Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 62—50

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

Н. Н. Красовский

(Свердловск)

Рассматриваются задачи об управлении при неполной информации или о параметрах объекта, или о его текущих состояниях, или о реализующихся помехах. Описываются решения, включающие аппроксимационную модель, исследуемую методами позиционных дифференциальных игр [1].

1. Многие управляемые системы, в которых объект описывается дифференциальными уравнениями, можно представить следующим образом. Текущее состояние в момент t характеризуется позицией $y\,[t]$, причем $y = y\,[t]$ — элемент гильбертова пространства Y. Для любых возможных данных t_*, $y\,[t_*]$, t^* и нашего действия $\Pi\,[t_*,\ t^*)$ определено семейство $\{y\,[\cdot]\,|\,y\,[t_*],\ \Pi\,[t_*,\ t^*)\}$ возможных движений $y\,[\cdot] = \{y\,[t],\ t_* \leqslant t \leqslant t^*\}$. Действительное движение $y\,[\cdot]$ трактуется как конкретный выбор

$$y\,[\cdot] \in \{y\,[\cdot]\,|\,y|\,[t_*],\ \Pi\,[t_*,\ t^*)\} \tag{1.1}$$

Получается игровая ситуация. Мы — первый игрок — выбираем $\Pi\,[t_*,\ t^*)$, реализация $y\,[\cdot]$ выбирается согласно (1.1) вторым игроком, вообще говоря, фиктивным. Будем рассматривать управление на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$. Назовем стратегией U функцию $\Pi\,[\tau_i,\ \tau_{i+1}) = U\,(\tau_i,\ y\,[\tau_i],\ \tau_{i+1},\ \varepsilon)$, $\tau_{i+1} > \tau_i$, $\varepsilon > 0$. Движением $y\,[t] = y\,[t,\ t_0,\ y_0,\ U]$ назовем всякую функцию $y\,[t]$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, $y\,[t_0] = y_0$, которая может реализоваться в результате последовательных выборов (1.1), где $t_* = \tau_i$, $t^* = \tau_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, $\tau_0 = t_0$, $\tau_n = \vartheta$, $\Pi\,[\tau_i,\ \tau_{i+1}) = U\,(\ldots)$.

Пусть даны множества

$$M = [\{t,\ y\}\ :\ t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta,\ y \in M\,(t)] \tag{1.2}$$

$$N = [\{t,\ y\}\ :\ t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta,\ y \in N\,(t)] \tag{1.3}$$

Задача 1.1. Для данных $\{t_0,\ y_0\}$, $\vartheta > t_0$, M и N найти стратегию U, которая для всякого $\varepsilon > 0$ обеспечивает условие

$$y\,[\tau] \in M^\varepsilon\,(\tau), \quad y\,[t] \in N^\varepsilon\,(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant \vartheta \tag{1.4}$$

для каждого движения $y\,[t] = y\,[t,\ t_0,\ y_0,\ U]$ по крайней мере при одном $\tau \leqslant \vartheta$, если только $\tau_{i+1} - \tau_i \leqslant \delta\,(\varepsilon)$.

Здесь $M^\varepsilon\,(t)$ и $N^\varepsilon\,(t)$ — ε-окрестности $M\,(t)$ и $N\,(t)$ в Y.

Стратегию U можно определить шире, включая в число аргументов еще вспомогательную переменную $w[\tau_i]$, формируемую в цепи управления.

Пример 1.1. Пусть объектом является однородный теплопроводный стержень $(-\infty < \xi < \infty)$, управляемый тепловым источником в точке $\xi = 0$. На управляющую интенсивность $u[t]$ источника накладывается помеха $v[t]$, $|u| \leqslant \mu$, $|v| \leqslant \nu$. Здесь $y[t] = \{\zeta(t, \xi), -\infty < \xi < \infty\}$, где $\zeta(t, \xi)$ — распределение температуры вдоль стержня в момент t. Функция $\zeta(t, \xi) = \eta(\xi)$ при фиксированном t трактуется как элемент пространства Y функций $\eta(\xi)$, $-\infty < \xi < \infty$ с интегрируемым квадратом. При этом

$$(1.5) \qquad \| y[t] \| = \| \zeta(t, \cdot) \| = \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \zeta^2(t, \xi)\, d\xi \right]^{1/2}$$

Уравнение движения

$$(1.6) \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} + (u + v)\, \delta(\xi)$$

