Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ИЗНОСА

Л. А. Галин, И. Г. Горячева

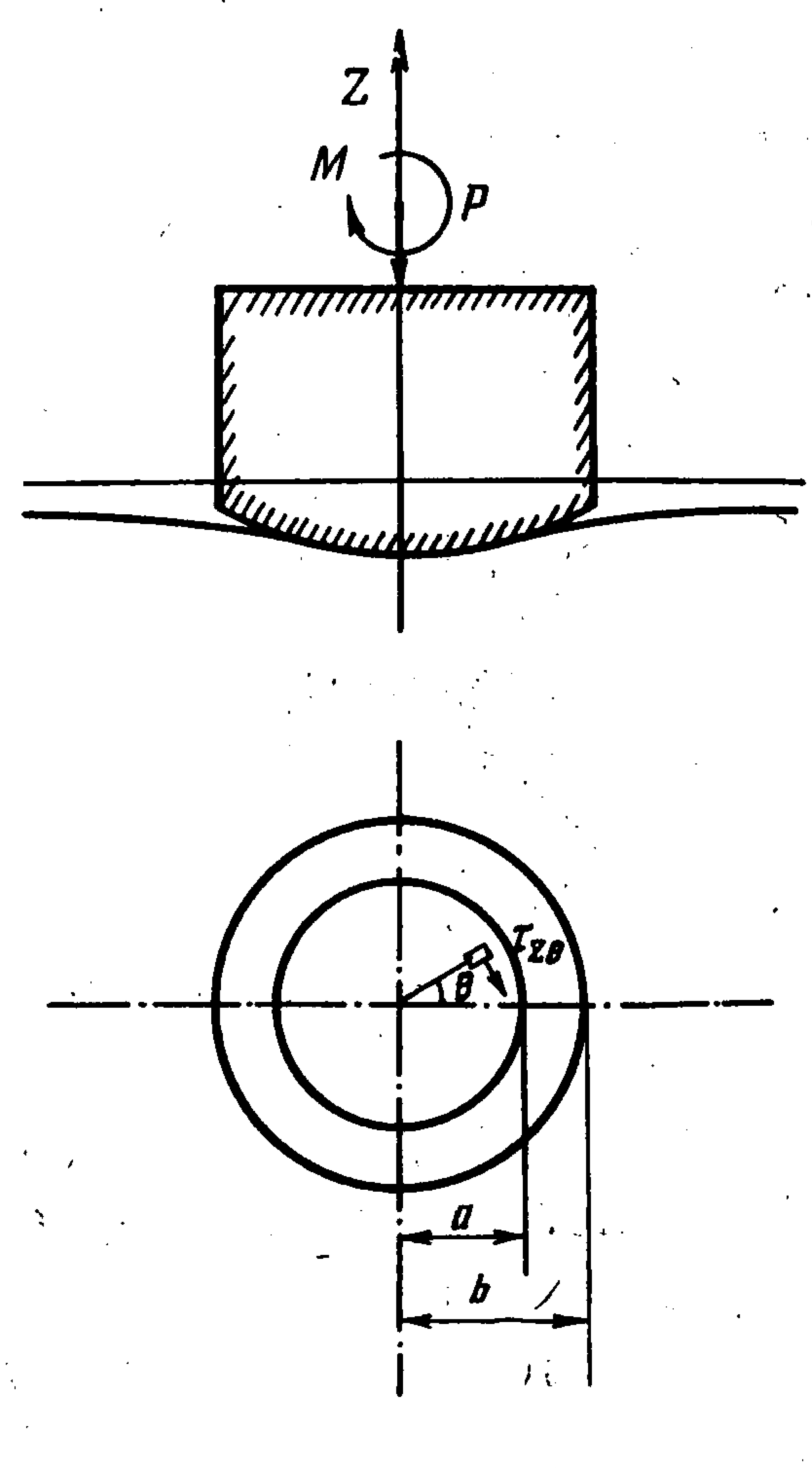
(Москва)

Дается решение контактной задачи теории упругости о вдавливании штампа, ограниченного поверхностью вращения, в упругое полупространство с учетом износа полупространства, имеющего место при вращении штампа. Предполагается, что износ носит абразивный характер [1,2]. При этом считается, что в процессе износа штамп не перемещается вдоль своей оси, в результате чего давление, возникающее между штампом и основанием, с течением времени будет уменьшаться.

