УДК 532.546

О ПРОДВИЖЕНИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

О. В. Голубева, В. Ф. Пивень

(Москва, Кострома)

Рассматривается поршневое вытеснение одной жидкости другой при произвольном нелинейном законе фильтрации. Дано точное решение задачи в одномерном случае и для двумерного случая указаны два приближенных решения.

1. Пусть среда неоднородна и недеформируема, жидкость несжимаема и ее движение описывается произвольным, вообще говоря, нелинейным законом фильтрации. Пусть область фильтрации имеет постоянные границы L_s и L_k и занята двумя жидкостями различных физических свойств, которые перемещаются в результате поршневого вытеснения. Подвижная граница раздела жидкостей L делит область фильтрации на две зоны, уравнения фильтрации в которых [1]

$$\operatorname{grad}\varphi_\alpha = F_\alpha \frac{\mathbf{v}_\alpha}{v_\alpha}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v}_\alpha = 0 \tag{1.1}$$

$$\varphi_\alpha = -P_\alpha - \gamma_\alpha z, \quad \alpha = 1, 2$$

Здесь F_α — экспериментальная функция, зависящая от модуля скорости фильтрации v_α, вязкости μ_α и плотности ρ_α жидкостей, проницаемости k и пористости m среды, P_α — давление, γ_α — удельный вес жидкостей, z — вертикальная координата.

При двумерной фильтрации в слое переменной толщины $\sqrt{H}$, расположенном на поверхности, на которой выбрана ортогональная система координат p, q, уравнения (1.1) принимают вид (см. [2])

$$v_{\alpha p} = \frac{v_\alpha}{F_\alpha\sqrt{E}}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial p} = \frac{1}{\sqrt{G}\sqrt{H}}\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial q} \tag{1.2}$$

$$v_{\alpha q} = \frac{v_\alpha}{F_\alpha\sqrt{G}}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial q} = -\frac{1}{\sqrt{E}\sqrt{H}}\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial p}$$

$$v_\alpha = F_\alpha^{-1} = \frac{1}{\sqrt{H}}\sqrt{\frac{1}{G}\left(\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{E}\left(\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial p}\right)^2}$$

$$F_\alpha^{-1} = F_\alpha^{-1}(|\operatorname{grad}\varphi_\alpha|, \ \mu_\alpha, \rho_\alpha, k, m), \quad |\operatorname{grad}\varphi_\alpha| = \sqrt{\frac{1}{E}\left(\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial p}\right)^2 + \frac{1}{G}\left(\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial q}\right)^2}$$

F_α^{-1} — функция, обратная F_α, $\sqrt{E}$, $\sqrt{G}$ — коэффициенты координатной сети поверхности; ψ_α — функция тока. Из системы (1.2) имеем для φ_α уравнения

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{F_\alpha^{-1}\sqrt{G}\sqrt{H}}{|\operatorname{grad}\varphi_\alpha|\sqrt{E}}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial p}\right) + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{F_\alpha^{-1}\sqrt{E}\sqrt{H}}{|\operatorname{grad}\varphi_\alpha|\sqrt{G}}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial q}\right) = 0 \tag{1.3}$$

Если границы L_s и L_k — соответственно контур скважины и контур питания и на них заданы постоянные давления P_α, то условия для φ_α будут

$$[\varphi_1]_{L_s} = \varphi_s, \quad [\varphi_2]_{L_k} = \varphi_k \tag{1.4}$$

На границе L выполняют условия непрерывности давления и нормальных составляющих скорости, которые можно записать в виде

$$[\varphi_1 + \gamma_1 z]_L = [\varphi_2 + \gamma_2 z]_L \tag{1.5}$$

$$\left[\frac{F_1^{-1}}{|\operatorname{grad}\varphi_1|}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right]_L = \left[\frac{F_2^{-1}}{|\operatorname{grad}\varphi_2|}\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right]_L$$

