Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 532.516

НЕЛИНЕЙНОЕ РАЗВИТИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В ДВУМЕРНЫХ ЛАМИНАРНЫХ ПОТОКАХ

Б. Ю. Скобелев, В. В. Струминский

(Новосибирск, Москва)

Рассматривается задача с начальными данными для возмущений в ламинарных течениях. Для исследования развития возмущений во времени применяется модификация метода, предложенного в работе [1]. Получено решение задачи с начальными условиями при значениях числа Рейнольдса, близких к критическому значению в линейной теории устойчивости. На основе анализа выражения для амплитуды возмущений получены условия существования вторичных течений, исследована их устойчивость. Результаты, относящиеся к вторичным течениям, совпадают с результатами работ [2, 3].

Л. Д. Ландау [4] предложил приближенное выражение для изменения амплитуды возмущения со временем. Его идеи были развиты в работах [5,6]. Для исследования решений нелинейных уравнений для возмущений был предложен [1] метод, аналогичный методу Пуанкаре. В работах [2,3] изучались условия существования и устойчивость вторичных автоколебательных режимов, возникающих при потере устойчивости ламинарного течения.

Будем рассматривать двумерное течение вязкой несжимаемой жидкости. Уравнение для функции тока $\psi(x, y, t)$ имеет вид (R — число Рейнольдса)

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \Delta\psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \Delta\psi}{\partial y} - \frac{1}{R}\Delta^2\psi = 0 \tag{1}$$

Подставив в (1) $\psi = \psi_0(x, y) + \Phi(x, y, t)$, где $\psi_0(x, y)$ — функция тока стационарного ламинарного течения, а $\Phi(x, y, t)$ — функция тока возмущения, получим уравнение для $\Phi(x, y, t)$

$$\frac{\partial \Delta\Phi}{\partial t} - M(\psi_0, \Phi) - \frac{1}{R}\Delta^2\Phi = N(\Phi, \Phi) \tag{2}$$

$$N(\psi, \varphi) = \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial x}, \quad M(\psi, \varphi) = N(\psi, \varphi) + N(\varphi, \psi)$$

Вид граничных условий для Φ зависит от конкретной задачи. В дальнейшем будем предполагать, что имеет место какой-нибудь из следующих случаев.

1°. Течение в ограниченной области Ω с границей $\partial\Omega$. Граничные условия для Φ

$$\Phi\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial \Phi}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} = 0$$

2°. Течение, периодическое по x ($\psi_0 \equiv \psi_0(y)$), с ограниченной фундаментальной областью пространственной периодичности $\Omega = \{x, y: 0 \leqslant x \leqslant T;\ y_1 \leqslant y \leqslant y_2\}$. Граничные условия

$$\Phi|_{y=y_1,y_2} = \frac{\partial\Phi}{\partial y}\bigg|_{y=y_1,y_2} = 0, \quad \Phi(x+T, y, t) = \Phi(x, y, t)$$

3°. Течение в пограничном слое в плоскопараллельном приближении. Область пространственной периодичности $\Omega = \{x, y: 0 \leqslant x \leqslant T;\ 0 \leqslant y < \infty\}$. Граничные условия

$$\Phi(x+T, y, t) = \Phi(x, y, t), \quad \Phi|_{y=0} = \frac{\partial\Phi}{\partial y}\bigg|_{y=0} = 0$$

$$\left|\frac{\partial\Phi_0}{\partial y}\right| \leqslant K \quad \text{при } y\to\infty; \quad \Phi_1, \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\to 0 \quad \text{при } y\to\infty$$

$$\left(\Phi_0 = \frac{1}{T}\int_0^T \Phi\,dx, \quad \Phi_1 = \Phi - \Phi_0\right)$$

(Можно доказать, что для этого случая справедливы результаты работы [2].)

Множество функций, удовлетворяющих граничным условиям какой-нибудь из этих задач, обозначим через W. Решение нелинейного уравнения (2) $\Phi \in W$ ищем с помощью метода, аналогичного методу работы [1]. Положим

$$\Phi(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A^n(\xi_1)\Phi_n(x, y, \xi_2) \tag{3}$$

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} b_n A^n(\xi_1), \quad \frac{d\xi_2}{dt} = \omega + \sum_{n=1}^{\infty} c_n A^n(\xi_1) \tag{4}$$

$$A(\xi_1) = \lambda e^{\xi_1}; \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \theta \quad \text{при } t = 0$$

