Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 539.3

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ НАРАЩИВАЕМОГО ТЕЛА

Н. Х. Арутюнян

(Москва)

На основе работ [1,2] дается постановка краевой задачи теории ползучести для неоднородно-стареющего тела при дискретном или непрерывном наращивании его элементами различного возраста. Приводятся исходные уравнения и формулируются условия, которые определяют решение краевой задачи теории ползучести для таких тел. Эти тела характеризуются тем, что в ходе их наращивания происходит не только изменение их формы, изменение поверхностных и объемных сил, граничных условий, но и изменение их физико-механических свойств как во времени, так и в зависимости от координат в силу того, что процесс старения материалов в этих телах протекает не одинаково во всех их элементах. Такие явления происходят при последовательном возведении и загрузке сооружений, при выращивании кристаллов, при фазовых переходах в вязкоупругих телах и т. п.

Основные работы, посвященные решению задач о наращивании методами теории упругости, приведены в работе [3]. На основе теории упругоползучего тела в работе [4] исследовано напряженно-деформированное состояние в однородных телах при их наращивании. В более общей постановке эта задача рассматривалась в [5].

1. Постановка задачи и вывод разрешающих уравнений при дискретном наращивании неоднородно-стареющих тел. Пусть задано k изотропных тел, занимающих области $\Omega^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, материал которых обладает одновременно свойствами ползучести и старения. Известно, что эти тела изготовлены в моменты времени τ_i^* и загружены в моменты времени τ_i° $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Положим далее, что в некоторый момент времени t_{ij} происходит сращивание (стыковка) тела $\Omega^{(i)}$ с телом $\Omega^{(j)}$ по некоторой поверхности S_{ij}. Заметим, что t_{ij} могут быть заданы не при всех значениях i и j, так как некоторые тела могут не сращиваться. Упорядочим совокупность величин t_{ij} в порядке возрастания, обозначив члены вновь полученной последовательности через t_m $(m = 1, 2, 3, \ldots, M)$.

Здесь не предполагается, что все области $\Omega^{(i)}$ изготовлены до момента первого сращивания этих тел. Необходимо лишь считать, что $t_{ij} \geqslant \tau_i^*$ и $t_{ij} \geqslant \tau_j^*$.

Обозначим через $\Omega(t)$ область, занятую объединением областей $\Omega^{(i)}$ тел, изготовленных к моменту времени t, т. е.

$$\Omega(t) = \bigcup_i \Omega^{(i)} \tag{1.1}$$

для таких i, что $\tau_i^* \leqslant t$.

Таким образом, область $\Omega(t)$ изменяется в моменты времени $t = \tau_i^*$, т. е. когда изготавливается очередное тело, и в момент времени $t = t_{ij} = t_m$, т. е. когда сращиваются тела.

Поверхность сращивания S_{ij} до момента сращивания считаем свободной от напряжений

$$\sigma_n(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \mathbf{r} \in S_{ij} \tag{1.2}$$

где $\sigma_n(\mathbf{r}, t)$ — вектор напряжений на площадке поверхности с внешней нормалью $\mathbf{n}$.

Обозначим компоненты векторов перемещений, тензоров деформации, напряжений до момента сращивания в теле $\Omega^{(i)}$ и после сращивания соответственно через $u_\alpha^{(i)}$, $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(i)}$, $\sigma_{\alpha\beta}^{(i)}$ и u_α, $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\sigma_{\alpha\beta}$

Уравнения Коши, уравнения квазистатического равновесия, граничные условия для напряжений и перемещений до момента сращивания, а именно, когда $\tau_i^* \leqslant t < t_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$, будут иметь обычный вид для любого тела, занимающего область $\Omega^{(i)}$.