где $\delta(\xi)$ — δ-функция. Допустимое действие $\Pi[t_*, t^*)$ пусть есть постоянная функция $u[t] = u^*$, $t_* \leqslant t < t^*$, $|u^*| \leqslant \mu$. В качестве помехи $v[t]$, $t_* \leqslant t < t^*$ допустим любую кусочно-непрерывную функцию, $|v[t]| \leqslant \nu$. Семейство (1.1) есть множество решений $y[t] = \{\zeta(t, \xi), -\infty < \xi < \infty\}$, $t_* \leqslant t \leqslant t^*$ уравнения (1.6) при известном краевом условии $y[t_*] = \{\zeta(t_*, \xi), -\infty < \xi < \infty\}$, когда $v[t]$ пробегает все возможные помехи. Выбор $y[\cdot]$ в (1.1) определяется выбором $v[t]$, $t_* \leqslant t < t^*$. Роль множеств M и N могут играть, например, множества

$$M = [\{t, \zeta(t, \cdot)\} : t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \ \| \zeta(t, \cdot) \| \leqslant \alpha]$$
$$N = [\{t, \zeta(t, \cdot)\} : t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \ \| \zeta(t, \cdot) \| \leqslant \beta]$$

2. Наряду с исходной y-системой (1.1) будем рассматривать некоторую ее w-модель, текущие состояния которой — позиции $w[t]$ — снова элементы пространства Y. Примем, что изменение $w[t]$, $w[t_*] = w_*$ на отрезке $t_* \leqslant t \leqslant t^*$ определяется действиями $F^{(1)}[t_*, t^*)$ и $F^{(2)}[t_*, t^*)$, так что $w[t] = w[t, t_*, w_*, F^{(1)}, F^{(2)}]$. При этом сначала выбирается $F^{(2)}$, а затем $F^{(1)}$. Назовем процедурой Q следующий способ формирования $w[t]$, $t \geqslant t_0$ из позиции $w[t_0] = w_0$ за счет последовательного выбора действий $F^{(2)}[\tau_i^*, \tau_{i+1}^*)$ $(\tau_0^* = t_0, i = 0, 1, 2, \ldots)$. В момент $\tau_i^* < \vartheta$ процедура Q назначает следующий полуинтервал $\tau_i^* \leqslant t < \tau_{i+1}^*$ и действие $F^{(2)}[\tau_i^*, \tau_{i+1}^*)$ как функции от истории $\{w[t], t_0 \leqslant t \leqslant \tau_i^*\}$. Действие $F^{(1)}[\tau_i^*, \tau_{i+1}^*)$ может оказаться произвольным из множества допустимых. Множество допустимых процедур Q стесним только условием, что процедура Q не должна порождать реализацию $w[t]$ с бесконечным количеством делений τ_i^* на отрезке $[t_0, \vartheta]$, какой бы ни оказалась последовательность выборов $F^{(1)}[\tau_i^*, \tau_{i+1}^*)$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1. При всяком выборе $\{t_*, w_*\}, \vartheta \geqslant t_*$, M_*, N_* и $t^* \in [t_*, \vartheta]$ для начальной позиции $w[t_*] = w_*$ справедливо одно и только одно из следующих двух утверждений: 1) существует процедура Q, которая исключает выполнение условия

$$(2.1) \qquad w[\tau] \in M_*(\tau), \quad w[t] \in N_*(t), \quad t_* \leqslant t \leqslant \tau \leqslant \vartheta$$

для всех порождаемых ею движений $w[t] = w[t, t_*, w_*, Q]$; 2) при всяком выборе действия $F^{(2)}[t_*, t^*)$ найдется действие $F^{(1)}[t_*, t^*)$, которое для движения $w[t] = w[t, t_*, w_*, F^{(1)}, F^{(2)}]$ или обеспечит включение

$$(2.2) \qquad w[\tau] \in M_*(\tau), \quad w[t] \in N_*(t), \quad t_* \leqslant t \leqslant \tau \leqslant t^*$$

при некотором τ, или реализует позицию $w[t^*] = w^*$, для которой, как для начальной, не существует процедуры Q, исключающей условие

$$(2.3) \qquad w[\tau] \in M_*(\tau), \quad w[t] \in N_*(t), \quad t_* \leqslant t \leqslant \tau \leqslant t^*$$

для всех движений $w[t] = w[t, t^*, w^*, Q]$.