Уравнение границы L будем искать в параметрическом виде

$$p_L = p_L(t, \tau_0), \quad q_L = q_L(t, \tau_0)$$

где τ_0 — параметр. В начальный момент $t = 0$ уравнение границы известно

$$p_0 = p_L(0, \tau_0), \quad q_0 = q_L(0, \tau_0) \tag{1.6}$$

Физическая скорость частиц жидкости $d\mathbf{r} / dt$ и скорость фильтрации $\mathbf{v}$ связаны соотношением $d\mathbf{r} / dt = \mathbf{v} / m$, поэтому дифференциальные уравнения границы L будут вида

$$\frac{dp_L}{dt} = \left[\frac{F_\alpha^{-1}\partial\varphi_\alpha/\partial p}{|\operatorname{grad}\varphi_\alpha|\, m\sqrt{E}}\right]_{p=p_L,\ q=q_L} \tag{1.7}$$

$$\frac{dq_L}{dt} = \left[\frac{F_\alpha^{-1}\partial\varphi_\alpha/\partial q}{|\operatorname{grad}\varphi_\alpha|\, m\sqrt{G}}\right]_{p=p_L,\ q=q_L}, \quad \alpha = 1 \text{ или } 2$$

Эти уравнения надлежит интегрировать совместно с уравнениями (1.3) при граничных условиях (1.4), (1.5) и начальном условии (1.6), что в общем виде представляет трудную задачу.

2. В частном случае одномерной фильтрации поставленная задача допускает точное решение в конечном виде. Именно, фильтрация будет происходить вдоль линий $p = \mathrm{const}$, если на выбор координатной сети поверхности, закон изменения толщины, проницаемости и пористости слоя будут наложены ограничения

$$\sqrt{E}\sqrt{H} = A(p)B(q), \quad \sqrt{G} = C(q) \tag{2.1}$$
$$z = z(q), \quad k = k(q), \quad m = m(q)$$

где $A(p)$ и $B(q)$, $C(q)$ — некоторые функции p и q. Кроме того, контуры скважины L_s и питания L_k будут располагаться вдоль линий $q = q_s$ и $q = q_k$, а граница L — вдоль линий $q = \mathrm{const}$ для начального и последующего моментов времени.

В этом случае из уравнений (1.3) при условиях (1.4), (1.5) имеем

$$\varphi_1 = \varphi_s + \int_{q_s}^{q} F_1 dq, \quad \varphi_2 = \varphi_k + \int_{q_k}^{q} F_2 dq \tag{2.2}$$

и, следовательно, скорость течения будет

$$v_{1q} = v_{2q} = v = \lambda(q_L) A(p) / (\sqrt{E}\sqrt{H})$$

где $\lambda(q_L)$ определяется из равенства

$$\int_{q_s}^{q_L} \sqrt{G} F_1 dq + \int_{q_L}^{q_k} \sqrt{G} F_2 dq + \varphi_s - \varphi_k + (\gamma_1 - \gamma_2) z = 0$$

$$F_\alpha = F_\alpha(\lambda(q_L) A(p) / (\sqrt{E}\sqrt{H}),\ \mu_\alpha, \rho_\alpha, k, m), \quad \alpha = 1, 2$$

Тогда, как следует из (1.6) и (1.7), определение границы раздела жидкостей L сводится к вычислению квадратуры

$$t = \frac{1}{A(p)} \int_{q_0}^{q_L} [m\sqrt{EGH}]_{q=q_L} \frac{dq_L}{\lambda(q_L)} \tag{2.3}$$

3. В случае двумерной фильтрации можно указать два последовательных приближенных решения в конечном виде задачи о продвижении границы раздела жидкостей.

В первом приближении считаем, что физические свойства жидкостей идентичны (одножидкостная система). Полагаем, что можно найти решение уравнения (1.3) в виде

$$\varphi = \Phi(\Lambda, p, q) + M \tag{3.1}$$

где Λ и M — постоянные, определяемые из граничных условий (1.4). Тогда из системы (1.2) можно найти функцию тока $\psi(p, q)$.