Уравнения состояния для неоднородно-стареющих тел, занимающих до сращивания области $\Omega^{(i)}$ и загруженных в моменты времени τ_i°, могут быть, согласно [1,2], представлены в следующей форме:

$$\begin{gathered}
\varepsilon_{\alpha\beta}^{(i)}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_{\alpha\beta}^{\circ(i)}(\mathbf{r}, t) + (1+\nu)\left[(I + L^{(i)})\frac{\sigma_{\alpha\beta}^{(i)}}{E}\right] - \\
- \nu\delta_{\alpha\beta}\left[(I + L^{(i)})\frac{\sigma_{ss}^{(i)}}{E}\right] \\
\sigma_{\alpha\beta}^{(i)}(\mathbf{r}, t) = \frac{E(t-\tau_i^*)}{1+\nu}\Big\{(I + N^{(i)})[\varepsilon_{\alpha\beta}^{(i)} - \varepsilon_{\alpha\beta}^{\circ(i)}] + \\
+ \delta_{ij}\frac{\nu}{1-2\nu}(I + N^{(i)})[\varepsilon_{ss}^{(i)} - \varepsilon_{ss}^{\circ(i)}]\Big\} \\
I\left(\frac{\sigma_{\alpha\beta}^{(i)}}{E}\right) = \frac{\sigma_{\alpha\beta}^{(i)}(\mathbf{r}, t)}{E(t-\tau_i^*)} \\
L^{(i)}\left(\frac{\sigma_{\alpha\beta}^{(i)}}{E}\right) = \int_{\tau_i^\circ}^{t} \frac{\sigma_{\alpha\beta}^{(i)}(\mathbf{r}, \tau)}{E(\tau-\tau_i^*)} P(t-\tau_i^*, \tau-\tau_i^*)\,d\tau \\
N^{(i)}(\varepsilon_{\alpha\beta}^{(i)}) = \int_{\tau_i^\circ}^{t} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(i)}(\mathbf{r}, \tau) R(t-\tau_i^*, \tau-\tau_i^*)\,d\tau
\end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона, $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, $\varepsilon_{\alpha\beta}^{\circ(i)}$ — вынужденные деформации, $E(t-\tau_i^*)$, $P(t-\tau_i^*, \tau-\tau_i^*)$, $R(t-\tau_i^*, \tau-\tau_i^*)$ — соответственно модуль упругомгновенной деформации, ядро ползучести и ядро релаксации материала тела, занимающего область $\Omega^{(i)}$ и изготовленного в момент времени τ_i^*

Основным условием, которое вводится относительно сращивания тела, служит условие неразрывности смещений, возникающих в теле в промежутке времени между очередными наращиваниями, и вектора напряжений σ_n на поверхности сращивания.

Требование о непрерывности перемещений обеспечивает отсутствие трещин между сращиваемыми телами и проскальзываний по поверхностям их раздела. Математически это можно сформулировать следующим образом: перемещения u_α (r, t) точек тела, занимающего область Ω (t), при $t_m \leqslant t < t_{m+1}$ представляют собой сумму перемещений u_α (r, t_m) в момент времени $t = t_m$ (вообще говоря, имеющих разрывы на поверхностях сращиваний, произошедших в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_m$) и приращений перемещений $\Delta^{(m)} u_\alpha$ (r, t), удовлетворяющих условию неразрывности в области Ω (t) при $t_m \leqslant t < t_{m+1}$

$$(1.4) \qquad u_\alpha(\mathbf{r}, t) = u_\alpha(\mathbf{r}, t_m) + \Delta^{(m)} u_\alpha(\mathbf{r}, t)$$

Приведем систему уравнений, которые определяют решение краевой задачи теории ползучести для области Ω (t), т. е. для области, охватывающей m неоднородно-стареющих тел при их последовательном дискретном наращивании.

Уравнение, выражающее связь деформаций и перемещений после сращивания, а именно при $t_m \leqslant t < t_{m+1}$, согласно (1.4), будет

$$(1.5) \qquad \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t_m) + {}^1/_2\,[\Delta^{(m)} u_{\alpha,\beta}(\mathbf{r}, t) + \Delta^{(m)} u_{\beta,\alpha}(\mathbf{r}, t)]$$

где $\Delta^{(m)} u_\alpha$ — приращение перемещений, удовлетворяющее условиям неразрывности в области Ω (t) при $t_m \leqslant t < t_{m+1}$ и подлежащее определению наряду с остальными искомыми функциями данной задачи.

