УДК 539.3

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

А. С. Лозовский

(Якутск)

Рассматривается задача определения напряжений в бесконечной вязкоупругой пластине с круговым отверстием, вокруг которого образуется увеличивающаяся со временем зона фазового перехода. Задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Известно, что зависимость обратного оператора упругой задачи от времени, появляющаяся, в частности, в задачах, где граничные условия формулируются на подвижных границах (контактные задачи, определение напряжений в выгорающих цилиндрах и др.), как правило, исключают возможность применения принципа Вольтерра [1-3].

В данной работе рассматривается задача определения напряжений в бесконечной пластине из вязкоупругого материала с отверстием радиуса a, вокруг которого образуется увеличивающаяся со временем область фазового превращения. На фазовой границе $S(t)$ происходит скачкообразное изменение физических характеристик среды, таких, как плотность, модуль Юнга, вязкость и т. д.

Отметим работу [4], где в рамках теории упругости исследованы напряжения, вызванные изменением плотности при фазовом переходе в полуплоскости под воздействием теплого штампа; граница раздела фаз считалась неподвижной.

Предположим, что температурное поле осесимметрично и вследствие этого фазовая граница имеет круговую форму. Закон движения ее может быть определен решением соответствующей задачи Стефана [5].

Определяющие соотношения между напряжениями и деформациями примем в виде

$$\dot{\varepsilon}_{x,y} = \frac{1+\nu}{\mathrm{E}}\{\sigma_{x,y} - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\}, \quad \dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{1+\nu}{\mathrm{E}}\sigma_{xy}$$

$$\frac{1}{\mathrm{E}} = \frac{1}{E}\left\{1 + \sum_k a_k \frac{d^k}{dt^k}\right\}$$

С помощью функции Эри и уравнения совместности деформаций можно получить аналог формул Колосова — Мусхелишвили [6]

$$u_1^{\bullet} + iu_2^{\bullet} = \frac{1+\nu}{E}\{\varkappa\varphi(z,t) - z\overline{\varphi'(z,t)} - \overline{\psi(z,t)}\} \tag{1}$$

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2\mathrm{Re}\varphi'(z,t)$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2\{\bar{z}\varphi''(z,t) + \psi'(z,t)\}$$

Пусть область $a \leqslant r \leqslant S(t)$ занята фазой 1, а область $\infty > r > S(t)$ — фазой 2. Дополним уравнения (1) граничными условиями

$$\sigma_{11}^{(2)} = -p_1, \quad \sigma_{22}^{(2)} = -p_2, \quad r = \infty \tag{2}$$

$$\sigma_r^{(1)} - i\sigma_{\theta r}^{(1)} = \sigma_r^{(2)} - i\sigma_{r\theta}^{(2)}, \quad r = S(t)$$

$$u_r^{\bullet(1)} - iu_\theta^{\bullet(1)} = u_r^{\bullet(2)} - iu_\theta^{\bullet(2)}, \quad r = S(t)$$

$$\sigma_r^{(1)} - i\sigma_\theta^{(1)} = 0, \quad r = a$$

Эти условия могут соответствовать, например, задаче об устойчивости неподкрепленной горной выработки глубокого заложения в мерзлых породах. Здесь пренебрегается изменением плотности, а влияние фазового перехода поровой воды сказывается на таких характеристиках, как модуль Юнга, вязкость и пр. Верхний индекс у переменных отмечает, к какой из двух зон относится рассматриваемая величина.

Представим неизвестные функции $\varphi(z, t)$ и $\psi(z, t)$ в каждой из зон степенным рядом [7]

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(z, t) = \{a_3(t)z^3 + a_1(t)z + a_{-1}(t)z^{-1}\} \\
&\psi_1(z, t) = \{b_1(t)z + b_{-1}(t)z^{-1} + b_{-3}(t)z^{-3}\} \qquad \text{при } a \leqslant r \leqslant S(t) \\
&\varphi_2(z, t) = \Gamma\left\{z + \frac{\alpha_{-1}(t)}{z}\right\} \\
&\psi_2(z, t) = \Gamma'\left\{z + \frac{\beta_{-1}(t)}{z} + \frac{\beta_{-3}(t)}{z^3}\right\} \qquad \text{при } S(t) \leqslant r < \infty
\end{aligned} \tag{3}$$

Постоянные Γ и Γ' выбираются таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия на бесконечности. Подставляя разложения (3) в три последние граничные условия (2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $e^{i\theta}$, получаем систему уравнений для определения неизвестных функций разложений (3)

$$\begin{aligned}
&2a_1(t) + \frac{b_{-1}(t)}{a^2} = 0, \quad a_3(t)a^4 - a_{-1}(t)a^2 + b_{-3}(t) = 0, \\
&3a_3(t)a^4 + a_{-1}(t) + b_1(t)a^2 = 0 \\
&2\Gamma + \frac{\Gamma'\beta_{-1}(t)}{S^2(t)} = 2a_1(t) + \frac{b_{-1}(t)}{S^2(t)} \\
&-\frac{\Gamma\alpha_{-1}(t)}{S^2(t)} + \frac{\Gamma'\beta_{-3}(t)}{S^4(t)} = a_3(t)S^2(t) - \frac{a_{-1}(t)}{S^2(t)} + \frac{b_{-3}(t)}{S^4(t)} \\
&\frac{\Gamma\alpha_{-1}(t)}{S^2(t)} + \Gamma = 3a_3(t)S^2(t) + \frac{a_{-1}(t)}{S^2(t)} + b_1(t) \\
&\frac{1+\nu_2}{E_2}\left\{(\varkappa_2 - 1)S(t)\Gamma - \frac{\Gamma'\beta_{-1}(\tau)}{S(t)}\right\} = \\
&= \frac{1+\nu_1}{E_1}\left\{(\varkappa_2 - 1)a_1(\tau)S(t) - \frac{b_{-1}(\tau)}{S(t)}\right\} \\
&\frac{1+\nu_2}{E_2}\left\{\varkappa_2\frac{\Gamma\alpha_{-1}(\tau)}{S(t)} - \Gamma' S(t)\right\} = \\
&= \frac{1+\nu_1}{E_1}\left\{\varkappa_1\frac{a_{-1}(\tau)}{S(t)} - 3a_3(\tau)S^3(t) - b_1(\tau)S(t)\right\} \\
&\frac{1+\nu_2}{E_2}\left\{\frac{\alpha_{-1}(\tau)\Gamma}{S(t)} - \frac{\Gamma'\beta_{-3}(\tau)}{S^3(t)}\right\} = \\
&= \frac{1+\nu_1}{E_1}\left\{\varkappa_1 a_3(\tau)S^3(t) + \frac{a_{-1}(\tau)}{S(t)} - \frac{b_{-3}(\tau)}{S^3(t)}\right\}
\end{aligned} \tag{4}$$