Здесь λ — начальная амплитуда, θ — начальная фаза, а $\Phi_n(x, y, \xi_2)$ — периодические функции от ξ_2 с периодом 2π. Будем считать, что λ — малый параметр. Подставим (3), (4) в (2) и приравняем члены одного порядка по λ. Получим уравнения для Φ_n

$$n\gamma\Delta\Phi_n + \omega\frac{\partial\Delta\Phi_n}{\partial\xi_2} - L\Phi_n = -\sum_{l+k=n} b_l k\Delta\Phi_k - \tag{5}$$

$$-\sum_{l+k=n} c_l\frac{\partial\Delta\Phi_k}{\partial\xi_2} + \sum_{l+k=n} N(\Phi_l, \Phi_k), \quad \Phi_n \in W$$

$$L\varphi = M(\psi_0, \varphi) + R^{-1}\Delta^2\varphi$$

В дальнейшем будем предполагать, что линейная краевая задача

$$i\omega\Delta\varphi - L\varphi = 0, \quad \varphi \in W \tag{6}$$

при $R = R_0$ имеет два простых действительных собственных значения $\pm\,\omega_0$ и среди чисел $n\omega_0$ (n — целое, $n \neq \pm 1$) нет собственных значений задачи (6). Будем искать решения системы (5) в виде рядов по малому параметру δ

$$\omega=\omega_0+\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k\delta^k,\quad \gamma=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\delta^k,\quad b_n=\sum_{k=0}^{\infty}b_{nk}\delta^k \tag{7}$$

$$c_n=\sum_{k=0}^{\infty}c_{nk}\delta^k,\quad \Phi_n=\sum_{k=0}^{\infty}\delta^k\Phi_{nk}(x,y,\xi_2),\quad \delta=\frac{1}{R_0}-\frac{1}{R}$$

Подставив (7) в (5) и приравнивая члены при одинаковых степенях δ, получим

$$\omega_0\frac{\partial\Delta\Phi_{nk}}{\partial\xi_2}-L_0\Phi_{nk}=-\Delta^2\Phi_{n,k-1}-n\sum_{i+j=k}\gamma_i\Delta\Phi_{nj}- \tag{8}$$

$$-\sum_{i+j=k}\omega_i\frac{\partial\Delta\Phi_{nj}}{\partial\xi_2}-\sum_{i+j=k}\sum_{l+m=n}b_{li}m\Delta\Phi_{mj}-$$

$$-\sum_{i+j=k}\sum_{l+m=n}c_{li}\frac{\partial\Delta\Phi_{mj}}{\partial\xi_2}+\sum_{i+j=k}\sum_{l+m=n}N(\Phi_{li},\Phi_{mj})$$

$$\Phi_{nk}\in W\qquad (L_0\varphi=L\varphi\,|_{R=R_0})$$

Для Φ_{10} правая часть уравнения (8) равна нулю. Учитывая, что Φ_{10} — периодическая функция ξ_2, получим

$$\Phi_{10}=u(x,y)e^{i\xi_2}+u^*(x,y)e^{-i\xi_2} \tag{9}$$

где $u(x,y)$ — собственная функция задачи (6) при $R=R_0$, $\omega=\omega_0$.

Введем условия нормировки

$$\int_\Omega v^*(x,y)\,\Delta u(x,y)\,dx\,dy=1 \tag{10}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_\Omega v^*e^{-i\xi_2}\Delta\Phi_{nk}\,dx\,dy\,d\xi_2=0\quad \text{при } n\neq 1,\ k\neq 0$$

где $v(x,y)$ — решение уравнения, сопряженного к (6) в $L_2(\Omega)$ при $R=R_0$, $\omega=\omega_0$.

Условия разрешимости неоднородных уравнений для Φ_{nk} при $n\neq 1$, $k\neq 0$, аналогичные полученным в работе [2], определяют неизвестные постоянные γ_k, ω_k, c_{nk}, b_{nk}. Коэффициенты γ_k, ω_k находятся из условий разрешимости уравнений для Φ_{1k} ($k\geqslant 1$). В частности

$$\gamma_1=-\operatorname{Re}J,\quad J=\int_\Omega v^*\Delta^2u\,dx\,dy \tag{11}$$

(выражение (11) получено с учетом условия нормировки (10)). Функции Φ_{1k} ($k=1,2,\ldots$) имеют вид

$$\Phi_{1k}=u_k(x,y)\,e^{i\xi_2}+u_k^*(x,y)\,e^{-i\xi_2} \tag{12}$$

Рассмотрим систему уравнений (8) при $n=2$. Из условий разрешимости с учетом (9), (12) получаем

$$b_{1k}=c_{1k}=0,\quad k=0,1,2\ldots$$

Условие нормировки (10) однозначно определяет Φ_{2k}

$$\Phi_{2k} = \varphi_{k0}(x, y) + \varphi_{k2}(x, y)e^{2i\xi_2} + \varphi_{k2}^*(x, y)e^{-2i\xi_2}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Коэффициенты b_{2k} и c_{2k} определяются из условий разрешимости системы (8) при $n = 3$. В частности

$$(13) \qquad b_{20} = \operatorname{Re} I, \quad c_{20} = \operatorname{Im} I$$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_\Omega e^{-i\xi_2} v^* M(\Phi_{10}, \Phi_{20})\, dx\, dy\, d\xi_2$$

Последовательно решая систему (8), можно найти все функции Φ_{nk} и коэффициенты b_{nk}, c_{nk}. Методом индукции можно доказать, что Φ_{nk} ($k = 0, 1, 2 \ldots$) при четном n содержат только четные гармоники, а при нечетном n — нечетные и что $b_{nk} = c_{nk} = 0$ ($k = 0, 1, 2 \ldots$) при нечетных n.