Обозначим границу области Ω (t) через S (t). Пусть эта граница S (t) состоит из пяти участков

$$S(t) = S_0(t) \cup S_1(t) \cup S_2(t) \cup S_3(t) \cup S_4(t)$$

Участок S_0 (t) свободен от напряжений и является той поверхностью, по которой произойдет очередное наращивание тела. На S_1 (t) заданы напряжения $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \{F_\alpha(\mathbf{r}, t)\}$, на $S_2(t)$ — перемещения $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \{V_\alpha(\mathbf{r}, t)\}$, на S_3 (t) — нормальные перемещения V_n (r, t) и вектор тангенциальных напряжений $\mathbf{F}_\tau$ (r, t), на S_4 (t) — напряжения F_n (r, t) и вектор тангенциальных перемещений $\mathbf{V}_\tau$ (r, t). В области Ω (t) имеются объемные силы $f(\mathbf{r}, t) = \{f_\alpha(\mathbf{r}, t)\}$ и вынужденные деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}{}^\circ$ (r, t).

Тогда уравнения квазистатического равновесия, граничные условия для напряжений и перемещений, записанные для момента $t_m \leqslant t < t_{m+1}$, будут иметь вид

$$(1.6) \qquad \begin{aligned} &\sigma_{\alpha\beta,\beta}(\mathbf{r}, t) + f_\alpha(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(t) \\ &\sigma_n(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \mathbf{r} \in S_0(t) \\ &\sigma_n(\mathbf{r}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in S_1(t) \end{aligned}$$

$$(1.7) \qquad \begin{aligned} &\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in S_2(t) \\ &u_n(\mathbf{r}, t) = V_n(\mathbf{r}, t), \quad \sigma_\tau(\mathbf{r}, t) = \mathbf{F}_\tau(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in S_3(t) \\ &\sigma_n(\mathbf{r}, t) = F_n(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{u}_\tau(\mathbf{r}, t) = \mathbf{V}_\tau(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in S_4(t) \end{aligned}$$

Введем функции γ (r) $= \tau_i{}^\circ$ для $\mathbf{r} \in \Omega^{(i)}$ и $\varkappa$ (r) $= \tau_i{}^*$ для $\mathbf{r} \in \Omega^{(i)}$. Тогда уравнения состояния теории ползучести, представляющие связь тензоров $\varepsilon_{\alpha\beta}$ (r, t) и $\sigma_{\alpha\beta}$ (r, t), будут иметь вид

$$(1.8) \qquad \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = (1 + \nu)\,[I + L]\left(\frac{\sigma_{\alpha\beta}}{E}\right) - \nu\delta_{\alpha\beta}\,[I + L]\left(\frac{\sigma_{ss}}{E}\right) + \mathring{\varepsilon}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = \frac{E[t-\varkappa(\mathbf{r})]}{1+\nu}\left\{(I+N)(\varepsilon_{\alpha\beta}-\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta}) + \right.$$

$$\left. + \delta_{\alpha\beta}\frac{\nu}{1-2\nu}(I+N)(\varepsilon_{ss}-\varepsilon_{ss}^{\circ})\right\}$$

$$I\left(\frac{\sigma_{\alpha\beta}}{E}\right) = \frac{\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)}{E[t-\varkappa(\mathbf{r})]}$$

$$L\left(\frac{\sigma_{\alpha\beta}}{E}\right) = \int\limits_{\gamma(\mathbf{r})}^{t} \frac{\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \tau)}{E[\tau-\varkappa(\mathbf{r})]} P[t-\varkappa(\mathbf{r}), \tau-\varkappa(\mathbf{r})]\, d\tau$$

$$N(\varphi) = \int\limits_{\gamma(\mathbf{r})}^{t} R[t-\varkappa(\mathbf{r}), \tau-\varkappa(\mathbf{r})]\, \varphi(\mathbf{r}, \tau)\, d\tau$$

