Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 62—50

ОБ ОДНОЙ АЛЬТЕРНАТИВЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ НЕСКОЛЬКИХ ЛИЦ

С. В. Лутманов

(Свердловск)

Рассматривается позиционная дифференциальная игра нескольких лиц. Каждый из участников имеет целью привести текущую позицию на свое целевое множество внутри своих фазовых ограничений. При определенных условиях доказывается теорема, смысл которой состоит в следующем. Для каждой начальной позиции либо существует единственный игрок, разрешающий свою задачу наведения при всех возможных противодействиях оставшихся игроков, либо найдется такой способ управления всех игроков, что ни один из них не может решить свою задачу наведения, если все остальные придерживаются указанного способа управления. Доказательство основывается на утверждении об альтернативе для позиционных дифференциальных игр двух лиц из книги [1]. Различные вопросы, связанные с позиционными дифференциальными играми нескольких лиц, рассмотрены также в работах [2–4].

1. Основные понятия и определения. Рассмотрим систему, описываемую уравнением

$$dx/dt = f(t, x, u_1, \ldots, u_k), \quad u_i \in P_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

$$f: R \times E^n \times E^{n_1} \times \ldots \times E^{n_k} \to E^n$$

Здесь $x \in E^n$ — фазовый вектор, u_i — управление i-го игрока, P_i — компакт в пространстве E^{n_i}, функция f непрерывна по всем аргументам.

Будем придерживаться следующих обозначений:

$$P = P_1 \times \ldots \times P_k, \quad P^{(i)} = P_1 \times \ldots \times P_{i-1} \times P_{i+1} \times \ldots \times P_k$$

$$u = (u_1, \ldots, u_k), \quad u^{(i)} = (u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_k)$$

$$(u \in P, \ u^{(i)} \in P^{(i)})$$

Запись $(u_i^*, u^{(i)})$ будет означать $(u_1, \ldots, u_i^*, \ldots, u_k)$. Индекс i всюду принимает значения $1, 2, \ldots, k$ (k — число игроков). Относительно функции f дополнительно предположим:

1) существует такая постоянная $\varkappa > 0$, что при любом x равномерно по $t \in R$ и $u \in P$

$$\| f(t, x, u) \| \leqslant \varkappa (1 + \| x \|)$$

2) для каждого ограниченного множества G из пространства E^{n+1} позиций $\{t, x\}$ существует такая положительная постоянная λ_G, что при всех $\{t, x^{(1)}\} \in G$, $\{t, x^{(2)}\} \in G$ и $u \in P$

$$\| f(t, x^{(1)}, u) - f(t, x^{(2)}, u) \| \leqslant \lambda_G \| x^{(1)} - x^{(2)} \|$$

3) для любого вектора $s \in E^n$, любой позиции $\{t, x\} \in E^{n+1}$ и любого номера i

$$\min_{u^{(i)} \in P^{(i)}} \max_{u_i \in P_i} s' \cdot f(t, x, u_i, u^{(i)}) = \max_{u_i \in P_i} \min_{u^{(i)} \in P^{(i)}} s' \cdot f(t, x, u_i, u^{(i)})$$

Последним свойством, в частности, обладают функции вида

$$f(t, x, u_1, \ldots, u_k) = f^{(1)}(t, x, u_1) + \ldots + f^{(k)}(t, x, u_k)$$

Определение 1. Стратегией i-го игрока будем называть функцию U_i: $E^{n+1} \to P_i$.

Пусть Δ — разбиение полуоси $[t_*, \infty)$ точками τ_s, $s = 0, 1, 2, \ldots$, где $\tau_s < \tau_{s+1}$ при всех s и $\tau_0 = t_*$.

Определение 2. Ломаной Эйлера $x_\Delta[t, t_*, x_*, U_{i_1}, \ldots, U_{i_l}]$, $t \in [t_*, \infty)$, выходящей из позиции $\{t_*, x_*\}$ и порожденной стратегиями $U_{i_1}, \ldots, U_{i_l}$ l игроков $(1 \leqslant l \leqslant k)$, назовем всякую абсолютно непрерывную функцию, удовлетворяющую дифференциальным уравнениям

$$dx_\Delta / dt = f(t, x_\Delta[t], U_{i_1}[\tau_s, x_\Delta[\tau_s], \ldots, U_{i_l}[\tau_s, x_\Delta[\tau_s]]$$

$$u_{i_{l+1}}[t], \ldots, u_{i_k}[t]), \quad \tau_s \leqslant t \leqslant \tau_{s+1}, \quad s = 0, 1, 2, \ldots, \quad x_\Delta[t] = x_*$$

Здесь $u_{i_j}[\cdot]$, $j = l + 1, \ldots, k$ — произвольные интегрируемые по Лебегу функции, для которых $u_{i_j}[t] \in P_{i_j}$, $t \in [t^*, \infty)$.