Рассмотрим уравнение для ξ_1 (4).

Пусть γ_1 и b_{20} не равны нулю. Тогда в первом приближении по δ и λ^2 получаем

$$(14) \qquad t = \int_0^{\xi_1} \frac{d\xi_1}{\gamma_1\delta + b_{20}A^2}$$

(Если γ_1 или b_{20} равны нулю, то в формуле (4) нужно учесть следующие члены разложения по δ и λ^2.) Подставим в (14) $A = \lambda e^{\xi_1}$. Получим выражение для $A(t)$

$$(15) \qquad A(t) = \left(\frac{d\lambda^2 e^{2\gamma_1\delta t}}{d - \lambda^2 + \lambda^2 e^{2\gamma_1 t}}\right)^{1/2}, \quad d = -\frac{\gamma_1\delta}{b_{20}}$$

Заметим, что γ — коэффициент нарастания возмущений линейной теории устойчивости и исследуем формулу (15).

Пусть $\gamma_1\delta > 0$ (закритический случай).

Если $d > 0$, то при $t \to \infty$ имеем $A(t) \to d^{1/2} \equiv A_0$, т. е. существует устойчивое вторичное течение. Из (11), (13) находим

$$(16) \qquad A_0 = \left(\frac{\operatorname{Re} J}{\operatorname{Re} I}\delta\right)^{1/2}$$

Если $d < 0$, то $A \to \infty$ при $t \to (2\gamma_1\delta)^{-1} \ln(1 + |d| / \lambda^2)$, т. е. равновесных режимов с малой амплитудой не существует.

Пусть $\gamma_1\delta < 0$ (докритический случай).

Если $d > 0$, то равновесный вторичный режим реализуется при единственном начальном значении $\lambda_0 = d^{1/2} \equiv A_0$. При $\lambda < \lambda_0$ возмущения затухают, а при $\lambda > \lambda_0$ нарастают до бесконечности за конечное время $t = (2\gamma_1\delta)^{-1} \ln(1 - d / \lambda^2)$, т. е. докритические вторичные режимы неустойчивы.

Если $d < 0$, то все возмущения затухают. Вторичных течений с малой амплитудой не существует.

Пусть $\delta = 0$ (нейтральный случай).

Из (15) получаем

$$A(t) = \lambda(1 - 2\lambda^2 b_{20} t)^{-1/2}$$

При $b_{20} < 0$ возмущения затухают, а при $b_{20} > 0$ нарастают до бесконечности за конечное время $t = (2\lambda^2 b_{20})^{-1}$.

Выражение для амплитуды (16), область существования и вид функции тока вторичных равновесных течений совпадают с соответствующими результатами работы [3]. Можно показать, что полученные ряды (3), (7) являются асимптотическим разложением решения уравнения (2) по малым параметрам δ и λ.

Численный расчет величины γ_1/b_{20} для некоторых простых течений был проделан в ряде работ в связи с исследованием вторичных равновесных режимов. Например, для плоского течения Пуазейля — в работе [7], а для течения Блазиуса — в работе [8].

В случае, когда $\operatorname{Re} J \neq 0$, в качестве параметра разложения для решений системы (5) можно взять γ. Проделав выкладки, аналогичные приведенным выше, можно получить, что в первом приближении по γ и λ^2 выражение для $A(t)$ имеет вид (15), где $\gamma_1\delta = \gamma$, $d = -\gamma/b_{20}$. Связь между δ и γ дается формулой

$$\delta = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \gamma^k, \quad \delta_1 = -\frac{1}{\operatorname{Re} J}$$

Поступила 20 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Струминский В. В.* К нелинейной теории развития аэродинамических возмущений. Докл. АН СССР, 1963, т. 153, № 3.
2. *Юдович В. И.* Возникновение автоколебаний в жидкости. ПММ, 1971, т. 35, вып. 4.
3. *Юдович В. И.* Исследование автоколебаний сплошной среды, возникающих при потере устойчивости стационарного режима. ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.
4. *Ландау Л. Д.* К проблеме турбулентности. Докл. АН СССР, 1944, т. 44, № 8.
5. *Stuart J. T.* On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, pt 1. J. Fluid Mech., 1960, vol. 9, pt 3, p. 353—370.
6. *Watson G.* On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, pt 2. J. Fluid Mech., 1960, vol. 9, pt 3, p. 371—383.
7. *Андрейчиков И. П., Юдович В. И.* Об автоколебательных режимах, ответвляющихся от течения Пуазейля в плоском канале. Докл. АН СССР, 1972, т. 202, № 4.
8. *Гапонов С. А., Скобелев Б. Ю.* Вторичные автоколебательные режимы в течении Блазиуса. В сб.: Аэрофизические исследования, вып. 5. Новосибирск, Ин-т теорет. и прикл. механ. СО АН СССР, 1975.