Заметим, что $R\ [t - \varkappa(\mathbf{r}),\ \tau - \varkappa(\mathbf{r})]$ — резольвента ядра ползучести $P\ [t - \varkappa(\mathbf{r}),\ \tau - \varkappa(\mathbf{r})]$ и представляет собой ядро релаксации материала тела.

Система уравнений (1.5), первого уравнения (1.6) и первого уравнения (1.8) при граничных условиях (1.7) является замкнутой системой, которая определяет решение краевой задачи теории ползучести для неоднородно-стареющих тел при их дискретном наращивании.

Следует отметить, что при ограниченных в окрестности поверхности сращивания S_{ij} с нормалью $\mathbf{n}$ массовых силах f_α из уравнений равновесия (1.6) вытекают условия непрерывности на S_{ij} нормальной $\sigma_n = \sigma_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta$ и касательной $\sigma_\tau = \sigma_n - \sigma_n\mathbf{n}$ составляющих тензора напряжений. Но поскольку остальные компоненты тензора напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$, вообще говоря, могут иметь разрывы на поверхностях сращивания, то производные в уравнениях равновесия (1.6) необходимо понимать в обобщенном, а не в обычном смысле.

Кроме того, поскольку рассматриваемая здесь краевая задача геометрически линейная и на поверхностях сращивания S_{ij} условия неразрывности приращений перемещений $\Delta^{(m)}u_\alpha$ ($\mathbf{r}$, t) согласно (1.4) и (1.5) выполняются, то полученное решение с необходимостью удовлетворяет в каждой точке $\mathbf{r}$ поверхности S_{ij} условиям непрерывности нормальной к поверхности сращивания S_{ij} компоненты перемещений, а также компонент тензора деформаций, определяющих удлинение и сдвиг в плоскости, касательной в любой точке $\mathbf{r}$ этой поверхности.

Таким образом, решение поставленной здесь краевой задачи автоматически будет удовлетворять обычным условиям непрерывности перемещений, деформаций и напряжений на поверхности раздела составных тел [6].

Разрывы компонент поля напряжений на поверхности сращивания S_{ij} определятся в результате решения краевой задачи, задаваемой уравнением (1.5), первым уравнением (1.6) и условиями (1.7).

2. Постановка задачи и исходные уравнения теории ползучести для неоднородно-стареющих тел при их непрерывном наращивании. Пусть неоднородно-стареющее тело, материал которого обладает свойством ползучести, занимает область Ω^*. Известно, что оно изготовлено в момент времени t_0 и загружено в момент времени $\tau_0 \geqslant t_0$. Далее, начиная с не-которого момента времени $t^* > \tau_0$, это тело непрерывно наращивается элементами с различным возрастом материала.

Обозначим область, занимаемую наращиваемым телом в момент времени $t \geqslant t^*$, через $\Omega(t)$, так что $\Omega(t^*) = \Omega$ и $\Omega(t_1) \subset \Omega(t_2)$, если $t_1 < t_2$. Границу области Ω^* обозначим через S^*, а границу области $\Omega(t)$ — через $S(t)$. Для упрощения записи доопределим $\Omega(t)$ и $S(t)$ при $t \leqslant t^*$ следующим образом: $\Omega(t) \equiv \Omega^*$; $S(t) \equiv S^*$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t^*$. Обозначим через $\tau_1^*(\mathbf{r})$ момент изготовления наращиваемого элемента в окрестности точки $\mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}$, так что $\tau_1^*(\mathbf{r}) = t_0$, когда $\mathbf{r} \in \Omega^*$. Тогда уравнение состояния для любой точки наращиваемого тела будет

$$(2.1) \qquad \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = (1+\nu)(I+L)\left(\frac{\sigma_{\alpha\beta}}{E}\right) - \nu\delta_{\alpha\beta}(I+L)\left(\frac{\sigma_{ss}}{E}\right) + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$$

