

## СЖАТИЕ ПЛОСКОСТИ С ТРЕЩИНОЙ И ВКЛЮЧЕНИЕМ

А. З. Авербух

(Москва)

Рассматривается задача о сжатии плоскости, содержащей разрез и круглое включение. Включение и плоскость различаются коэффициентами Пуассона, а модули сдвига одинаковы. Однородная сжимающая нагрузка на бесконечности параллельна направлению разреза. Дается аналитическое решение упругих задач для случаев свободной и частично сжатой трещины, найдены коэффициенты интенсивности напряжений на концах и изучен характер распространения трещины в такой модели. Полученные результаты согласуются с экспериментальными фактами при разрушении бетона.

Разрушение при сжатии исследовалось с позиций механики хрупкого разрушения Г. П. Черепановым. В работе [1] проанализировано явление пинч-эффекта. В работе [2] применительно к явлению горного удара рассмотрена трещина в однородной упругой плоскости под действием сжимающей нагрузки при условии налегания берегов с произвольным законом трения между ними.

В композитных материалах, представимых в виде матрицы со случайно расположенными включениями, трещины растут параллельно линии действия сжимающей нагрузки. Поэтому естественно рассмотреть следующую задачу. Упругая плоскость с разрезом и упругим круглым включением подвергается на бесконечности сжатию вдоль направления разреза. Без включения трещина расти не будет. При наличии включения на концах разреза возникает концентрация напряжений, в результате чего может начаться рост трещины.

Отметим, что влияние дефектов другого типа, а именно, рост трещин из нор в матрице, рассматривалось, например, в работах [3, 4].

Подобная модель ранее исследовалась в связи с разрушением волокнистых композитов при растяжении (например [5, 6]). В наиболее общем виде задача рассмотрена в работе [7], где получено решаемое численно сингулярное интегральное уравнение относительно производной от функции, равной величине раскрытия берегов разреза.

**1. Решение упругой задачи.** Рассмотрим упругую плоскость  $OXY$ , содержащую разрез вдоль отрезка  $[a, b]$  оси  $OX$  и круглое включение  $S$

$$S = \{z, |z - ih| \leq R\}, \quad z = x + iy, \quad h \geq 0, R > 0$$

Будем считать, что берега разреза свободны от напряжений, на границе  $L$  включения непрерывны усилия и смещения, а на бесконечности приложено однородное сжимающее напряжение вдоль оси  $OX$ .

Получаем следующую краевую задачу:

$$(1.1) \quad z \in L: [p_{in}] = [u_i] = 0$$

$$(1.2) \quad z \in [a, b]: p_{12} = p_{22} = 0,$$

$$z \rightarrow \infty: p_{11} \rightarrow p < 0, \quad p_{12} \rightarrow 0, \quad p_{22} \rightarrow 0$$

Здесь  $p_{ij}, u_i$  — компоненты тензора напряжений и вектора смещения,  $[f]$  означает скачок функции  $f$  при переходе через соответствующую линию.

Введем потенциалы Колосова — Мусхелишвили:  $\varphi_i, \psi_i$  для  $S$ ,  $\varphi_0, \psi_0$  для матрицы,  $\varphi^0 = pz/4, \psi^0 = -pz/2$  для напряженного состояния на бесконечности. Положим  $\varphi_0 = \varphi^0 + \varphi_1, \psi_0 = \psi^0 + \psi_1$ .