3. Скажем, что w-модель приближает y-систему снизу, если для всякой возможной пары $y[t_*] = y_*$, $w[t_*] = w_*$, $\| y_* - w_* \| < \varepsilon_0$ при всяком $t^* \in [t_*, \vartheta]$, $t^* - t_* \leqslant \delta$ найдется $\Pi[t_*, t^*)$ так, что для всякой реализации $y[\cdot]$ из (1.1) найдется $F^{(2)}[t_*, t^*)$ так, что при любом $F^{(1)}[t_*, t^*)$ для соответствующих движений $y[t]$ и $w[t]$ будет справедливо неравенство

$$(3.1) \qquad \| y[t] - w[t] \|^2 \leqslant (1 + \varkappa\ (t - t_*)) \| y_* - w_* \|^2 + \varphi(\delta)(t - t_*)$$

при $t_* \leqslant t \leqslant t^*$, где $\varkappa$ — постоянная и $\lim \varphi(\delta) = 0$ при $\delta \to 0$. Последовательность выбора действий может быть другой: найдется $F^{(2)}$ так, что для всякого $F^{(1)}$ найдется Π так, что для любой реализации $y[\cdot]$ из (1.1) для движений $y[t]$ и $w[t]$ будет справедлива оценка (3.1).

Справедливо следующее утверждение, которое доказывается по известной схеме (см. [1], стр. 59—70).

Лемма 3.1. Пусть w-модель приближает y-систему снизу. Если для позиции $y[t_0] = y_0 = w[t_0] = w_0$ не существует процедуры Q, которая исключает (2.1) для $M_*(t) = M^\alpha(t)$ и $N_*(t) = N^\alpha(t)$ при всяком $\alpha > 0$, то найдется стратегия $U(\tau_i, y[\tau_i], \tau_{i+1}, \varepsilon)$, которая разрешает задачу 1.1.

Пусть действия $F^{(i)}[t_*, t^*)$ при всяком $\tau \in (t_*, t^*)$ определяют действия $F^{(i)}[t_*, \tau)$ и $F^{(i)}[\tau, t^*)$ и, наоборот, действия $F^{(i)}[t_*, \tau)$ и $F^{(i)}[\tau, t^*)$ определяют действия $F^{(i)}[t_*, t^*)$ $(i = 1,2)$. При этом соответствующие куски движений $w[t]$, $t_* \leqslant t \leqslant \tau$ и $w[t]$, $\tau \leqslant t \leqslant t^*$ склеиваются естественным образом. Предположим, что $y[\cdot]$ в (1.1) выбирается как действие оператора

$$(3.2) \qquad y[\cdot] = Y\{y[t_*], \Pi[t_*, t^*)\}$$

назначаемого априори. Класс допустимых операторов Y (3.2) оговаривается заранее, если процесс рассматривается с позиций второго игрока.

Скажем, что w-модель приближает y-систему сверху, если для всякой возможной пары $y[t_*] = y_*$, $w[t_*] = w_*$ при всяком $t^* \in [t_*, t_* + \delta \leqslant$

$\leqslant \vartheta]$ найдется Y (3.2), так что при всяком $\Pi\ [t_*, t^*)$ при всяком наборе $\{F^{(2)}[\tau_i^*, \tau_{i+1}^*),\ i = 0,1,\ldots, n;\ \tau_0^* = t_*,\ \ \tau_n^* = t^*\}$ найдется набор $\{F^{(1)}[\tau_i^*, \tau_{i+1}^*)\}$, который обеспечит неравенство (3.1). При этом $F^{(1)}[\tau_i^*, \tau_{i+1}^*)$ выбираются вслед за $F^{(2)}[\tau_i^*, \tau_{i+1}^*)$, а τ_{i+2}^* и $F^{(2)}[\tau_{i+1}^*, \tau_{i+2}^*)$ выбираются вслед за $F^{(1)}[\tau_i^*, \tau_{i+1}^*)$. Последовательность выбора действий может быть другой: найдется способ выбора набора $\{F^{(1)}[\tau_i^*, \tau_{i+1}^*)\}$ так, что при всяком наборе $\{F^{(2)}[\tau_i^*, \tau_{i+1}^*)\}$ найдется Y (3.2), так что при всяком $\Pi\ [\tau_i, \tau_{i+1})$ для движений $y\,[t]$ и $w\,[t]$ будет справедлива оценка. Справедливо следующее утверждение, которое доказывается опять по известной схеме (см. [1], стр. 59—70).