где I — тождественный оператор, определяемый в (1.8), а оператор L определяется формулой

$$(2.2) \qquad L\left(\frac{\sigma_{\alpha\beta}}{E}\right) = \int\limits_{\tau_0}^{t} \frac{\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \tau)}{E[\tau - \tau_1^*(\mathbf{r})]} P[t - \tau_1^*(\mathbf{r}), \tau - \tau_1^*(\mathbf{r})]\, d\tau$$

Соотношение, связывающее тензор деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta}$ с тензором напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$, можно представить и в другой форме. С этой целью обозначим через $\tau_1(\mathbf{r})$ возраст материала элемента, расположенного в окрестности точки $\mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}$, в момент наблюдения t. Очевидно

$$(2.3) \qquad \tau_1(\mathbf{r}) = t - \tau_1^*(\mathbf{r})$$

$\tau_1^\circ(\mathbf{r}) = \tau_0 - \tau_1^*(\mathbf{r})$, где $\tau_1^\circ(\mathbf{r})$ — возраст материала тела в момент его загружения τ_0.

Пользуясь соотношением (2.3) и производя замену переменной $\xi = \tau - \tau_1^*(\mathbf{r})$, оператор $L(\sigma_{\alpha\beta}/E)$ представим в виде

$$(2.4) \qquad L\left(\frac{\sigma_{\alpha\beta}}{E}\right) = \int\limits_{\tau_1^\circ(\mathbf{r})}^{\tau_1(\mathbf{r})} \frac{\sigma_{\alpha\beta}(\xi + \tau_1^*(\mathbf{r}))}{E(\xi)} P[\tau_1(\mathbf{r}), \xi]\, d\xi$$

Таким образом, в уравнение состояния (2.1) при (2.4) входит возраст материала $\tau_1(\mathbf{r})$.

Обратимся к уравнениям, определяющим связь между деформациями и перемещениями в наращиваемом теле. Для вывода этих уравнений рассмотрим аппроксимацию процесса непрерывного наращивания процессом дискретного наращивания и совершим затем предельный переход, устремляя к нулю длину максимального из интервалов, на которые была разбита шкала времени.

Пусть Δt — малый промежуток времени. Полагая $t_m = t^* + (m-1) \cdot \Delta t$ $(m = 1, 2, \ldots)$, введем приращение области $\Delta\Omega = \Omega(t_{m+1}) / \Omega(t_m))$. Тогда процесс дискретного наращивания можно описать следующим образом.

При $t \in [t_1, t_2)$ тело занимает первоначальную область $\Omega^* = \Omega(t_1) = \Omega(t^*)$ и деформируется воздействиями, заданными в области $\Omega(t_1)$ и на ее поверхности $S(t_1)$. В момент времени t_2 изготавливается (зарождается) область $\Delta\Omega_1$ и в тот же момент времени t_2 сращивается с $\Omega(t_1)$, так что образуется новое тело, занимающее область $\Omega(t_2) = \Omega(t_1) \cup \Delta\Omega_1$. Продолжая этот процесс, будем иметь, что в течение промежутка времени $[t_m, t_{m+1})$ тело не изменяется, занимая область $\Omega(t_m)$, а в момент времени t_{m+1} изготавливается (зарождается) область $\Delta\Omega_m$, которая в тот же момент t_{m+1} сращивается с телом, занимающим область $\Omega(t_m)$. При этом образуется новое тело, занимающее область $\Omega(t_{m+1}) = \Omega(t_m) \cup \Delta\Omega_m$.