Следуя идее Д. И. Шермана [8], получим выражение потенциалов через функции, голоморфные вне разреза

$$(1.3) \quad \varphi = \begin{cases} \varphi_1, & z \in S \\ \frac{\kappa_i + 1}{\kappa + 1} \varphi_i - \varphi^0 + C + D, & z \in S \end{cases}$$

$$\psi = \begin{cases} \psi_1 - \varepsilon G - \varepsilon G^0, & z \in \bar{S} \\ \psi_i - \varepsilon G - \varepsilon G^0 + \frac{\kappa_i \bar{C} - \bar{D}}{\kappa_i + 1}, & z \in S \end{cases}$$

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{\varphi} + s\varphi'}{s-z} ds$$

$$G^0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{\varphi}^0 + s\varphi'^0}{s-z} ds = \begin{cases} \frac{1}{2} iph, & z \in S \\ \frac{1}{2} pR^2 \\ \frac{1}{z-ih}, & z \in \bar{S} \end{cases}$$

$$\varepsilon = \frac{\kappa - \kappa_i}{\kappa_i + 1} = \begin{cases} \frac{\nu_i - \nu}{1 - \nu_i} & \text{(плоская деформация)} \\ \frac{\nu_i - \nu}{1 + \nu} & \text{(плоское напряженное состояние)} \end{cases}$$

Здесь  $\nu_i, \nu$  — коэффициенты Пуассона включения и матрицы соответственно,  $C, D$  — постоянные, определяемые из условия однозначности смещений,  $\varphi(\infty) = \psi(\infty) = 0$ .

Используя (1.2), получим краевую задачу для внешности разреза  $[a, b]$

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \Phi + \bar{\Phi} + t\bar{\Phi}' + \bar{\Psi} + \varepsilon\bar{G}' + \varepsilon\bar{G}'^0 &= 0 \\ \Phi = \varphi', \quad \Psi = \psi', \quad \Phi(\infty) = O(z^{-2}), \quad \Psi(\infty) = O(z^{-2}) \end{aligned}$$

Вне круга  $S$

$$(1.5) \quad G(z) = \bar{\varphi} \left( -ih + \frac{R^2}{z-ih} \right) - \overline{\varphi(ih)} + \frac{R^2 \Phi(ih)}{z-ih}$$

Для обычной области значений коэффициентов Пуассона  $1/4 \leq \nu \leq 1/2$  имеем: в случае плоской деформации  $-1/3 \leq \varepsilon \leq 1/2$ , для плоского напряженного состояния  $-1/6 \leq \varepsilon \leq 1/5$ . Сочетание коэффициентов Пуассона, характерное, например, для бетона дает значения  $\varepsilon$  от 0.08 до 0.15. Поэтому будем считать  $\varepsilon$  малым и искать решение задачи (1.4) в виде ряда по степеням  $\varepsilon$

$$\Phi(z, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(z) \varepsilon^n, \quad \Psi(z, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(z) \varepsilon^n$$

Тогда для каждого члена ряда получаем известную краевую задачу

$$\Phi_n + \bar{\Phi}_n + t\bar{\Phi}_n' + \bar{\Psi}_n = -\overline{G'_{n-1}}$$

Для  $n = 1$  функция  $G_0$  известна, а при  $n > 1$   $G_{n-1}$  получается подстановкой  $\Phi_{n-1}$  в (1.5).

Для  $\Phi_n$  получаем рекуррентное соотношение

$$\Phi_n(z) = -\frac{1}{2\pi i X(z)} \int_a^b \frac{X(t) G'_{n-1}(t)}{t-z} dt$$

$$X(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)}, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{X(z)}{z} = 1$$

Любое число членов ряда может быть найдено в конечном виде. Легко получить (см. [9], § 133) условие сходимости в пространстве Гельдера с показателем  $1/2$ . Оно имеет вид  $\varepsilon A < 1$ , где  $A$  — постоянная, зависящая от геометрических параметров задачи

( $l$  — длина разреза)

$$A = \left( \frac{1}{2} + C_{0,5} \right) \frac{\rho \sqrt[3]{\delta}}{1-\rho} \left( \frac{1}{2} + 2\sqrt{\delta} \right) \left[ 1 + 2\sqrt{\delta \rho^2 \left( 1 + \frac{b^2}{h^2} \right)} \right] \times \\ \times \left\{ \frac{1-\rho}{\sqrt{1+a^2/h^2}} + \left[ 1 + \frac{\rho^2 \sqrt{\delta}}{(1-\rho)^2} \right]^2 \right\}, \quad \rho = \frac{R}{h}, \quad \delta = \frac{l}{R}$$

Если  $h < R$ , то следует заменить  $h$  на  $\sqrt{h^2 + a^2}$ .