Так как в этом случае граница L состоит из отмеченных частиц жидкости, то уравнение линий тока $\psi(p, q) = \psi(p_0, q_0) = a$, или в параметрическом виде

$$p = p(\tau, a), \quad q = q(\tau, a) \quad (a = a(\tau_0) = \text{const}) \tag{3.2}$$

— первый интеграл дифференциальных уравнений (1.7). Тогда уравнение границы L будет

$$p_L = p(\tau_L, a), \quad q_L = q(\tau_L, a) \tag{3.3}$$

где параметр τ_L, определяющий положение точки границы на линии тока (3.2), должен быть найден как функция времени. Согласно (1.7) уравнение движения точки границы вдоль линии тока (3.2)

$$[dS / dt]_{\tau=\tau_L} = [F^{-1} / m]_{\tau=\tau_L}$$

или

$$\frac{d\tau_L}{dt} = \left[\frac{F^{-1}}{m dS / d\tau}\right]_{\tau=\tau_L} \quad \left(\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\right) \tag{3.4}$$

$$F^{-1} = F^{-1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\frac{1}{dS/d\tau}, \mu, \rho, k, m\right), \quad \frac{dS}{d\tau} = \sqrt{E\left(\frac{dp}{d\tau}\right)^2 + G\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2}$$

где k и m при помощи (3.2) записываются как функции τ и a. Будем отсчитывать τ_L от начального положения границы L. Тогда уравнение (3.4) надлежит интегрировать при начальном условии $\tau_L|_{t=0} = 0$, что дает

$$t = \int_0^{\tau_L} \left[\frac{m}{F^{-1}}\frac{dS}{d\tau}\right]_{\tau=\tau_L} d\tau_L \tag{3.5}$$

Отсюда

$$\tau_L = \tau_L^{(1)}(t, a) \tag{3.6}$$

Тогда (3.3) и (3.6) определяет уравнение границы L в первом приближении.

Во втором приближении принимается схема жестких линий тока [3]. Функция тока течения принимается такой же, как и в первом приближении. На границе L будет отсутствовать преломление линий тока, поэтому второе условие (1.5) непрерывности нормальных составляющих скорости можно заменить условием равенства векторов скорости, т. е.

$$\left[\frac{F_1^{-1}\operatorname{grad}\varphi_1}{|\operatorname{grad}\varphi_1|}\right]_L = \left[\frac{F_2^{-1}\operatorname{grad}\varphi_2}{|\operatorname{grad}\varphi_2|}\right]_L \tag{3.7}$$

Следовательно, на границе L будет выполняться первое условие (1.5) и (3.7), которое запишем в проекции на касательную к линии тока

$$[\varphi_1 + \gamma_1 z]_{\tau=\tau_L} = [\varphi_2 + \gamma_2 z]_{\tau=\tau_L}, \quad [F_1^{-1}]_{\tau=\tau_L} = [F_2^{-1}]_{\tau=\tau_L} \tag{3.8}$$

Исходя из решения (3.1), функцию φ_α вдоль линии тока (3.2) ищем в виде

$$\varphi_\alpha = \Phi_\alpha(\Lambda_\alpha(\tau_L), p, q) + M_\alpha(\tau_L), \quad \alpha = 1, 2 \tag{3.9}$$

где Λ_α и M_α как функции τ_L определяются из граничных условий (1.4), (3.8). Подставляя (3.9) в равенство (3.5), найдем

(3.10) $$\tau_L = \tau_L^{(2)}(t, a)$$

Тогда (3.3) и (3.10) будут определять в конечном виде уравнение границы L во втором приближении.

4. В качестве примера рассмотрим продвижение границы раздела жидкостей к совершенной эксплуатационной скважине в плоском ($\sqrt{E} = r$, $\sqrt{G} = 1$) однородном ($k = \text{const}$, $m = \text{const}$) слое. На скважине и концентричном к ней контуре питания, радиусы которых r_s и r_k, заданы условия

(4.1) $$[\varphi_1]_{r=r_s} = \varphi_s, \quad [\varphi_2]_{r=r_k} = \varphi_k$$

Уравнение границы L в начальный момент известно

(4.2) $$r_0 = r_0(\tau_0), \quad \theta_0 = \theta_0(\tau_0)$$

Найдем решение задачи в первом приближении. Течение одномерно, поэтому из уравнения (1.3) имеем удовлетворяющую условиям (1.4) функцию