Если теперь обратиться к уравнениям (1.4) и (1.5), которые связывают деформации и перемещения при дискретном наращивании, то заметим, что перемещения и деформации в области $\Omega(t_m)$ при $t \in [t_m, t_{m+1})$ будут связаны следующими соотношениями:

$$u_\alpha(\mathbf{r}, t) = u_\alpha(\mathbf{r}, t_m) + \Delta u_\alpha(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in \Omega(t_m) \tag{2.5}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t_m) + {}^1/_2\,[\Delta u_{\alpha,\beta}(\mathbf{r}, t) + \Delta u_{\beta,\alpha}(\mathbf{r}, t)]$$

где приращение перемещений $\Delta u_\alpha(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяет условиям неразрывности в области $\Omega(t_m)$.

Из соотношений (2.5), очевидно, следует

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{u_\alpha(\mathbf{r}, t) - u_\alpha(\mathbf{r}, t_m)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta u_\alpha(\mathbf{r}, t)}{\Delta t} = u_\alpha^{\bullet}(\mathbf{r}, t)$$

$$\dot\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) - \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t_m)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\Delta t\to 0} \left[\frac{\Delta u_{\alpha,\beta}(\mathbf{r}, t)}{\Delta t} + \frac{\Delta u_{\beta,\alpha}(\mathbf{r}, t)}{\Delta t}\right]$$

Отсюда

$$\dot\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = {}^1/_2\,[\dot u_{\alpha,\beta}(\mathbf{r}, t) + \dot u_{\beta,\alpha}(\mathbf{r}, t)] \tag{2.6}$$

$$u_\alpha^{\bullet}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial u_\alpha(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad \dot\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \tag{2.7}$$

Таким образом, в любой момент времени t скорости деформаций неоднородно-стареющего упругоползучего тела при его непрерывном наращивании связаны со скоростями перемещений соотношением Коши (2.6).

Уравнения квазистатического равновесия наращиваемого тела, занимающего область $\Omega(t)$, и граничные условия на его поверхности $S(t)$ будут иметь обычный вид

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta}(t) + f_\alpha(t) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(t) \tag{2.8}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} n_\beta = F_\alpha(t), \quad \mathbf{r} \in S_F(t); \quad u_\alpha = V_\alpha(t), \quad \mathbf{r} \in S_V(t) \tag{2.9}$$

где $S_F(t)$ и $S_V(t)$ — участки поверхности $S(t)$, на которых заданы соответственно напряжения и деформации. В общем случае они изменяются во времени.

Уравнения (2.1), первое уравнение (2.5) и (2.8) при граничных условиях (2.9) составляют полную систему, которая определяет решение краевой задачи для неоднородно-стареющего упругоползучего тела при его непрерывном наращивании.

Интересно отметить, что в качестве приложения развитой здесь теории ползучести для наращиваемого тела можно рассмотреть краевую задачу теории вязкоупругости для тел, граничная поверхность которых изменяется во времени вследствие фазовых превращений [7].

Поступила 20 V 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* О теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих сред. Докл. АН СССР, 1976, т. 229, № 3.
2. *Арутюнян Н. Х.* Об уравнениях состояния в нелинейной теории ползучести неоднородно-стареющих тел. Докл. АН СССР, 1976, т. 231, № 3.
3. *Шульман С. Г.* Расчеты гидротехнических сооружений с учетом последовательности возведения. М., «Энергия», 1975.
4. *Харлаб В. Д.* Линейная теория ползучести наращиваемого тела. Механика стержневых систем и сплошных сред. Тр. Ленингр. инж.-строит. ин-та, 1966, вып. 49.
5. *Дятловицкий Л. И., Вайнберг А. И.* Формирование напряжений в гравитационных плотинах. Киев, «Наукова думка», 1975.
6. *Бугаков И. И.* Ползучесть полимерных материалов. М., «Наука», 1973.
7. *Арутюнян Н. Х., Лозовский А. С.* Об одной задаче теории вязкоупругости для тел с фазовыми превращениями. Докл. АН АрмССР, 1977, т. 65, № 5.