Важно отметить, что для разрезов малой длины и для разрезов, далеких от включения,  $A$  мало, т. е. в этих случаях условие сходимости выполняется и не при малых  $\varepsilon$ , а в случае малых  $\varepsilon$  сходимость будет быстрой. В силу этого в дальнейшем ограничимся первым приближением

$$(1.6) \quad \Phi = \frac{\varepsilon p R^2}{4X(z)} \left\{ \frac{X(z)}{(z+ih)^2} + \frac{(2ih+a+b)(z+ih) - 2(ih+a)(ih+b)}{2X(-ih)(z+ih)^2} \right\}$$

Все остальные функции могут быть теперь выписаны. Приведем здесь только формулы для коэффициентов концентрации напряжений, необходимые для дальнейшего

$$(1.7) \quad (a+ih)K^a = (b+ih)K^b = -\frac{\varepsilon p R^2 \sqrt{2\pi(b-a)}}{4\sqrt{(ih+a)(ih+b)}} \\ K^{a,b} = K_I^{a,b} - iK_{II}^{a,b}$$

Полученное приближенное решение имеет простой физический смысл. Разрез находится в бесконечной однородной плоскости под действием поля напряжений которое возникает в плоскости с включением, но без разреза с потенциалами

$$(1.8) \quad \Phi = 0, \quad \Psi = -\varepsilon G' = \frac{\varepsilon p R^2}{2(z-ih)^2}$$

Очевидно, что такое приближение справедливо для разреза, достаточно удаленного от включения при любых сочетаниях упругих моделей и для любой формы включения. Потенциалы соответствующего напряженного состояния можно представить в виде

$$\Phi = \frac{\Phi_2}{(z-ih)^2} + O(z^{-3}), \quad \Psi = \frac{\Psi_2}{(z-ih)^2} + O(z^{-3})$$

Слагаемое, пропорциональное  $\Phi_2$ , в краевом условии даст член  $O(z^{-3})$ , а слагаемое, пропорциональное  $\Psi_2$ , даст член  $O(z^{-2})$ . Поэтому в первом приближении достаточно рассмотреть потенциалы вида (1.8). Из соображений размерности  $\Psi_2 = k p R^2$ , где  $R$  — характерный размер включения,  $k$  — коэффициент, зависящий от формы и упругих модулей.

Такое представление для учета влияния единичного разреза использовалось в работе [10], где рассмотрена плоскость с двоякопериодической системой разрезов.

2. Анализ решения. Чтобы решение (1.6) имело физический смысл, не должно быть налегания берегов разреза. Из уравнений  $K_I^a = K_I^b = 0$  получаем

$$(2.1) \quad a = b$$

$$(2.2) \quad b = \frac{a(a^2 - 3h^2)}{h^2 - 3a^2}, \quad |a| > \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$(2.3) \quad a = \frac{b(b^2 - 3h^2)}{h^2 - 3b^2}, \quad |b| > \frac{h}{\sqrt{3}}$$

Положим для определенности  $\varepsilon > 0$ , т. е.  $\nu_i > \nu$  (такое соотношение выполняется для тяжелых бетонов). Тогда для концов разреза из условий  $K_I^a \geq 0$ ,  $K_I^b \geq 0$  получаем две допустимые области

$$0 \leq \frac{h}{\sqrt{3}} \leq a_1(b) \leq a \leq b, \quad a \leq b \leq b_1(a) \leq -\frac{h}{\sqrt{3}} \leq 0$$

Эти области в плоскости переменных  $b, a$  показаны на фигуре. Линии  $a_1, a_2, a_3$  — ветви кривой, определяемой уравнением (2.2),  $b_1, b_2, b_3$  определяются уравнением (2.3). Допустимые области заштрихованы.