(4.3) $$\varphi = \varphi_s - \int_{r_s}^{r} F\left(\frac{Q}{2\pi r}\right) dr \qquad \left(\int_{r_s}^{r_k} F\left(\frac{Q}{2\pi r}\right) dr - (\varphi_s - \varphi_k) = 0\right)$$

где Q — отнесенный к единице толщины слоя дебит скважины — определяется соотношением в скобках. В этом случае параметр τ_L удобно выбрать в виде $\tau_L = r_0 - r_L$ где r_L — расстояние от границы L до центра скважины. Тогда согласно (3.5), (4.2 и (4.3) имеем в первом приближении уравнение границы

(4.4) $$r_L = \sqrt{r_0^2(\tau_0) - \frac{Qt}{\pi m}}, \quad \theta_0 = \theta_0(\tau_0)$$

Теперь получим решение задачи во втором приближении. Условия (3.8) на границе L примут вид

(4.5) $$[\varphi_1]_{r=r_L} = [\varphi_2]_{r=r_L}, \quad [F_1^{-1}]_{r=r_L} = [F_2^{-1}]_{r=r_L}$$

Функция φ_α, удовлетворяющая условиям (4.1), (4.5), в этом случае

(4.6) $$\varphi_1 = \varphi_s - \int_{r_s}^{r} F_1 dr, \quad \varphi_2 = \varphi^{\cdot}_k + \int_{r}^{r_k} F_2 dr$$

$$F_\alpha = F_\alpha\left(\frac{Q(r_L)}{2\pi r}, \mu_\alpha, \rho_\alpha\right) \qquad \left(\int_{r_s}^{r_L} F_1 dr + \int_{r_L}^{r_k} F_2 dr - (\varphi_s - \varphi_k^{\cdot}) = 0\right)$$

Тогда уравнение границы L во втором приближении

(4.7) $$t = 2\pi m \int_{r_L}^{r_0(\tau_0)} \frac{r_L dr_L}{Q(r_L)}, \quad \theta_0 = \theta_0(\tau_0)$$

5. Результаты решенной задачи используем для исследования влияния нелинейности закона фильтрации на продвижение границы L.

Ограничимся первым приближением. Пусть фильтрация подчиняется двучленному закону [4]