На штамп, уравнение торцевой поверхности которого $z = f(\rho)$, находящийся на упругом полупространстве, действуют сила P, направленная по оси вращения, и момент M, поворачивающий его вокруг этой оси, которые будут меняться с течением времени (фигура). Постоянная угловая скорость вращения равна ω. При этом площадка контакта имеет в плане форму круга радиуса $a \leqslant b$, где b — радиус цилиндрической поверхности штампа. При вращении штампа на площадке контакта возникают силы трения $\tau_{z\theta}$, направление которых совпадает с направлением вращения, т. е. они перпендикулярны радиусу площадки контакта, причем

$$\tau_{z\theta} = \mu\sigma_z$$

где σ_z — нормальное давление на площадке контакта, а μ — коэффициент трения между контактирующими телами. Надо иметь в виду, что в рассматриваемой задаче величины напряжений σ_z, σ_ρ, σ_θ, $\tau_{\rho z}$, $\tau_{z\theta}$, $\tau_{\rho\theta}$ и перемещений u_z, u_ρ, u_θ — функции времени t.



Для определения напряженного состояния имеем следующие граничные условия на площадке контакта при $z = 0$ в начальный момент времени (S — круг радиуса a, условие вне круга S ставится на свободной поверхности):

$$
(1)\qquad \begin{aligned}
&u_z = f(\rho), \quad \tau_{z\theta} = \mu\sigma_z, \quad \tau_{\rho z} = 0 \quad \text{на } S\\
&\sigma_z = 0, \quad \tau_{z\theta} = 0, \quad \tau_{\rho z} = 0 \quad \text{вне } S
\end{aligned}
$$

Перемещение основания $w(\rho, t)$ в направлении оси z в любой момент времени представляет собой разность начального перемещения $w_0(\rho) = f(\rho)$ и перемещения основания, обусловленного износом, поэтому напряженное состояние упругого полупространства в произвольный момент времени определяется следующими граничными условиями:

$$
(2)\qquad \begin{aligned}
&u_z = w(\rho, t), \quad \tau_{z\theta} = \mu\sigma_z, \quad \tau_{\rho z} = 0 \quad \text{на } S\\
&\sigma_z = 0, \quad \tau_{z\theta} = 0, \quad \tau_{\rho z} = 0 \quad \text{вне } S
\end{aligned}
$$

Для решения задачи воспользуемся уравнениями Ляме, записанными с учетом осевой симметрии задачи в цилиндрических координатах

$$
(3)\qquad \begin{aligned}
&(\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho u_\rho)}{\partial\rho} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right] + \mu\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial u_\rho}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial\rho}\right] = 0\\
&(\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho u_\rho)}{\partial\rho} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right] - \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{\partial u_\rho}{\partial z} - \rho\frac{\partial u_z}{\partial\rho}\right] = 0\\
&\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial\rho}\right] = 0
\end{aligned}
$$

Принимая во внимание соотношения, связывающие компоненты напряжения с перемещениями, видим, что в осесимметричном случае в упругом теле существуют две независимые системы деформаций и напряжений. Первая из них получается, если положить $u_\theta = 0$, $u_\rho \neq 0$, $u_z \neq 0$. При этом компоненты напряжения $\tau_{\rho\theta}$ и $\tau_{z\theta}$ равны нулю, а остальные отличны от нуля. Вторая система может быть получена, если положить $u_\rho = u_z = 0$, $u_\theta \neq 0$. Тогда компоненты напряжения $\sigma_\theta = \sigma_\rho = \tau_{\rho z} = 0$, а $\tau_{\rho\theta} \neq 0$, $\tau_{z\theta} \neq 0$.