Определение 3. Движением, выходящим из позиции $\{t_*, x_*\}$ и порожденным стратегиями $U_{i_1}, \ldots, U_{i_l}$ l игроков, назовем всякую функцию $x[\cdot]$, для которой на любом отрезке $[t_*, \vartheta]$ найдется последовательность ломаных Эйлера $x_{\Delta^{(p)}}[t, t_*, x_*^{(p)}, U_{i_1}, \ldots, U_{i_l}]$, $t \in [t_*, \infty)$ $(p = 1, 2 \ldots)$, равномерно сходящаяся к ней на этом отрезке, при условии $\lim \sup_s (\tau_{s+1}^{(p)} - \tau_s^{(p)}) = 0$, когда $p \to \infty$. Совокупность всех движений, выходящих из позиции $\{t_*, x_*\}$ и порожденных стратегиями $U_{i_1}, \ldots, U_{i_l}$ l игроков, назовем пучком движений $X[t_*, x_*, U_{i_1}, \ldots, U_{i_l}]$.

Пусть в пространстве позиций E^{n+1} заданы $2k$ замкнутых множеств $M_1, \ldots, M_k, N_1, \ldots, N_k$, таких, что $M_i \subset N_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Определение 4. Для абсолютно непрерывной функции $x[t]$ $(t \in [t_*, \infty))$ выполнено условие встречи с множеством M_i к моменту ϑ, если существует такой момент времени $\tau \in [t_*, \vartheta]$, что $x[\tau] \in M_i(\tau)$ и $x[t] \in N_i(t)$ при $t \in [t_*, \tau]$.

Здесь и далее $A(t) = \{x \mid \{t, x\} \in A\}$ при любом $A \subset E^{n+1}$.

Определение 5. Пусть A^ε — открытая ε-окрестность множества $A \subset E^{n+1}$ (при $A = \varnothing$ полагаем $A^\varepsilon = \varnothing$). Будем говорить, что абсолютно непрерывная функция $x[t]$ $(t \in [t_*, \infty))$ уклоняется от множества M_i^ε вплоть до момента ϑ $(\vartheta \geqslant t_*)$, если $x[t] \overline{\in} M_i^\varepsilon(t)$ для любого $t < \tau$. Здесь $\tau = \vartheta$, когда $x[t] \in N_i^\varepsilon(t)$ для всех $t \in [t_*, \vartheta]$, и $\tau = \min \{\tau^* \mid x[\tau^*] \overline{\in} N_i^\varepsilon(\tau^*)\}$ в противном случае.

Пусть M и N — произвольные замкнутые множества из пространства E^{n+1}, причем $M \subset N$. Позиционную дифференциальную игру двух лиц, в которой i-й игрок решает задачу наведения (в постановке из [1]) к моменту ϑ на множество M внутри фазовых ограничений N и в которой ему противодействует объединение оставшихся игроков, будем обозначать символом $(i, (i), M, N, \vartheta)$. Символом $((i), i, M, N, \vartheta)$ обозначим дифференциальную игру двух лиц, в которой задачу наведения решает совокупность всех игроков, за исключением i-го, выступающего теперь уже в качестве игрока-противника.

Пусть W_i — максимальный стабильный мост в игре $(i, (i), M_i, N_i, \vartheta)$. Для краткости множество W_i будем называть максимальным i-стабильным мостом. По аналогии с ранее принятыми обозначениями под символом U будем понимать набор из k стратегий $U_1, \ldots, U_k$, а под символом $U^{(i)}$ — набор из $k-1$ стратегий $U_1, \ldots, U_{i-1}, U_{i+1}, \ldots, U_k$.

2. Формулировка и доказательство основного результата.