(5.1) $$F = \frac{\mu}{k} v + \beta v^2$$

и в начальный момент граница L — прямая, отстоящая от оси ox на расстоянии h

$$r_0 \sin\theta_0 = h \quad (0 \leqslant \theta_0 \leqslant \pi)$$

Согласно (4.4) имеем уравнение границы

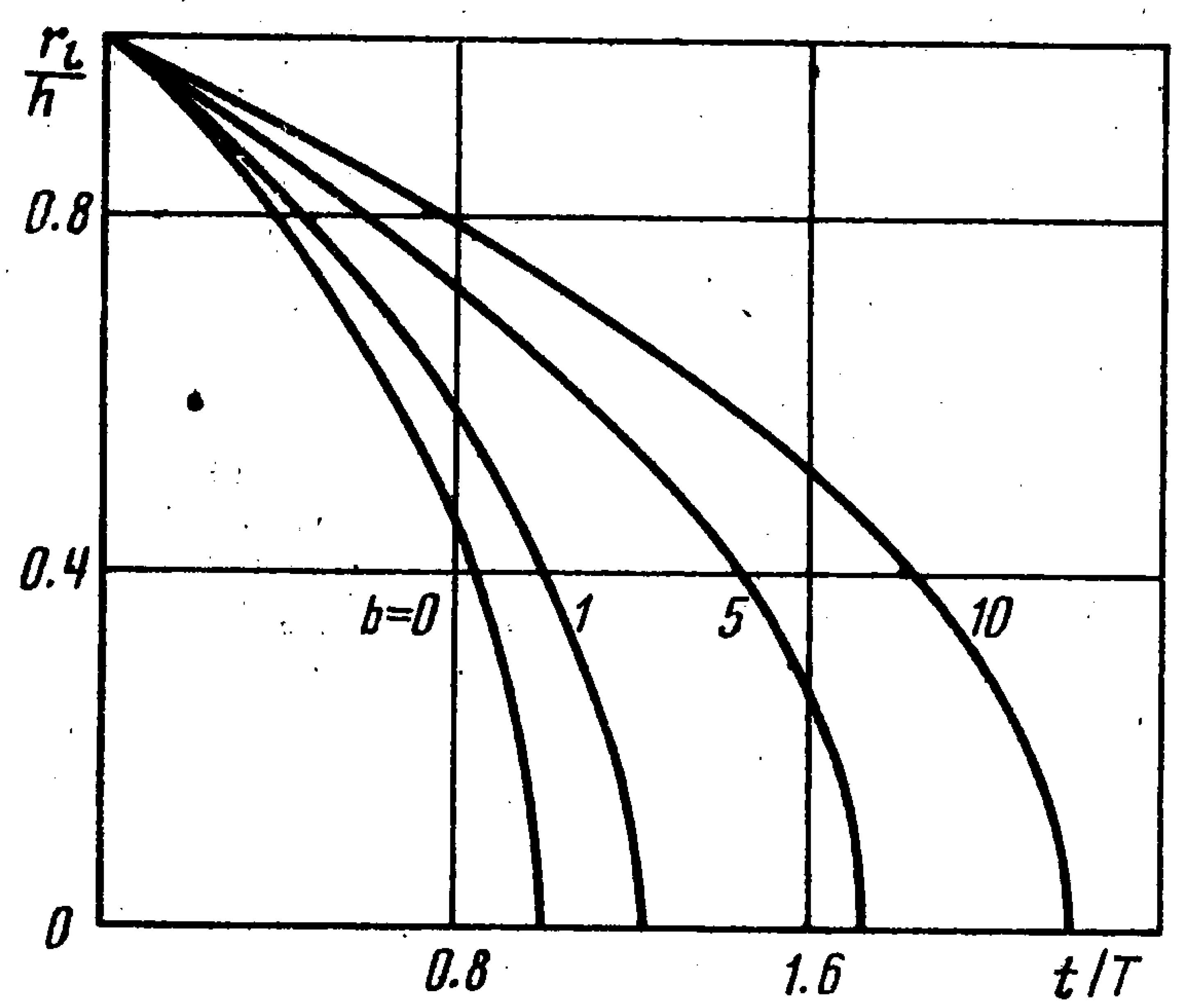
$$r_L = \sqrt{\frac{h^2}{\sin^2\theta_0} - \frac{Qt}{\pi m}}, \quad Q = 4\pi(\varphi_s - \varphi_k)\left(\frac{\mu}{k}\ln\frac{r_k}{r_s}\right)^{-1}(1+\sqrt{1+b})^{-1}$$

$$b = 4\beta(\varphi_s - \varphi_k)\left(\frac{1}{r_s} - \frac{1}{r_k}\right)\left(\frac{\mu}{k}\ln\frac{r_k}{r_s}\right)^{-2}$$

Быстрее всего граница достигнет скважины по кратчайшему направлению $\theta_0 = \pi / 2$. Если принять, что $r_s \ll h$, то в этом направлении перемещение границы будет

$$r_L = h\sqrt{1 - \frac{2}{b}(\sqrt{1+b} - 1)\frac{t}{T}}, \quad T = \frac{m\mu h^2}{2k(\varphi_s - \varphi_k)}\ln\frac{r_k}{r_s}$$

где T — время, по истечении которого граница достигнет скважины при линейной фильтрации.



На фигуре показано перемещение границы в направлении $\theta_0 = \pi / 2$ при линейной фильтрации, когда $\beta = 0$, и, следовательно, $b = 0$, и при нелинейной фильтрации, когда $b = 1, 5, 10$. Видно, что нелинейность закона фильтрации (5.1) приводит к замедлению продвижения границы.

Поступила 22 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Христианович С. А.* Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси. ПММ, 1940, т. 4, вып. 1.
2. *Голубева О. В.* Уравнения двумерных движений идеальной жидкости по криволинейной поверхности и их применение в теории фильтрации. ПММ, 1950, т. 14, вып. 3.
3. *Чарный И. А.* Подземная гидрогазодинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.
4. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР. (1917—1967). М., «Наука», 1969.