В отличие от соответствующей упругой задачи третье условие (2) дает три дифференциальных уравнения (последние три уравнения в (4)). Аргумент τ показывает, что дифференциальные операторы действуют только на функцию с этим аргументом. Наличие в указанных дифференциальных уравнениях зависящих от времени сомножителей при неизвестных коэффициентах разложений указывает на то, что в рассматриваемой задаче неприменима какая-либо вязкоупругая аналогия, и система уравнений (4) должна решаться непосредственно, например, методом малого параметра, если закон движения границы имеет вид $S(t) = S_0 + \varepsilon h(t)$, $\varepsilon \ll 1$.

Для примера определим коэффициент $\beta_{-1}(t)$, который будем искать в виде ряда

$$\beta_{-1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{(k)}\beta_{-1}^{(k)}(t)$$

Первое, четвертое и седьмое уравнения (4) можно свести к одному дифференциальному уравнению относительно $\beta_{-1}(t)$

$$\begin{aligned}
&\frac{1+\nu_2}{E_2}\left\{(\varkappa_2 - 1)S(t)\Gamma - \frac{\Gamma'\beta_{-1}(\tau)}{S(t)}\right\} = \\
&= \frac{1+\nu_1}{E_1}\left\{\frac{(\varkappa_1 - 1)S(t)}{2} + \frac{a^2}{S(t)}\right\}\left\{\frac{2\Gamma S^2(\tau) + \Gamma'\beta_{-1}(\tau)}{S^2(\tau) - a^2}\right\}
\end{aligned} \tag{5}$$

В нулевом приближении в уравнении (5) вместо $S(t)$, $S(\tau)$ фигурирует S_0, что соответствует вязкоупругой задаче с неподвижной границей, решение которой можно получить с помощью принципа соответствия.

Данная постановка может быть обобщена на случай скачкообразного изменения плотности заменой третьего условия (2) на условие

$$\dot{u}_r^{(1)} - \dot{u}_r^{(2)} |_{r=S(t)} = kS^{\cdot}(t), \quad k = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}$$

где k — относительное изменение объема; ρ_1, ρ_2 — плотности фаз.

Отметим, что если определяющие уравнения связи напряжений и деформаций имеют вид

$$\sigma = f(\varepsilon, \varepsilon^{\cdot}, \varepsilon^{\cdot\cdot}, \ldots) \tag{6}$$

то построение формул Колосова — Мусхелишвили через функцию Эри для области $a \leqslant r \leqslant S(t)$ при монотонно возрастающей $S(t)$ сопряжено с трудностями. В литературе известен и другой путь построения формул Колосова — Мусхелишвили — прямое преобразование уравнений равновесия в перемещениях [8]. Этот способ позволяет непосредственно использовать уравнения (6), но дает для вектора перемещений выражение вида

$$2G(u_1 + iu_2) = \varkappa\varphi(z, t) - z\overline{\varphi'(z, t)} - \overline{\psi(z, t)}$$

Определение перемещений из этого выражения снова связано с интегрированием по времени. В то же время использование уравнений связи (1) в отличие от (6) приводит к относительно простым соотношениям.

Автор благодарит Э. А. Бондарева за внимание к работе и замечания.

Поступила 21 VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каминский А. А., Рушицкий Я. Я.* О применимости принципа Вольтерра при исследовании движения трещин в наследственно-упругих средах. Прикл. механ., 1969, т. 5, вып. 4.
2. *Corneliussen A. H., Kamowitz E. F., Lee E. H., Radok J. R. M.* Viscoelastic stress analysis of a spinning hollow circular cylinder with an ablating pressurized cavity. Trans. Soc. Rheol., 1963, vol. 7, p. 357—390.
3. *Азаров А. Д., Громов В. Г.* Смешанная плоская осесимметричная задача теории вязкоупругости с подвижной границей. Прикл. механ., 1974, т. 10, вып. 12.
4. *Гойса В. И.* Температурные напряжения в плоской задаче теории упругости, обусловленные фазовыми переходами. ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.
5. *Бондарев Э. А., Красовицкий Б. А.* Температурный режим нефтяных и газовых скважин. Новосибирск, «Наука», 1974.
6. *Радок Дж. Р. М.* Плоские задачи линейной теории вязкоупругости. В сб.: Проблемы механики сплошной среды. М., Изд-во АН СССР, 1961.
7. *Савин Г. К.* Концентрация напряжений около отверстий. М.— Л., Гостехиздат, 1951.
8. *Амензаде Ю. А.* Теория упругости. М., «Высшая школа», 1971.