Теорема 3.1. Пусть y-система регулярна, т. е. она допускает w-модель, которая приближает ее и снизу и сверху. Тогда при всяком выборе $\{t_0, y_0\}$, $\vartheta \geqslant t_0$, M и N для начальной позиции $y\,[t_0] = y_0$ справедливо одно и только одно из утверждений:

1) существует стратегия $U\,(\tau_i,\ y\,[\tau_i],\ \ \tau_{i+1}, \varepsilon)$, которая разрешает задачу 1.1;

2) существует $\gamma > 0$ и выбор операторов Y (3.2) $(t_* = \tau_i,\ t^* = \tau_{i+1})$ в виде функции от $\{\tau_i,\ y\,[\tau_i]\}$, который для всякого движения $y\,[t]$ исключает (1.4) при $\varepsilon = \gamma$, если только $\tau_{i+1} - \tau_i \leqslant \delta_*\,(\gamma)$.

Это утверждение отвечает теоремам об альтернативе из книги [1].

4. В случае бесконечномерного пространства Y выполнить условие (3.1) трудно. В таких случаях целесообразно приближать w-моделью не саму y-систему, а некоторую ее аппроксимацию или некоторое ее отображение. Пусть σ — некоторый параметр. Введем некоторое преобразование

$$y_\sigma\,[t] = f_\sigma\ (t,\ y\ [t]) \tag{4.1}$$

где $y_\sigma\,[t]$ — элементы некоторого гильбертова пространства Y_σ. Множествам $M\,(t)$ и $N\,(t)$ из задачи 1.1 поставим в соответствие множества $M_\sigma\,(t)$ и $N_\sigma\,(t)$. Пусть Σ_α, $\alpha > 0$ — множества значений σ, которые удовлетворяют условиям $\Sigma_\alpha \subset \Sigma_\beta$ при $\beta > \alpha$. Пусть выполнены условия. Из $y_\sigma\,[t] \in M_\sigma^\varepsilon\,(t)$, $\varepsilon > 0$ следует $y\,[t] \in M^{\gamma(\sigma,\varepsilon)}\,(t)$, причем для любого $\alpha > 0$ найдутся $\Sigma_{\xi(\alpha)}$ и $\varepsilon\,(\alpha) > 0$, так что $\gamma\,(\sigma, \varepsilon) < \alpha$ при $\sigma \in \Sigma_{\xi(\alpha)}$ и $\varepsilon \leqslant \varepsilon\,(\alpha)$. Для каждого $\beta > 0$ найдутся $\Sigma_{\xi(\beta)}$ и $\varepsilon\,(\beta) > 0$, так что из $y_\sigma\,[t] \notin M_\sigma^\beta\,(t)$ следует $y\,[t] \notin M^{\varepsilon(\beta)}$ при $\sigma \in \Sigma_{\xi(\beta)}$. Такие же условия пусть выполняются для $N\,(t)$ и $N_\sigma\,(t)$.

Предположим, что системы

$$y_\sigma\,[\cdot] \in \{y_\sigma\,[\cdot] \mid y_\sigma\,[t_*],\ \Pi\,[t_*, t^*)\} \tag{4.2}$$

в которые индуцируется система (1.1), регулярны, т. е. допускают w_σ-модели, приближающие их снизу и сверху. Тогда для такой регулярной в аппроксимации y-системы (1.1) снова верна теорема 3.1.

Система из примера 1.1 регулярна в аппроксимации. В самом деле, выполним над переменной $y\,[t] = \{\zeta\,(t,\ \xi),\ -\infty < \xi < \infty\}$ преобразование

(4.3) $$\zeta_\sigma(t,\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi(\vartheta+\sigma-t)}} \exp\left[-\frac{(\xi-\eta)^2}{4a^2(\vartheta+\sigma-t)}\right] \zeta(t,\eta)\,d\eta$$

где $\sigma > 0$ — одно какое-нибудь фиксированное значение. Система (4.2) определяется равенством

(4.4) $$\zeta_\sigma(t,\xi) = \zeta_\sigma(t_*,\xi) + \int\limits_{t_*}^{t} \frac{1}{2a\sqrt{\pi(\vartheta+\sigma-\tau)}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4a^2(\vartheta+\sigma-\tau)}\right](u^*[\tau]+v[\tau])\,d\tau$$

где при фиксированном действии $\Pi[t_*, t^*) \div u^*[t]$, $t_* \leqslant t < t^*$ получится все семейство $\{\zeta_\sigma(t, \xi),\ t_* \leqslant t \leqslant t^*,\ -\infty < \xi < \infty\}$, когда $v[t]$, $t_* \leqslant t \leqslant t^*$ пробегает все возможные реализации $v[t]$. В соответствии с (1.7) и (1.8) множества $M_\sigma(t)$ и $N_\sigma(t)$ определяются как множества функций $\zeta_\sigma(t, \xi)$ (4.3), где функции $\zeta(t, \eta)$ удовлетворяют условиям $\|\zeta(t, \cdot)\| \leqslant \alpha$ и $\|\zeta(t, \cdot)\| \leqslant \beta$. Все функции $\zeta(t, \xi)$, представляющие решения уравнения (1.6), отвечающие всем возможным $u[t]$ и $v[t]$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ при фиксированной начальной позиции $\zeta(t_0, \xi)$, содержатся в некотором компакте в Y. Отсюда вытекает, что выполняются нужные соотношения между M_σ и M, N_σ и N.