Напряженное состояние в рассматриваемой задаче о вдавливании в упругое полупространство штампа круговой формы в плане, вращающегося вокруг своей оси, может быть разбито на два независимых напряженных состояния. Для определения первого из них имеем следующие граничные условия на площадке контакта при $z = 0$:

$$
(4)\qquad \begin{aligned}
&u_z^* = w(\rho, t), \quad \tau_{z\theta}^* = 0, \quad \tau_{\rho z}^* = 0 \quad \text{на } S\\
&\sigma_z^* = 0, \quad \tau_{z\theta}^* = 0, \quad \tau_{\rho z}^* = 0 \quad \text{вне } S
\end{aligned}
$$

Второе напряженное состояние определяется из таких условий на границе $z = 0$:

$$
(5)\qquad \begin{aligned}
&u_z^{**} = 0, \quad \tau_{z\theta}^{**} = \mu\sigma_z^*, \quad \tau_{\rho z}^{**} = 0 \quad \text{на } S\\
&\sigma_z^{**} = 0, \quad \tau_{z\theta}^{**} = 0, \quad \tau_{\rho z}^{**} = 0 \quad \text{вне } S
\end{aligned}
$$

Сумма этих двух напряженных состояний (т. е. напряжения $\sigma_z = \sigma_z^* + \sigma_z^{**}$, $\tau_{z\theta} = \tau_{z\theta}^* + \tau_{z\theta}^{**}$ и т. д.) будет удовлетворять граничным условиям (2), т. е. будет решением поставленной задачи.

Как видно из (4), величины σ_z^*, $\tau_{z\theta}^*$ и т. д. определяются из решения задачи о вдавливании в упругое полупространство штампа, представляющего собой тело вращения, когда между контактирующими телами отсутствуют силы трения. Перемещения u_z^* при $z = 0$ в этой задаче связаны с нормальными напряжениями σ_z^* ($z = 0$) соотношением [3], которое в полярных координатах в случае осевой симметрии задачи имеет вид

$$u_z^*(\rho, t) = -\frac{1-\nu^2}{\pi E}\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{\sigma_z^*(r, t)\, r\, dr\, d\varphi}{\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\varphi}} \tag{6}$$

Из решения задачи, удовлетворяющей граничным условиям (5), следует, что $u_z^{**} = 0$ и $\sigma_z^{**} = 0$ как на круге, так и вне круга S. Тангенциальное напряжение $\tau_{z\theta}^{**}$ при $z = 0$ можно определить, зная решение граничной задачи (4) для нормального напряжения σ_z^*, действующего на площадке контакта. Очевидно, что $\tau_{z\theta}^{**} = \tau_{z\theta}$, $\sigma_z^* = \sigma_z = -p(\rho, t)$ и $u_z^* = u_z = w(\rho, t)$. Таким образом, перемещения $w(\rho, t)$, имеющие место на площадке контакта, связаны с нормальным давлением $p(\rho, t)$, действующим на границе упругого полупространства, следующим соотношением, справедливым для любого момента времени:

$$w(\rho, t) = \frac{1-\nu^2}{\pi E}\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{p(r, t)\, r\, dr\, d\varphi}{\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\varphi}} \tag{7}$$

Тангенциальные напряжения на границе упругого полупространства определяются следующим образом:

$$\tau_{z\theta}(\rho, t) = -\mu p(\rho, t) \tag{8}$$

Здесь надо иметь в виду, что радиус площадки контакта в процессе износа меняется. Но так как величина износа мала по сравнению с размерами площадки контакта, то этим обстоятельством можно пренебречь.