Теорема. Пусть $W_i \cap W_j = \varnothing$ при $i \neq j$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Тогда для всякой начальной позиции $\{t_0, x_0\}$ либо существуют номер i и стратегия U_i^e i-го игрока, такие, что каждое движение из пучка $X[t_0, x_0, U_i^e]$ будет удовлетворять условию встречи с множеством M_i к моменту ϑ, либо найдутся $\alpha > 0$ и набор $U^\circ = \{U_1^\circ, \ldots, U_k^\circ\}$ стратегий k игроков, такие, что для любого i каждое движение из пучка $X[t_0, x_0, U^{(i)\circ}]$, где $U^{(i)\circ} = \{U_1^\circ, \ldots, U_{i-1}^\circ, U_{i+1}^\circ, \ldots, U_k^\circ\}$, будет уклоняться от α-окрестности множества M_i вплоть до момента ϑ.

Доказательство теоремы опирается на две леммы.

Пусть в полупространстве $E_\vartheta^{n+1} = \{\{t, x\} \mid t \leqslant \vartheta\}$ задана система множеств

$$S_1, \ldots, S_k, \quad D^{(1)}, \ldots, D^{(k)} \tag{2.1}$$

обладающая свойствами: 1) множество $D^{(i)}$ замкнуто; 2) $S_i \cap S_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, k$; 3) для всех i множество $S^{(i)} = E_\vartheta^{n+1} \setminus S_i$ — замкнутый стабильный мост в игре $((i), i, D^{(i)}, E_\vartheta^{n+1}, \vartheta)$.

Введенным множествам (2.1) поставим в соответствие набор $U^\circ = \{U_1^\circ, \ldots, U_k^\circ\}$ стратегий k игроков, который будем называть экстремальным к множеству $S = E_\vartheta^{n+1} \setminus (S_1 \cup \ldots \cup S_k)$. Стратегии, входящие в этот набор, определим из следующих условий:

а) если $\{t, x\} \in S_i$ при некотором i и $S(t) = \varnothing$, то $U^{(i)\circ}(t, x)$ находятся из равенства

$$\min_{U^{(i)} \in P^{(i)}} \max_{U_i \in P_i} s_*' \cdot f(t, x, u_i, u^{(i)}) = \max_{u_i \in P_i} s_*' \cdot f(t, x, u_i, u^{(i)\circ}), \quad s_* = x - w_*$$

где w_* — произвольный вектор, удовлетворяющий равенству

$$\| \{t, x\} - \{t, w_*\} \| = \min_{w \in S(t)} \| \{t, x\} - \{t, w\} \|$$

вектор $U_i^\circ(t, x)$ полагается произвольным из P_i;

б) если $\{t, x\} \in S_i$ при некотором i, но $S^{(i)}(t) = \varnothing$, или же $\{t, x\} \in S$, то $U^\circ(t, x)$ — произвольный вектор $u \in P$.

Лемма 1. Пусть U° — набор стратегий k игроков, экстремальный к множеству S. Тогда для любой позиции $\{t_0, x_0\} \in S$ и любого номера i каждое движение из пучка $X[t_0, x_0, U^{(i)\circ}]$ выходит на множество $D^{(i)}$, причем прежде, чем оно покинет множество $S^{(i)}$.

Доказательство. Для любого i набор из $k-1$ стратегий $U^{(i)\circ}$ является экстремальной стратегией к множеству $S^{(i)}$ в игре $((i,\ )\ i,\ D^{(i)},\ E_{\vartheta}^{n+1},\ \vartheta)$. Поэтому в силу стабильности множества $S^{(i)}$ все движения из пучка $X\ [t_*,\ x_*,\ U^{i\circ}]$, где $\{t_*,\ x_*\} \in S^{(i)}$, выйдут на множество $D^{(i)}$, причем прежде, чем покинут множество $S^{(i)}$. Справедливость леммы следует теперь из включения $\{t_0,\ x_0\} \in S$ и равенства $S = \bigcap S^{(i)}$.

Обозначим через W и W_ε, где ε — произвольное положительное число, максимальные стабильные мосты первого игрока в некоторой дифференциальной игре наведения к моменту ϑ на целевые множества M и $\bar{M}^\varepsilon$ внутри фазовых ограничений N и $\bar{N}^\varepsilon$ соответственно (черта сверху означает замыкание).

Лемма 2. Если множество M ограничено, а множество N имеет ограниченную проекцию на ось времени, то по любому $\delta > 0$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $W_\varepsilon \subset W^\delta$.