Движения $w_\sigma[t] = \{\zeta_\sigma(t, \xi)_w,\ -\infty < \xi < \infty\}$ для ω_σ-модели зададим уравнением

(4.5) $$w_\sigma^{\boldsymbol\cdot} = \left\{\frac{\partial\zeta_\sigma(t,\xi)_w}{\partial t},\ -\infty<\xi<\infty\right\} = \left\{\frac{1}{2a\sqrt{\pi(\vartheta+\sigma-t)}}\exp\left[-\frac{\xi^2}{4a^2(\vartheta+\sigma-t)}\right],\ -\infty<\xi<\infty\right\}(u_*+v_*),\quad (|u_*|\leqslant\mu,\ |v_*|\leqslant\nu)$$

Действием $F^{(1)}[t_*, t^*)$ будет выбор измеримой функции $u_*[t]$ ($t_* \leqslant t < t^*$), действием $F^{(2)}[t_*, t^*)$ — выбор измеримой функции $v_*[t]$ ($t_* \leqslant t < t^*$). Пусть $\mu > \nu$. Задачу для w_σ-модели (4.5), аналогичную задаче 1.1 для системы (1.1), можно решать в соответствии с материалом (см. [1], стр. 207—233). Придем к выводу: задача 1.1 для системы (1.6) имеет решение тогда и только тогда, когда по крайней мере одно движение $w^\circ[t] = \zeta^\circ(t, \cdot)$, $w^\circ[t_0] = w_0 = y_0 = \zeta^\circ(t_0, \cdot)$ системы, описываемой уравнением

$$w^{\boldsymbol\cdot} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} = \left\{\frac{1}{2a\sqrt{\pi(\vartheta+\sigma-t)}}\exp\left[-\frac{\xi^2}{4a^2\sqrt{(\vartheta+\sigma-t)}}\right],\ -\infty<\xi<\infty\right\}p,\quad |p[t]|\leqslant\mu-\nu$$

удовлетворяет условиям

$$w^\circ[\tau] \in M_\sigma(\tau),\quad w^\circ[t] \in N_\sigma(t),\quad t_0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant \vartheta$$

Разрешающая стратегия U будет экстремальной к этой стабильной дорожке $w^\circ[t]$, и управление $u[t] = u^\circ$, $\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$ будет определяться из условия

$$u^\circ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi(\vartheta+\sigma-\tau_i)}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4a^2(\vartheta+\sigma-\tau_i)}\right] \times$$
$$\times (\zeta_\sigma(\tau_i,\xi) - \zeta^\circ(\tau_i,\xi))\, d\xi = \min_{|u|\leqslant\mu}.$$

Правые части уравнения (4.5) принадлежат некоторому компакту в Y. Поэтому w_σ-модель можно аппроксимировать конечномерными $w_\sigma^{(n)}$-моделями.

5. Рассмотрим вопрос об аппроксимации w-модели конечномерной $w^{(n)}$-моделью. Пусть $w^{(n)}$ — элемент некоторого n-мерного подпространства $Y^{(n)}$ пространства Y. Скажем, что последовательность $w^{(n)}$-моделей приближает w-модель снизу (сверху), если при всяком $F^{(2)}[t_*, t^*)$ ($F^{(1)}[t_*, t^*)$) найдется $F_n^{(2)}[t_*, t^*)$ ($F_n^{(1)}[t_*, t^*)$) так, что для всякого $F_n^{(1)}[t_*, t^*)$($F_n^{(2)}[t_*, t^*)$) найдется $F^{(1)}[t_*, t^*)$ ($F^{(2)}[t_*, t^*)$) так, что будет справедлива оценка

$$\| w[t] - w^{(n)}[t] \|^2 \leqslant (1 + \varkappa_n (t - t_*)) \| w_* - w_*^{(n)} \|^2 + \\ + \varphi(\delta, n)(t - t_*) \tag{5.1}$$

