] = \rho(t)$ при $\tau \to t$, где $\rho(t)$ — непрерывная при $t \geqslant 0$ функция.

Введем обозначение

(3.1) $\pi_1(t) = \pi e^{tC}$

Тогда из предположений 1° и 2° можно получить, что

(3.2) $$\int_0^\sigma \pi_1(t+\sigma-\tau)\,Q\,d\tau = \Big(\int_t^{t+\sigma}\alpha(\tau)\,d\tau\Big)\,U$$

(3.3) $$\Big\{\int_0^\sigma \pi_1(t+\sigma-\tau)\,u(\tau)\,d\tau : \int_0^\sigma |u(\tau)|^2\,d\tau = p\Big\} = \Big(p\int_t^{t+\sigma}\beta^2(\tau)\,d\tau\Big)^{1/2} S$$

При каждых $t \geqslant 0$, $y_1 \geqslant 0$, $y_2 \geqslant 0$ и $\sigma > 0$ положим

(3.4) $$B(t, y_1, y_2) = \{[z, \mu]:\ \pi_1(t)z \in y_1(\mu^{1/2}S \overset{*}{-} y_2U),\ \mu^{1/2} \geqslant y_2\}$$

(3.5) $$f_1(\sigma, t, y_1, y_2) = \Big(y_1y_2 + \int_t^{t+\sigma}\alpha(\tau)\,d\tau\Big) \Big/ f_2(\sigma, t, y_1, y_2)$$

(3.6) $$f_2(\sigma, t, y_1, y_2) = \Big(y_2^2 + \Big[\Big(\int_t^{t+\sigma}\alpha(\tau)\,d\tau\Big)^2 \Big/ \int_t^{t+\sigma}\beta^2(\tau)\,d\tau\Big]\Big)^{1/2}$$

Лемма. $T_\sigma(B(t, y_1, y_2)) \supset B(t+\sigma, f_1(\sigma, t, y_1, y_2), f_2(\sigma, t, y_1, y_2))$.

Доказательство. Пусть точка $[z, \mu]$ принадлежит множеству, стоящему в правой части доказываемого включения. Тогда из (3.4) и (3.6) вытекает, что

(3.7) $$\pi_1(t+\sigma)\,z \in f_1(\sigma, t, y_1, y_2)\,(\mu^{1/2}S \overset{*}{-} f_2(\sigma, t, y_1, y_2)\,U)$$

(3.8) $$\mu^{1/2} \geqslant f_2(\sigma, t, y_1, y_2) > y_2$$

Из определения отображения T_σ, из вида множества (3.4), а также из равенств (3.1) — (3.3) следует, что точка $[z, \mu]$ будет принадлежать множеству $T_\sigma(B(t, y_1, y_2))$, если при некотором $p \geqslant 0$ и $(\mu - p)^{1/2} \geqslant y_2$ выполнено следующее включение:

(3.9) $$\pi_1(t+\sigma)\,z \in [(\varepsilon_1 S \overset{*}{-} \delta_1 U) + \varepsilon_2 S] \overset{*}{-} \delta_2 U$$

Здесь

(3.10) $$\varepsilon_1 = y_1(\mu - p)^{1/2}, \quad \delta_1 = y_1y_2$$

$$\varepsilon_2 = \Big(p\int_t^{t+\sigma}\beta^2(\tau)\,d\tau\Big)^{1/2}, \quad \delta_2 = \int_t^{t+\sigma}\alpha(\tau)\,d\tau$$

Укажем теперь число $p \geqslant 0$, удовлетворяющее условию $(\mu - p)^{1/2} \geqslant y_2$, при котором множество, стоящее в правой части включения (3.9), совпадает с множеством, стоящим в правой части включения (3.7). Положим

(3.11) $$p = \mu(1 - [y_2^2 / f_2^2(\sigma, t, y_1, y_2])) \geqslant 0$$

Тогда, как следует из неравенства (3.8)

$$(\mu - p)^{1/2} = (\mu^{1/2}y_2) / f_2(\sigma, t, y_1, y_2) \geqslant y_2$$

Подставляя это значение p в соотношения (3.10) и используя обозначение (3.6), можно получить равенство $\varepsilon_1\delta_2 = \varepsilon_2\delta_1$. Отсюда следует, что $\varepsilon_1 = \varphi\varepsilon_2$, $\delta_1 = \varphi\delta_2$ при некотором $\varphi \geqslant 0$. Поэтому множество, стоящее в правой части включения (3.9), имеет вид