Локальное напряженное состояние у концов разреза является комбинацией растяжения и поперечного сдвига. С удалением разреза от включения или с приближением к оси  $OX$  величины  $K_{II}^a, K_{II}^b$  (т. е. вклады сдвига в локальное напряженное состояние у концов) стремятся к нулю. В частном случае  $h = 0$  (разрез лежит на продолжении диаметра) имеем

$$K^{a,b} = K_I^{a,b}, \quad 4 \sqrt{a^3 b} K^a = 4 \sqrt{a b^3} K^b = -\varepsilon p R^2 \sqrt{2\pi (b - a)}$$

Без ограничения общности в дальнейшем будем рассматривать разрезы, для которых  $b \geq |a| \geq 0$ . Для них  $|K^a| > |K^b|$ . Если принять условия разрушения в виде  $|K^a| = K_c, |K^b| = K_c$ , где  $K_c$  — постоянная материала матрицы, то условие разрушения выполнится сначала на конце  $z = a$ . Критическая нагрузка определяется по формуле

$$p = -2K_c \frac{[(a^2 + h^2)^3 (b^2 + h^2)]^{1/4}}{\varepsilon R^2 \sqrt{2\pi (b - a)}}$$

Для трещин малой длины числитель в этом выражении можно заменить на  $a^2 + h^2$ .

Величина критической нагрузки для всех допустимых разрезов имеет минимум

$$p_{\min} = -\frac{4K_c h \sqrt{h}}{\varepsilon R^2 \sqrt{3\pi} \sqrt{3}}$$

Отметим, что в рассмотренной постановке трещина после достижения критической нагрузки отклонится от первоначального направления.

В реальном материале трещины растут вдоль линии приложения нагрузки, что объясняется наличием многих включений. В качестве простейшей модели можно рассмотреть следующую симметричную задачу. Имеются два одинаковых включения.

Первоначальный разрез лежит на линии, проходящей через середину отрезка, соединяющего центры включений, перпендикулярно этому отрезку. Очевидно тогда, что с той же точностью