при $t_* \leqslant t \leqslant t^* \leqslant \delta$, где $\lim \varphi(\delta, n) = 0$ при $n \to \infty$, $\delta \to 0$. Пусть y-система (1.1) регулярна в аппроксимации и каждая w_σ-модель в свою очередь приближается сверху и снизу последовательностью $w_\sigma^{(n)}$-моделей. Тогда решение задачи 1.1 для данной y-системы определяется решениями аналогичных подходящих задач для $w_\sigma^{(n)}$-моделей при подходящих σ и больших n. Процесс управления можно осуществить на деле, реализуя в схеме регулирования каскад: {y-система, y_σ-система, w_σ-модель, $w_\sigma^{(n)}$-модель}. Управления П, $F_\sigma^{(2)}$, $F_{\sigma,n}^{(2)}$, $F_{\sigma,n}^{(1)}$, $F_\sigma^{(1)}$ будут выбираться при этом из условий (3.1) и (5.1) и из условий разрешения аналога задачи 1.1 для $w_\sigma^{(n)}$-модели. Решение этого аналога задачи 1.1 можно строить одним из методов из книги [1].

6. Известно, что решение игровых задач управления для конечномерных систем в ряде случаев регуляризируется наложением малых случайных шумов. Когда в цепь управления вводится $w_\sigma^{(n)}$-модель, этой регуляризации можно придать реальный смысл.

Пусть некоторая система описывается уравнением

$$x^{\cdot} = f(t, x, u, v), \quad u \in P, \quad v \in Q \tag{6.1}$$

где x — n-мерный вектор, P и Q — компакты, функция f непрерывна, удовлетворяет условию Липшица по x и условию $\|f\| \leqslant \varkappa(1 + \|x\|)$, $\varkappa = \text{const}$. Рассмотрим также соответствующую стохастическую систему

$$dx = f(t, x, u, v)\, dt + \alpha\, dz[t] \tag{6.2}$$

где $z[t]$ — стандартный невырожденный винеровский процесс [2], α — малый параметр. Пусть даны замкнутые множества M и N в пространстве

$\{t, x\}$. Для системы (6.1) для всякой начальной позиции $x[t_0] = x_0$ справедливо одно и только одно из двух утверждений (см. [1], стр. 353—371):

1) найдется контрстратегия $V \div v(t, x, u)$, числа $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$ и $\delta > 0$, такие, что для всякого решения $x_\Delta[t] = x_\Delta[t, t_0, x_0, V]$ уравнения

$$x_\Delta^{\cdot} = f[t, x_\Delta[t], u[t], v(\tau_i, x_\Delta[\tau_i], u[t]))
\qquad (6.3)$$
$$\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}, \quad \tau_0 = t_0, \quad \tau_m = \vartheta$$

будет исключено условие

$$x_\Delta[\tau] \in M^\varepsilon(\tau), \quad x_\Delta[t] \in N^\varepsilon(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant \vartheta \qquad (6.4)$$

при $\varepsilon = \varepsilon_0$, если только $\tau_{i+1} - \tau_i \leqslant \delta$;

2) найдется стратегия $U \div u(t, x)$, такая, что при всяком выборе $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ так, что для всякого решения $x_\Delta[t] = x_\Delta[t, t_0, x_0, U]$ уравнения

$$x_\Delta^{\cdot} = f(t, x_\Delta[t], \quad u(\tau_i, x_\Delta[\tau_i]), v[t]) \qquad (6.5)$$
$$\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$$

будет выполнено условие (6.4), если только $\tau_{i+1} - \tau_i \leqslant \delta(\varepsilon)$.

Рассмотрим движения $x[t] = x[t, t_*, x_*, u_*, v[\cdot]]$ (6.1) и $x^{(\alpha)}[t] = x[t, t_*, x^*, u[\cdot], v^*(u[\cdot])]$ (6.2) при $t_* \leqslant t \leqslant t^*$, где управления u_* и $v^*(u)$ выбраны из условий

$$\langle (x_* - x^*) \cdot f(t_*, x_*, u_*, v) \rangle = \min_u \max_v \qquad (6.6)$$
$$\langle (x_* - x^*) \cdot f(t_*, x^*, u, v^*) \rangle = \max_v \qquad (6.7)$$