(3.12) $$((\varphi(\varepsilon_2 S) \overset{*}{-} \varphi(\delta_2 U)) + \varepsilon_2 S) \overset{*}{-} \delta_2 U$$

В работах [4,7] при доказательстве равенства $T_{\sigma_1+\sigma_2} = T_{\sigma_1}T_{\sigma_2}$ для игр с простым движением показано, что множество вида (3.12) равняется

$$(3.13)\qquad (\varphi\varepsilon_2 + \varepsilon_2)\, S \overset{*}{-} (\varphi\delta_2 + \delta_2)\, U = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\, S \overset{*}{-} (\delta_1 + \delta_2)\, U$$

Подставляя значения p (3.11) в формулы (3.10) и используя обозначения (3.5), (3.6), получим $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \mu^{1/4} f_1(\sigma, t, y_1, y_2)$, $\delta_1 + \delta_2 = f_1(\sigma, t, y_1, y_2)\cdot f_2(\sigma, t, y_1, y_2)$. Следовательно, множество (3.13) и, стало быть, правая часть включения (3.9) совпадают с множеством, стоящим в правой части включения (3.7).

Таким образом, условие Б из п. 2 выполнено, причем вектор-функция $f(\sigma, t, y)$ определена при $t \geqslant 0$, $\sigma > 0$, $y_1 \geqslant 0$ и $y_2 \geqslant 0$ соотношениями (3.5) и (3.6). Из соотношений (3.5), (3.6) и из предположения 4° можно получить, что при $t \geqslant 0$, $y_1 \geqslant 0$ и $y_2 > 0$ предел (2.1) имеет следующий вид:

$$(3.14)\qquad F_1(t, y_1, y_2) = -[\rho(t) / 2y_2^2] + \alpha(t) / y_2$$
$$F_2(t, y_1, y_2) = \rho(t) / 2y_2$$

Эти функции не определены при $y_2 = 0$. Поэтому зафиксируем произвольное число $\delta > 0$ и в качестве множества Y, для которого сформулированы условия А, Б и В в п. 2, рассмотрим $y_1 \geqslant 0$, $y_2 \geqslant \delta$. Тогда на этом множестве Y функции (3.5), (3.6), (3.14) и семейство множеств (3.4) удовлетворяют условиям Б, В.

По предположению, множество S содержит нулевой вектор в качестве внутренней точки. Используя это, можно показать, что семейство множеств (3.4) удовлетворяет условию А.

Пусть $y_1(t)$ и $y_2(t)$ удовлетворяют уравнению (2.2) с правой частью (3.14) и начальным условиям $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = \delta$. Тогда на основании теоремы 1 семейство множеств $W(t)$, которое получается из (3.4) при подстановке $y_1 = y_1(t)$ и $y_2 = y_2(t)$, удовлетворяет включению (1.4). Кроме того, как видно из (1.3) и (3.4), $W(0) = B(0, 0, \delta) \subset Z$.

Таким образом, найденное семейство множеств $W(t)$ является *u*-стабильным мостом, ведущим на цель (1.3).

Поступила 6 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
2. *Ушаков В. Н.* Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с интегральными ограничениями. ПММ, 1972, т. 36, вып. 1.
3. *Субботин А. И., Ушаков В. Н.* Альтернатива для дифференциальной игры сближения — уклонения при интегральных ограничениях на управления игроков. ПММ, 1975, т. 39, вып. 3.
4. *Пшеничный Б. Н., Сагайдак М. И.* О дифференциальных играх с фиксированным временем. Кибернетика, 1970, № 2.
5. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1968.
6. *Понтрягин Л. С.* О линейных дифференциальных играх. 2. Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 4.
7. *Пшеничный Б. Н.* Игра с простым движением и выпуклым терминальным множеством. Теория оптимальных решений. Тр. Ин-та кибернетики АН УССР, 1969, № 3.