$$K_{(2)}^{a,b} = 2K_I^{a,b}$$

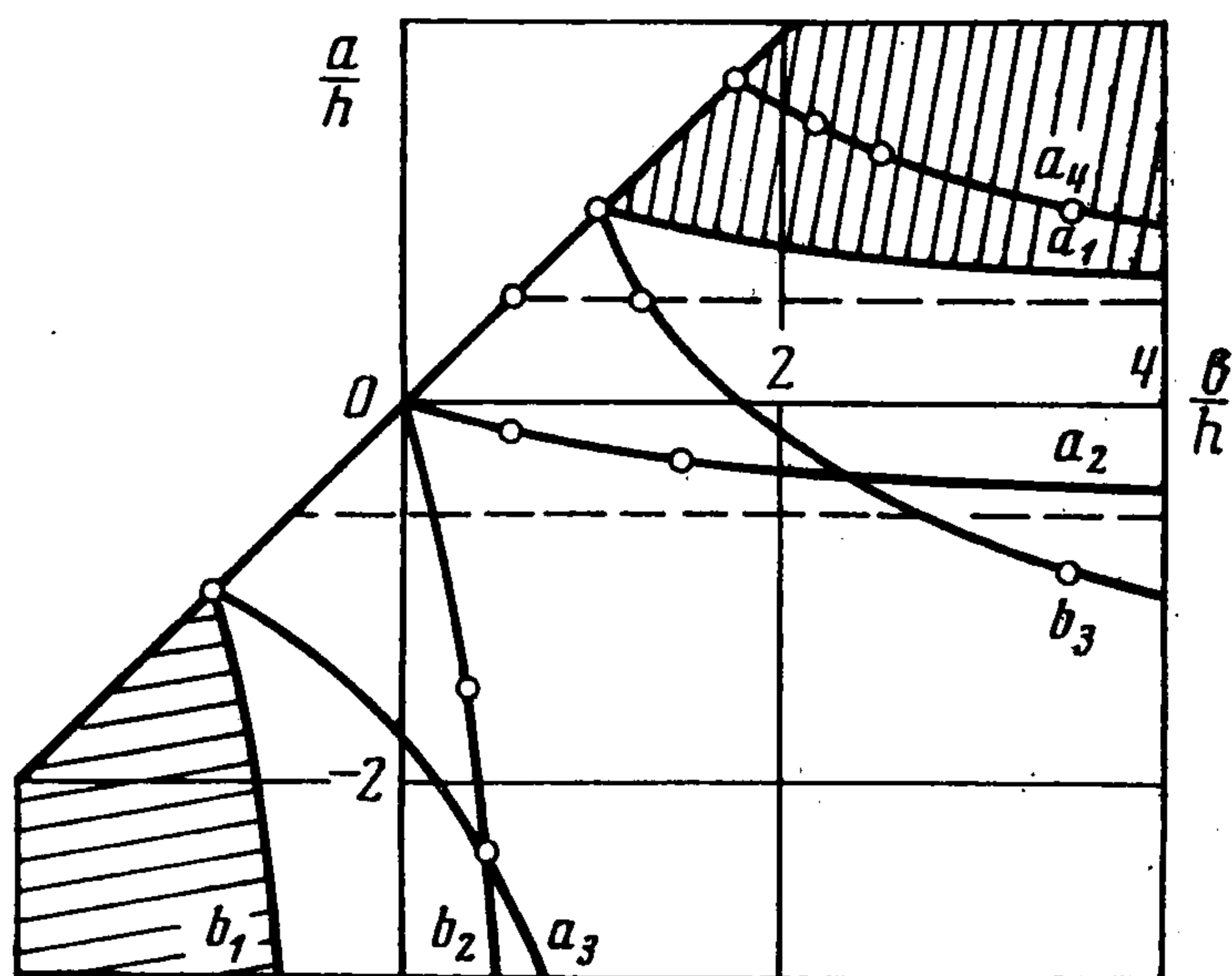
где  $K_{(2)}^{a,b}$  — коэффициенты концентрации напряжений на концах разреза в симметричной задаче. В силу симметрии разрез будет расти по своему первоначальному направлению. Области, где могут существовать свободные разрезы, остаются прежними.

Уравнение  $K_I^a = K_I^b$  имеет два решения (при  $b \geq |a| \geq 0$ ):

$$a = b, \quad a = a_4(b) = h(b + h \sqrt{3}) / (\sqrt{3}b - h)$$

Для малых трещин  $K_I^a > K_I^b$ , поэтому  $K_I^a > 0$  в области  $a_4 < a < b$  и  $K_I^a < 0$  в области  $a_1 < a < a_4$ . Имеют место соотношения

$$\frac{\partial K_I^b}{\partial a} = -\frac{K_I^a}{2(b-a)} < 0, \quad \frac{\partial K_I^a}{\partial b} = \frac{K_I^b}{2(b-a)} > 0$$



т. е. с ростом  $b$  величина  $K_I^a$  увеличивается и достигает максимального значения для полубесконечного разреза

$$K_I^a = -\frac{\varepsilon p R^2}{4} \left[ \pi \frac{a^3 - 3ah^2 + (a^2 + h^2)^{3/2}}{(a^2 + h^2)^3} \right]^{1/2}$$

Соответственно величина  $K_I^b$  как функция  $a$  достигает максимума на линии  $a_1(b)$

$$K_I^b = +1/2 \varepsilon p R^2 (h^2 - 3a^2) [2\pi a^3 (h^2 - a^2)^3 (a^2 + h^2)^{-9}]^{1/2}$$

Так как  $K_I^a = 0$  при  $a = b$  и при  $a = a_1(b)$ , то между этими линиями имеется по крайней мере одна, на которой  $K_I^a$  как функция  $a$  достигает максимума. Так же и  $K_I^b$ , как функция  $b$ , при достаточно больших  $b$  монотонно убывает.