Запишем уравнение (7) в безразмерных координатах

$$w_1(\rho_1, t) = \frac{1-\nu^2}{\pi E}\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{p_1(r_1, t)\, r_1\, dr_1\, d\varphi}{\sqrt{r_1^2+\rho_1^2-2r_1\rho_1\cos\varphi}} \tag{9}$$

$$\rho_1 = \rho / a, \quad r_1 = r / a, \quad w_1(\rho_1, t) = w(\rho_1 a, t) / a$$

$$p_1(\rho_1, t) = p(\rho_1 a, t)$$

Определим теперь перемещение $w(\rho, t)$ границы упругого полупространства, которое в процессе износа будет меняться. При абразивном износе количество удаленного при износе материала можно считать пропорциональным работе сил трения [1, 2]. В этом случае, с учетом формулы (8), модуль скорости изменения перемещений точек границы полуплоскости будет определяться следующим образом:

$$|\partial w(\rho, t) / \partial t| = k\omega\rho\, |\tau_{z\theta}| = k\omega\rho\mu p(\rho, t) \tag{10}$$

где k — коэффициент пропорциональности между работой сил трения и количеством удаленного материала. Тогда для перемещений точек площадки контакта получим (в безразмерных переменных)

$$w_1(\rho_1, t) = w_{01}(\rho_1) - k\omega\rho_1\mu \int_0^t p_1(\rho_1, \tau)\, d\tau \tag{11}$$

$$w_{01}(\rho_1) = w(\rho_1 a, 0) / a$$

Если положить коэффициент пропорциональности k и коэффициент трения μ постоянными, то перемещения в центре площадки контакта, обусловленные износом, будут равны нулю, что должно привести к росту напряжений в этой точке. Этот процесс в свою очередь приведет к необратимым пластическим деформациям в центре площадки контакта. Таким образом, хотя необратимые формоизменения будут иметь место на всей площадке контакта, излагаемое ниже решение задачи теории упругости будет справедливо во всей зоне контакта за исключением малой области вблизи центра площадки контакта.

Введем в рассмотрение функцию $q(\rho_1, t)$, которая связана с давлением $p_1(\rho_1, t)$ следующим образом:

$$p_1(\rho_1, t) = q(\rho_1, t) / \rho_1 \tag{12}$$

Из (9) и (11) тогда следует уравнение для определения функции $q(\rho_1, t)$ в любой момент времени

$$\frac{1-\nu^2}{\pi E} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{q(r_1, t)\, dr_1\, d\varphi}{\sqrt{r_1^2 + \rho_1^2 - 2r_1\rho_1 \cos\varphi}} = w_{01}(\rho_1) - k\omega\mu \int_0^t q(\rho_1, \tau)\, d\tau \tag{13}$$

Здесь $w_{01}(\rho_1)$ — уравнение торцевой поверхности штампа в безразмерных координатах. Этому начальному перемещению соответствует начальное распределение давления $p_1(\rho_1, 0) = q(\rho_1, 0) / \rho_1$, которое определяется из решения граничной задачи (1) и связано с перемещением $w_{01}(\rho_1)$ соотношением

$$w_{01}(\rho_1) = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{q(r_1, 0)\, dr_1\, d\varphi}{\sqrt{r_1^2 + \rho_1^2 - 2r_1\rho_1 \cos\varphi}} \tag{14}$$

Будем искать частные решения уравнения (13) в виде

$$q(\rho_1, t) = q_\beta(\rho_1) e^{-\beta t}$$

Тогда для определения величин $q_\beta(\rho_1)$ с учетом (14) получим однородное уравнение Фредгольма с симметричным ядром

$$q_\beta(\rho_1) - \beta \int_0^1 H(r_1, \rho_1)\, q_\beta(r_1)\, dr_1 = 0 \tag{15}$$

$$H(r_1, \rho_1) = \frac{1-\nu^2}{k\omega\mu\pi E} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{r_1^2 + \rho_1^2 - 2r_1\rho_1 \cos\varphi}}$$