Здесь $\langle x \cdot f \rangle$ — скалярное произведение. В $x[t]$ функция $v[\cdot] = \{v[t], t_* \leqslant t < t^*\}$ — любая измеримая по t по Лебегу функция. Движение $x^{(\alpha)}[t]$ — вероятностный диффузионный процесс. При этом функция $u[\cdot]$ для $x^{(\alpha)}[t]$ может быть любой, в том числе случайной и, возможно, связанной с функцией $x^{(\alpha)}[\cdot]$ для которой решения $x^{(\alpha)}[t]$ (6.2) могут быть формализованы в стандартных понятиях теории диффузионных процессов при условии, что $v(u)$ — функция, измеримая по Борелю. Справедлива оценка

$$M\{\| x[t] - x^{(\alpha)}[t] \|^2\} \leqslant (1 + \varkappa(t - t_0)) \| x_* - x^* \|^2 + \varphi(\alpha, \delta)(t - t_*) \qquad (6.8)$$

при $t - t_* \leqslant \delta$, где $\lim \varphi(\alpha, \delta) = 0$ при $\{\alpha, \delta\} \to 0$; $M\{\xi\}$ — математическое ожидание. Также и для движений $x[t] = x[t, t_*, x_*, u[\cdot], v_*(u[\cdot])]$ (6.1) и $x^{(\alpha)}[t] = x[t, t_*, x^*, u^*, v[\cdot]]$ (6.2) при $t_* \leqslant t < t^*$, где управления $v_*(u)$ и u^* выбраны из условий

$$\langle (x^* - x_*) \cdot f(t_*, x_*, u, v_*) \rangle = \max_v \qquad (6.9)$$
$$\langle (x^* - x_*) \cdot f(t_*, x_*, u^*, v) \rangle = \min_u \max_v \qquad (6.10)$$

справедлива оценка (6.8). В $x[t]$ функция $u[\cdot] = \{u[t], t_* \leqslant t < t^*\}$ — любая измеримая по t по Лебегу функция, $v_*(u)$ измерима по Борелю. Для $x^{(\alpha)}[t]$ функция $v[\cdot]$ может быть случайной и, кроме того, связанной с $x^{(\alpha)}[t]$.

Из данных оценок рассуждениями по известной схеме (см.[1], стр. 329—347) получаются следующие утверждения. Пусть для начальной позиции $x[t_0] = x_0$ существует стратегия $U \div u(t, x)$, которая для движений $x_\Delta[t]$ (6.5) обеспечивает условие (6.4). Тогда, каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и $p < 1$, для системы (6.2) для той же начальной позиции $x[t_0] = x_0$ найдется $\alpha(\varepsilon, p) > 0$, такое, что не может существовать какого-либо формализуемого так или иначе выбора управления v в (6.2), который исключал бы условия

$$x^{(\alpha)}[\tau] \in M^\varepsilon(\tau), \quad x^{(\alpha)}[t] \in N^\varepsilon(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant \vartheta \tag{6.11}$$

с вероятностью, большей чем $1 - p$, если только в (6.2) $\alpha \leqslant \alpha(\varepsilon, p)$. В частности, тогда для системы (6.2) не может существовать контрстратегии $V \div v(t, x, u)$, которая исключала бы условия (6.11) с вероятностью, большей чем $1 - p$. Напротив, пусть для данной начальной позиции $x[t_0] = x_0$ существует контрстратегия $V \div v(t, x, u)$, которая для движений $x_\Delta[t]$ (6.3) исключает условие (6.4) при некотором значении $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$, если только $\tau_{i+1} - \tau_i \leqslant \delta$. Тогда, каковы бы ни были $\varepsilon < \varepsilon_0$ и $p < 1$, для системы (6.2) для той же начальной позиции $x[t_0] = x_0$ найдется $\alpha(\varepsilon, p) > 0$, такое, что не может существовать какого-либо формализуемого так или иначе позиционного выбора управления u в (6.2), который обеспечивал бы условия (6.11) с вероятностью, большей чем $1 - p$, если в (6.2) $\alpha \leqslant \alpha(\varepsilon, p)$. В частности, тогда для системы (6.2) не может существовать стратегии $U \div u(t, x)$, которая обеспечивала бы условия (6.11) с вероятностью, большей чем $1 - p$.

Если выполнено условие седловой точки маленькой игры (см. [1], стр. 55—57), то достаточно в предыдущих утверждениях ограничиться только стратегиями $U \div u(t, x)$ и $V \div v(t, x)$.