Из приведенных свойств коэффициентов концентрации напряжений вытекают следующие качественные особенности роста трещины в рассмотренной системе. При достижении критической нагрузки трещина может оказаться либо в устойчивом, либо в неустойчивом положении. В первом случае трещина скачком увеличит свою длину и перейдет в новое, устойчивое положение. После этого для увеличения трещины необходимо увеличить нагрузку.

Так как  $K_I^a = 0$  на линии  $a = a_1(b)$ , то пересечь эту линию трещина не может, т. е. ее левый конец тормозится. Правый конец растет неограниченно при неограниченном увеличении нагрузки (но устойчиво).

**3. Решение задачи о частично закрытом разрезе.** Если для исходного разреза выполняется условие  $a < a_1(b)$ , то разрез будет частично сжат. Закрытая область, на которой имеет место только относительный сдвиг берегов, примыкает к левому концу. Для рассмотрения такого случая решим задачу о частично закрытом разрезе.

Будем считать, что берега разреза на  $[a, c]$  сжаты, а на  $[c, b]$  свободны от напряжений. Геометрия включения и разреза такая же, как в п. 1. На  $[c, b]$  будет иметь место условие (1.2), а на  $[a, c]$  примем условия налегания без трения

$$(3.1) \quad [p_{12}] = [p_{22}] = [u_2] = 0, \quad p_{12} = 0$$

Формулы продолжения (1.3) определяются только условиями (1.1) на границе включения, поэтому они остаются прежними.

Введем, следуя [2], функцию  $\Omega = z\Phi' + \Psi$ , через которую выразим напряжения и смещения.

Из первых равенств (3.1) следует, что функция  $Z = 2\Phi + \Omega$  непрерывна при переходе через  $[a, c]$ . Из последнего равенства (3.1) на  $[a, c]$  для  $\Omega$  имеем

$$(3.2) \quad \Omega - \bar{\Omega} + \varepsilon (G' + G^{o'} - \bar{G}' - \bar{G}^{o'}) = 0$$

На  $[c, b]$  условие (1.6) выразим через  $\Omega$  и вычтем из него комплексно-сопряженное, вновь получим (3.2). С той же точностью, что и в п. 1, для  $\Omega$  получим

$$(3.3) \quad \Omega(z) = \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_a^b X(t) (-\varepsilon G^{o'} + \varepsilon \bar{G}^{o'}) \frac{dt}{t-z}$$

Для функции  $Z$  из условия на  $[c, b]$  в том же приближении получаем задачу Дирихле, не зависящую от точки  $z = a$

$$(3.4) \quad Z + \bar{Z} = -\varepsilon G^{o'} - \varepsilon \bar{G}^{o'}$$

Решение её дается формулой

$$(3.5) \quad Z = \frac{1}{2\pi i \sqrt{(z-c)(z-b)}} \int_c^b \sqrt{(t-c)(t-b)} (-\varepsilon G^{o'} - \varepsilon \bar{G}^{o'}) \frac{dt}{t-z}$$

Чтобы решение (3.3), (3.5) имело физический смысл, необходимо следующее

$$(3.6) \quad p_{22} < 0, \quad \forall z \in [a, c]$$

$$(3.7) \quad p_{22}(z=c) = 0$$

При  $z \rightarrow c + 0$  (3.7) следует из (1.2). При  $z \rightarrow c - 0$  напряжение  $p_{22}$  имеет особенность порядка  $(z - c)^{-1/2}$  с коэффициентом концентрации, определяемым действительной частью  $K_{II}^a$  из (1.7) с заменой  $a$  на  $c$ . Поэтому либо  $b = c$ , либо  $c = a_1(b)$ . В первом случае вся трещина закрыта, и из (3.6) следует  $|a| < l$ ,  $|b| < l$ . Этот случай рассматривать не будем.