Доказательство. Действительно, предполагая противное, придем к существованию $\delta > 0$ и монотонно убывающей последовательности $\{\varepsilon_n\}$ положительных чисел, сходящейся к нулю, таких, что $F_{\varepsilon_n} = W_{\varepsilon_n} \cap (E_{\vartheta}^{n+1} \setminus W^\delta) \neq \phi$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ Каждое множество F_{ε_n}, $n = 1, 2, \ldots$ — компакт и $F_{\varepsilon_{n+1}} \subset F_{\varepsilon_n}$ при всех n, поэтому последовательность множеств $\{F_{\varepsilon_n}\}$ имеет непустое пересечение F. Пусть $\{t_*,\ x_*\} \in F$. Тогда $\{t_*,\ x_*\} \overline{\in} W$. Отсюда, используя теорему об альтернативе [1], получим, что $\{t_*,\ x_*\} \in W_\varkappa$ при некотором $\varkappa > 0$. Последнее противоречит включению $\{t_*,\ x_*\} \in W_{\varepsilon_n}$ при всех $n = 1, 2, \ldots$ Это противоречие доказывает лемму.

Доказательство теоремы. Если $\{t_0,\ x_0\} \in W_i$ при некотором i, то, очевидно, имеет место первое утверждение теоремы. Пусть $\{t_0,\ x_0\} \overline{\in} W_i$ ни при каком i. Покажем, что будет справедливо второе утверждение теоремы.

Достаточно рассмотреть случай, когда множества M_i, N_i ограничены.

Действительно, обозначим через $W_i{}^*$ максимальный стабильный мост в игре $(i,\ (i),\ M_i{}^*,\ N_i{}^*,\ \vartheta)$. Здесь $M_i{}^* = M_i \cap B\ (t_0,\ x_0)$, $N_i{}^* = N_i \cap B\ (t_0,\ x_0)$, а $B\ (t_0,\ x_0)$ — замкнутый шар в E^{n+1} столь большого радиуса, что все движения, выходящие из позиции $\{t_0,\ x_0\}$, на отрезке времени $[t_0,\ \vartheta]$ остаются в этом шаре. Очевидно, что $\{t_0,\ x_0\} \overline{\in} \bigcup W_i{}^*$. Заметим теперь, что второе утверждение теоремы для позиции $\{t_0,\ x_0\}$ относительно множеств M_i, N_i имеет место тогда и только тогда, когда для позиции $\{t_0,\ x_0\}$ справедливо второе утверждение теоремы относительно множеств $M_i{}^*$, $N_i{}^*$.

Пусть $W_{i\varkappa}$, $\varkappa > 0$ — максимальный стабильный мост в игре $(i,\ (i),\ M_i{}^\varkappa,\ N_i{}^\varkappa,\ \vartheta)$. Для каждого $\varepsilon > 0$ рассмотрим систему множеств

$$S_{i\varepsilon} = \bigcup_{\varkappa \in [0,\ \varepsilon)} W_{i\varkappa}, \quad D_\varepsilon^{(i)} = (N_i{}^\varepsilon)^c \cup \{\{t,\ x\} \mid t = \vartheta\}$$