Известно, что для системы (6.2) решение задач сближения — уклонения, вообще говоря, более регулярное, чем для системы (6.1). В частности, для системы (6.2) для игровых задач управления во многих случаях существуют достаточно гладкие решения уравнения динамического программирования, которое является тогда квазилинейным параболическим уравнением в частных производных. Из утверждений, высказанных в п. 6, в таких случаях вытекает целесообразность включения в каскад управления после $w_\sigma^{(n)}$-модели, описываемой уравнением (6.1), еще стохастической $w_\sigma^{(n)*}$-модели, которая описывается уравнением (6.2) с достаточно малым значением $\alpha > 0$. При этом роль первого поводыря (см. [1], стр. 248—254) будет играть движение $w_\sigma^{(n)*}[t]$, которое через каскад $\{y[t],\ y_\sigma[t],\ w_\sigma[t],\ w_\sigma^{(n)}[t],\ w_\sigma^{(n)*}[t]\}$ будет приводить движение $y[t]$ к нужной цели с вероятностью, сколь угодно близкой к единице.

7. В соответствии с фактами, обсуждаемыми в п. 6, целесообразность включения в цепь управления стохастического поводыря $w_\sigma^{(n)*}[t]$ связана с тем, что для широкого класса дифференциальных игр для системы (6.1) вследствие оценок вида (6.8) цена соответствующей стохастической дифференциальной игры для системы (6.2) сходится при $\alpha \to 0$ к цене исходной игры для системы (6.1).

Пусть, например, для исходной y-системы (1.1) речь идет о выборе оптимального управления $\Pi\ [\tau_i,\ \tau_{i+1}) = U\ (\tau_i,\ \ y\ [\tau_i],\ \tau_{i+1},\ldots)$, который обеспечивает $\min_\Pi \max_{y[\cdot]} \omega^*\ (y\ [\vartheta])$, где $\omega^*\ (y)$ — заданная функция. Указанной задаче соответствует задача 1.1, где

$$M_c = [\{t,\ y\},\ t = \vartheta,\ \omega^*\ (y) \leqslant c],\quad N_c = [\{t,\ y\},\ t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta,\ y \in Y]$$

и требуется решать задачу 1.1 при наименьшем значении $c = c_0$, при котором она еще имеет решение. Пусть для этой исходной задачи на этапе $w_\sigma^{(n)}$-модели дело сводится к дифференциальной игре (см. [1], стр. 71—79) для системы (6.1) с показателем

$$\gamma = \min_U \max_V \omega\ (x\ [\vartheta]),\quad U \div u\ (t,\ x),\ V \div v\ (t,\ x,\ v) \tag{7.1}$$

Эта игра имеет седловую точку $\{U^\circ,\ V^\circ\}$, которой соответствует цена игры γ° (см. [1], стр. 71—79). Если выполнено условие седловой точки маленькой игры (см. [1], стр. 55—57), то игра для системы (6.1) с показателем (7.1) имеет седловую точку в паре стратегий $U^\circ \div u^\circ\ (t,\ x)$, $V^\circ \div v^\circ\ (t,\ x)$. Данной игре можно поставить в соответствие стохастическую игру для системы (6.2) с показателем

$$\gamma_\alpha = \min_U \max_V M\ \{\omega\ (x^{(\alpha)}\ [\vartheta])\} \tag{7.2}$$

Будем полагать функцию $\omega\ (x)$ ограниченной при $-\infty < x < \infty$ и достаточно гладкой $\gamma_\alpha\ (t_0,\ x_0)$. Тогда решение данной игры определяется гладким решением уравнения динамического программирования с краевым условием

$$\frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial t} + \frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \gamma_\alpha}{\partial x_i^2} + \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} f_i\ (t,\ x,\ u,\ v) \right] = 0$$

$$\gamma_\alpha\ (\vartheta,\ x) = \omega\ (x)$$

Такое решение $\gamma_\alpha\ (t,\ x)$ существует в соответствии с [3]. При этом управления u и v определяются из соответствующих условий минимакса как измеримые по Борелю функции $u^*\ (t,\ x)$ и $v^*\ (t,\ x,\ u)$. Отсюда согласно [2] вытекает существование движения $x^{(\alpha)}\ [t]$ как решения (слабого) соответствующего диффузионного уравнения (6.2). Поэтому игра допускает строгую естественную формализацию с ценой (7.2) в классах таких измеримых стратегий $u\ (t,\ x)$ и $v\ (t,\ x,\ u)$.

Из оценок (6.6) — (6.10) вытекает, что $\lim_{\alpha \to 0} \gamma_\alpha = \gamma^\circ$.

Поступила 20 IV 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
2. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов, т. 3. М., «Наука», 1975.
3. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., «Наука», 1967.