Когда точка  $c$  лежит на линии  $a_1(b)$ , условие (3.6) проверяется непосредственно. Локальное напряженное состояние у левого конца является поперечным сдвигом. Соответствующий коэффициент концентрации напряжений определяется только функцией  $\Omega$ , т. е. не зависит от точки  $z = c$ . Величина  $K_{II}^a$  определяется мнимой частью первой из формул (1.7). Корень уравнения (2.1), определяемый условием  $|a| < h / \sqrt{3}$ , дает линию  $a_4(b)$ , на которой  $K_{II}^a = 0$ . Следовательно, эту линию трещина пересечь не может.

На правом конце  $z = b$  локальное напряженное состояние является комбинацией растяжения и поперечного сдвига. Величина  $K_I^b$  определяется функцией  $Z$ , т. е. не зависит от сжатого участка, формула для  $K_I^b$  та же, что и в (1.7), с заменой  $a$  на  $c$ , причем между  $c$  и  $b$  имеется связь

$$b = \frac{c(c^2 - 3h^2)}{h^2 - 3c^2}$$

Величина  $K_{II}^b$  определяется мнимой частью второй из формул (1.7) и не зависит от точки  $z = c$ .

Если условие разрушения выполнится на левом конце  $z = a$ , то трещина будет расти по своему первоначальному направлению. Если же условие разрушения выполнится на правом конце  $z = b$ , то трещина отклонится от исходного направления.

Можно рассмотреть симметричную задачу, аналогичную рассмотренной в п. 2. Тогда на сжатом конце  $z = a$  будет иметь место чистый сдвиг,  $K_{(2)}^a = 2K_{II}^a$ . На свободном правом конце будет чистое растяжение, причем  $K_{(2)}^b = 2K_I^b$ . Величина  $K_I^b$  не зависит от точки  $z = a$ , т. е. величина критической нагрузки и дальнейший рост трещины в сторону свободного конца зависит только от исходного значения величины  $b$ . Этот рост, который на начальном этапе может быть неустойчивым, обязательно становится устойчивым. Сжатый конец с увеличением нагрузки может асимптотически приближаться к линии  $a_4(b)$ .

**4. Обсуждение результатов.** Рассмотрим полученные результаты в свете экспериментальных данных по разрушению бетона. Приведем кратко необходимые сведения о разрушении бетонной призмы при центральном сжатии [11]. При небольших нагрузках материал ведет себя как изотропный, линейно-упругий. С некоторой нагрузки (её принято обозначать  $R_T^\circ$ ) начинается рост микродефектов, которые имелись в ненагруженном образце. Возникает система большого числа небольших трещин, параллельных направлению приложенной нагрузки. Дальнейший рост нагрузки сопровождается не столько ростом отдельных трещин, сколько подрастанием большого числа начальных микротрещин и их дальнейшим устойчивым ростом.

Объем образца убывает по линейному закону до уровня  $R_T^\circ$ . После достижения  $R_T^\circ$  уменьшение объема замедляется, и при уровне нагрузки  $R_T^v$  объем достигает минимального значения. После  $R_T^v$  начинается увеличение объема (за счет раскрытия трещин), и при дальнейшем росте нагрузки микротрещины развиваются в магистральные, которые и приводят к разделению образца на части при нагрузке  $R_*$ . Численно  $R_T^\circ \sim (0.2-0.4)R_*$ ,  $R_T^v \sim (0.7-0.9)R_*$ .