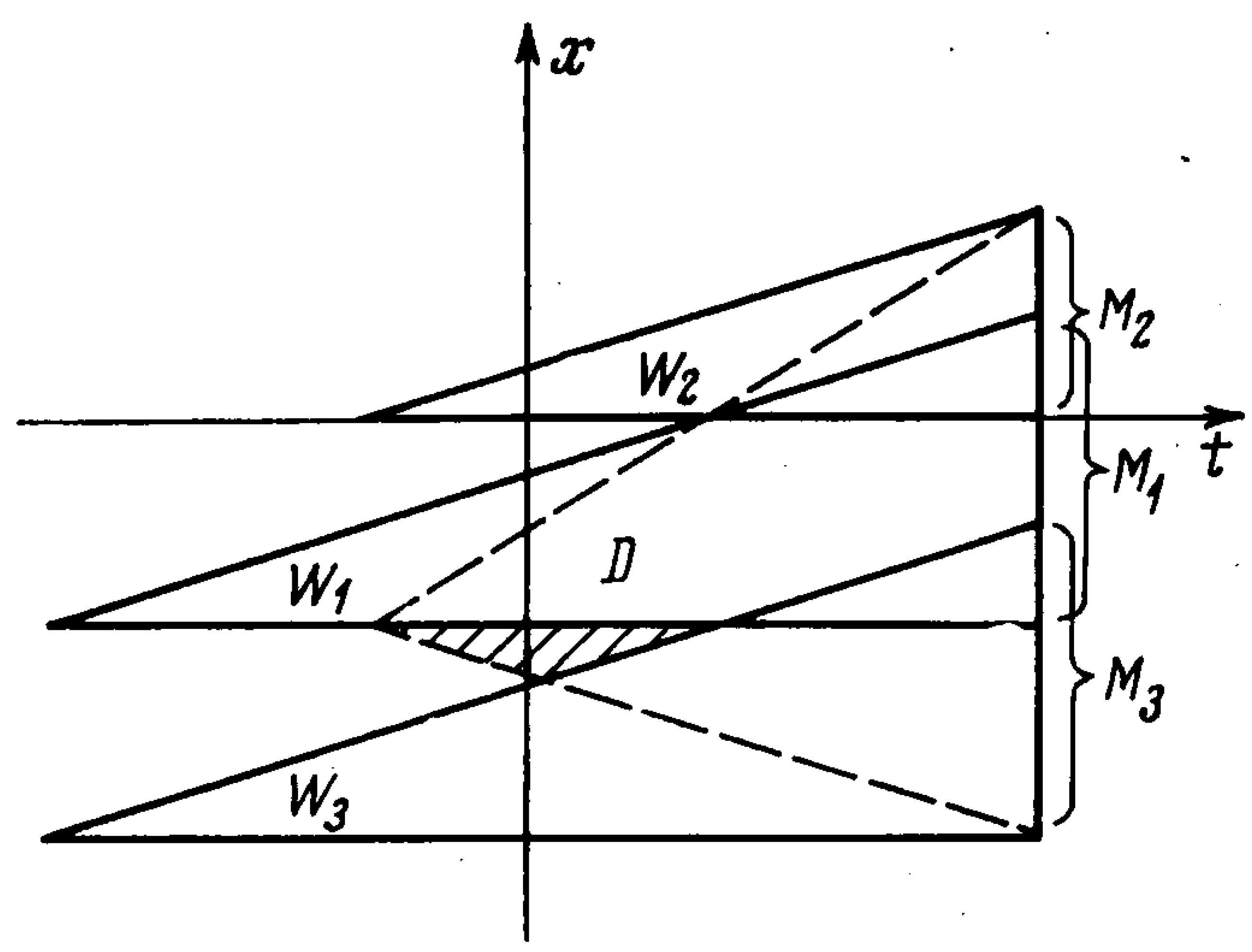
Докажем, что она обладает всеми свойствами системы (2.1) для достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Действительно, выполнение свойства 1) очевидно. Свойство 2) следует из леммы 2. Покажем выполнение свойства 3). По построению $S_{i\varepsilon}$ — множество всех позиций, для которых, как из начальных, разрешима задача i-го игрока о встрече с множеством $\bar{M}_i{}^\varkappa$ в пределах множества $\bar{N}_i{}^\varkappa$ к моменту ϑ хотя бы для одного $\varkappa \in [0,\ \varepsilon)$. Следовательно, $S_{i,\,\varepsilon}$ — множество всех позиций, для которых, как из начальных, разрешима задача об уклонении для i-го игрока к моменту ϑ от множества $(N_i^\varepsilon) \bigcup \{\{t, x\} \mid t = \vartheta\}$ внутри множества $(M_i^\varepsilon)^c$. Тогда из теоремы об альтернативе [1] следует, что множество $E_\vartheta^{n+1} \setminus S_{i\varepsilon}$ — максимальный стабильный мост в игре $((i), i, (N_i^\varepsilon)^c \bigcup \{\{t, x\} \mid t = \vartheta\}, (M_i^\varepsilon)^c, \vartheta)$. Следовательно, это замкнутый стабильный мост для игры $((i), i, (N_i^\varepsilon)^c \bigcup \{\{t, x\} \mid t = \vartheta\}, E_\vartheta^{n+1}, \vartheta)$, что и означает выполнение свойства 3).