Ядро $H(r_1, \rho_1)$ можно записать с помощью полного эллиптического интеграла первого рода следующим образом:

$$H(r_1, \rho_1) = \frac{4(1-\nu^2)}{k\omega\mu\pi E (r_1 + \rho_1)} \mathbf{K}\left(\frac{2\sqrt{r_1\rho_1}}{r_1 + \rho_1}\right)$$

Уравнение (15) позволяет определить собственные значения β_n, которые все будут вещественны вследствие симметрии и вещественности ядра. Покажем также, что все собственные значения β_n положительны. Для этого необходимо и достаточно доказать, что ядро $H(r_1, \rho_1)$ положительно-определенное, т. е.

$$J(q) = \int_0^1 \int_0^1 H(r_1, \rho_1) q(r_1) q(\rho_1) dr_1 d\rho_1 > 0$$

для любой непрерывной функции $q(r_1)$, не равной тождественно нулю в интервале (0, 1). Функционал $J(q)$ можно представить в виде (с использованием структуры формул (14) и (12))

$$J(q) = \int_0^1 q(\rho_1) \left\{ \frac{1-\nu^2}{k\omega\mu\pi E} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{q(r_1) dr_1 d\varphi}{\sqrt{r_1^2 + \rho_1^2 - 2r_1\rho_1 \cos\varphi}} \right\} d\rho_1 =$$

$$= \frac{1}{k\omega\mu} \int_0^1 p_1(\rho_1, 0) w_{01}(\rho_1) \rho_1 d\rho_1$$

Таким образом, функционал $J(q)$ с точностью до положительного множителя представляет собой суммарную работу, производимую произвольными силами давления $p_1(\rho_1, 0) = q(\rho_1)$ на соответствующих перемещениях точек площадки контакта в начальный момент времени, которая для отличных от нуля давлений всегда положительна.

Собственные функции интегрального уравнения (15) будут ортогональными вследствие симметрии ядра. Начальное давление $p_1(\rho_1, 0)$ представлено формулой [3]

$$p_1(\rho_1, 0) = -\frac{E}{4\pi(1-\nu^2)} \int_0^1 \Delta w_{01}(r_1) L(r_1, \rho_1) dr_1 \tag{16}$$

$$L(r_1, \rho_1) = \int_0^{2\pi} \frac{2r_1}{\pi\sqrt{r_1^2 + \rho_1^2 - 2r_1\rho_1\cos\varphi}} \times$$

$$\times \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-r_1^2}\sqrt{1-\rho_1^2}}{\sqrt{r_1^2 + \rho_1^2 - 2r_1\rho_1\cos\varphi}} d\varphi$$

$$\Delta = \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} + \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} \right)$$

Разложив функцию $q(\rho_1, 0) = \rho_1 p_1(\rho_1, 0)$, где величина $p_1(\rho_1, 0)$ определена формулой (16), в ряд по полной ортонормированной системе собственных функций $q_n(\rho_1)$ интегрального уравнения (15), найдем коэффициенты A_n

$$q(\rho_1, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n q_n(\rho_1)$$

Тогда давление в последующие моменты будет вычисляться по формуле

$$p_1(\rho_1, t) = \frac{q(\rho_1, t)}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_1}\sum_{n=1}^{\infty} A_n q_n(\rho_1) e^{-\beta_n t}$$

Видно, что выражение для давления в осесимметричной контактной задаче при наличии износа представимо в таком же виде, как и в двумерной контактной задаче о движении штампа по границе упругого слоя [4].

Поступила 9 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хрущов М. М., Бабичев М. А.* Исследование изнашивания металлов. М., Изд-во АН СССР, 1960.
2. *Хирст В.* Износ хрупких материалов. В сб.: Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа. М., «Наука», 1971.
3. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.
4. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости при наличии износа. ПММ, 1976, т. 40, вып. 6.