Ясно, что при не очень обширной системе дефектов в ненагруженном образце поведение трещины на начальном этапе нагружения определяется взаимодействием с ближайшими включениями. Поэтому полученные выше результаты следует сравнивать с экспериментом при нагрузках порядка  $R_T^\circ$ . При нагрузках порядка  $R_T^v$  и больше устойчивость системы трещин определяется уже их взаимодействием, и необходим другой подход.

Как видно, рассмотренная модель дала две основные качественные особенности:

переход неустойчивого роста трещин в устойчивый и наличие минимума у кривой критической нагрузки, что физически эквивалентно параметру  $R_T^\circ$ .

Из соображений подобия с учетом полученных решений можно предложить формулу для величины  $R_T^\circ$ , аналогичную предложенной в работе [12] для композитов

$$R_T^\circ = K_c k f(\alpha) / \sqrt{R}$$

Здесь  $k$  — коэффициент, зависящий от соотношения упругих моделей заполнителя и матрицы,  $\alpha$  — концентрация крупного заполнителя,  $R$  — характерный размер заполнителя.

Оценим критическую нагрузку для характерной трещины. Для трещин малой длины ( $b - a \ll R$ ) положим  $b - a = 10^{-1}$  мм,  $K_c^2 = 10^{-1}$  кг<sup>2</sup>/мм<sup>3</sup>,  $\epsilon = 1/7$ ,  $(a^2 + h^2)^2 / (R^2 (a^2 - h^2) \sqrt{2\pi}) = 1$ . Получим  $p = 7$  кг/мм<sup>2</sup>.

Полученная величина в два-три раза выше экспериментальной. Объясняется это тем, что, во-первых, учтены только два ближайших включения, во-вторых, параметр  $\epsilon$  отражает только разницу в коэффициентах Пуассона, а в реальном материале различаются и модули сдвига, что приведет к уменьшению критической нагрузки.

Отметим также, что рассмотренная модель дает качественное объяснение ультразвуковой методики определения точки  $R_T^\circ$  [11].

Автор благодарит О. Я. Берга за интерес к работе и ценные замечания.

Поступила 17 II 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. О природе «пинч-эффекта» и некоторых других вопросах теории разрушения. ПМТФ, 1965, № 1.
2. Черепанов Г. П. О развитии трещин в сжатых телах. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
3. Поль Б. Макроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения. В сб. Разрушение, т. 2, гл. 4. М., «Мир», 1975.
4. Гольдштейн Р. В., Ладыгин В. М., Осипенко Н. М., Модель хрупкого разрушения слабо пористого материала при сжатии и растяжении. Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 1974, № 1.
5. Жоржолуани Г. Т., Каландия А. И. Влияние жесткого включения на интенсивность напряжений около концов разреза. ПММ, 1974, т. 38, вып. 4.
6. Erdogan F., Gupta G. D. The inclusion problem with a crack crossing the boundary. Internat. J. Fracture, 1975, vol. II, No. I, p. 13—17.
7. Erdogan F., Gupta G. D., Ratwani M. Interaction between a circular inclusion and an arbitrary oriented crack. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech, 1974, vol. 41, No 4.
8. Шерман Д. И. О напряжениях в весоной полуплоскости, ослабленной двумя круговыми отверстиями. ПММ, 1951, т. 15, вып. 3.
9. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
10. Партон В. З. Об одной оценке взаимного упрочнения трещин при их шахматном расположении. ПМТФ, 1965, № 5.
11. Берг О. Я., Щербаков Е. Н., Писанко Г. Н. Высокопрочный бетон. М., Стройиздат, 1971.
12. Черепанов Г. П. О прочности композитов. ПМТФ, 1967, № 2.

Технический редактор З. В. Филиппова

Сдано в набор 25/V-1977 г. Т-12948 Подписано к печати 26/VII-1977 г. Тираж 2875 экз.  
Зак. 2426 Формат бумаги 70×108<sup>1/16</sup> Усл. печ. л. 16,8+1 вкл. Бум. л. 6,0 Уч.-изд. л. 16,0

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10