Применяя лемму 1, получим, что если $\{t_0, x_0\} \in S_\varepsilon = E_\vartheta^{n+1} \setminus (S_{1\varepsilon} \bigcup \ldots \bigcup S_{k\varepsilon})$ и $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то для любого i каждое движение в пучке $X\,[t_0, x_0, U^{(i)\circ}]$, где U° — набор стратегий, экстремальный к множеству S_ε, выйдет на множество $(N_i^\varepsilon) \bigcup \{\{t, x\} \mid t = \vartheta\}$ прежде, чем покинет множество $S_\varepsilon^{(i)} = E_\vartheta^{n+1} \setminus S_{i\varepsilon}$. В силу очевидного включения $M_i^\varepsilon \subset S_{i\varepsilon}$ каждое движение из пучка $X\,[t_0, x_0, U^{(i)\circ}]$ уклоняется от ε-окрестности множества M_i. Из леммы 2 следует, что существует столь малое $\varkappa > 0$, что $\{t_0, x_0\} \in S_\varepsilon$ для всех $\varepsilon \leqslant \varkappa$. Это завершает доказательство теоремы.

Замечания. 1°. Пусть $k = 2$, $N_2 = \phi$. Тогда приведенная теорема эквивалентна теореме об альтернативе для дифференциальной игры двух лиц в постановке из [1], если положить $N = N_1$, $M = M_1$.

Действительно, обозначим символом A теорему из [1], а символом B теорему, доказанную в статье. Зафиксируем начальную позицию. Из $N_2 = \phi$ следует, что $W_2 = \phi$. Поэтому первая возможность теоремы A имеет место тогда и только тогда, когда имеет место первая возможность теоремы B. Пусть для выбранной начальной позиции реализуется вторая возможность теоремы A, т. е. найдется уклоняющая стратегия V° второго игрока. Тогда набор стратегий U_1°, U_2° из теоремы B можно построить, положив $U_2 = V^\circ$, U_1° произвольно. Обратно, если существует указанный выше набор стратегий U_1°, U_2°, то уклоняющую стратегию V° второго игрока можно выбрать из условия $V^\circ = U_2^\circ$.



2°. Для конкретного построения набора стратегий U°, как видно из его определения, можно воспользоваться результатами из [1] для дифференциальных игр двух лиц.

3°. Требование непересекаемости максимальных i-стабильных мостов в условии теоремы существенно. Это видно из следующего примера.

Рассмотрим дифференциальную игру трех лиц

$$
\begin{aligned}
(2.2)\qquad & \dot{x} = u_1 + u_2 + u_3 \\
& u_1 \in [-0.1,\ 0.2], \quad u_2 \in [-0.2,\ 0.1], \quad u_3 \in [0,\ 0.3], \quad \vartheta = 5 \\
& M_1 = \{\{t, x\} \mid t = 5,\ x \in [-2, 1]\}, \quad M_2 = \{\{t, x\} \mid t = 5,\ x \in [0, 2]\} \\
& M_3 = \{\{t, x\} \mid t = 5,\ x \in [-4, -1]\}, \quad N_1 = N_2 = N_3 = E^2
\end{aligned}
$$

Множества M_i, $i = 1, 2, 3$ и соответствующие им максимальные i-стабильные мосты показаны на фигуре. Пусть D — множество всех позиций $\{t, x\}$ в полупространстве E_ϑ^2, таких, что любое движение системы (2.2), выходящее из $\{t, x\}$, попадает на множество $M_1 \bigcup M_2 \bigcup M_3$ (на фигуре множество выделено штриховой линией). Полагаем $S = W \bigcap D$, где

$W = E_\vartheta^2 \setminus (W_1 \cup W_2 \cup W_3)$. Можно проверить, что $S \neq \varnothing$. Для любой позиции $\{t_0, x_0\} \in S$ утверждение теоремы неверно.

Результат, полученный в статье, может оказаться полезным при исследовании дифференциальных игр качества нескольких лиц, где выигрыш одного из игроков влечет проигрыш всех остальных, а в случаях, когда ни один из игроков не выигрывает, каждый участник сохраняет право продолжить борьбу при некоторых измененных условиях.

Поступила 15 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
2. *Габриелян М. С.* Задача о сближении групповых управляемых объектов. Изв. АН АрмССР. Механика, 1976, т. 29, № 3.
3. *Чикрий А. А.* Линейная задача убегания от нескольких преследователей. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1976, № 4.
4. *Starr A. W., Ho Y. C.* Nonzero-sum differentiol games J. Optimizat. Theory Appl., 1969, vol. 3, No. 3.