Источники акустических колебаний в градиентном течении вынесены в правую часть.

Для исключения скорости v_y, входящей в уравнения (3) и (4), необходимо использовать выражения для $\boldsymbol{\omega}$ и $\operatorname{div} \mathbf{v}$ и второе уравнение (1).

При $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ скорость v_y выражается через $\boldsymbol{\omega}$, и уравнение (3) для плоских колебаний сводится к известному уравнению Орра—Зоммерфельда, содержащему первую производную по времени. В общем случае уравнения (3) и (4) содержат производные по времени до третьей включительно, решение содержит три взаимосвязанных волны: прямая и обратная акустические волны и волна Толлмина — Шлихтинга. Фазовые скорости первых двух волн близки к скорости звука (с поправкой на снос волны потоком), скорость третьей волны лежит в интервале изменения стационарной скорости потока. Эти волны, естественно, будут взаимосвязаны граничными условиями. Акустические волны, распространяющие в дозвуковом потоке вверх по течению, могут привести к абсолютной неустойчивости ограниченного потока.

Отметим одно точное соотношение между плоскими акустическими и вихревыми возмущениями, следующее из уравнения (3) для потока с линейным профилем скорости при пренебрежении вязким членом

$$\omega_z / \Omega_0 + \eta = \mathrm{const}$$

Здесь $\Omega_0 = -dU / dy$ — постоянная завихренность стационарного потока. Этот инвариант получается при подстановке в уравнение (3) при $\nu = 0$ и $d^2U / dy^2 = 0$ выражения для $\operatorname{div} \mathbf{v}$ из второго уравнения (1).

УДК 533.6.011:538.4

ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ НАМАГНИЧИВАЮЩЕГОСЯ ПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА

В. Б. Горский

(Горький)

Рассматривается одномерное стационарное адиабатическое движение в трубке тока намагничивающегося идеально проводящего невязкого совершенного газа в магнитном поле. Получено дифференциальное соотношение, определяющее условия непрерывного ускорения газа с переходом через скорость звука. Показано существование необычного ускоряющего сопла с расширяющимися — сужающимися стенками.

Отметим, что изучение звуковых и простых волн в намагничивающейся сжимаемой среде недавно проводилось в работах [1-3].

1. Стационарное адиабатическое движение намагничивающегося идеально электропроводного невязкого и нетеплопроводного совершенного газа в приближении феррогидродинамики описывается следующей системой уравнений [3,4]:

$$\rho (\mathbf{v}\nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \rho \nabla \left(\frac{H^2}{8\pi} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right) - \frac{H^2}{8\pi} \frac{\partial \mu}{\partial T} \nabla T - \left[\frac{\mathbf{B}}{4\pi} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} \right]$$

$$\mathbf{v}\nabla \left(s + \frac{H^2}{8\pi\rho} \frac{\partial \mu}{\partial T} \right) = 0, \qquad \nabla (\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{1.1}$$

$$\operatorname{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = 0, \qquad \nabla \mathbf{B} = 0$$

где предполагается выполнение линейной связи $\mathbf{B} = \mu (\rho, T)\mathbf{H}$ между магнитной индукцией $\mathbf{B}$ и напряженностью магнитного поля $\mathbf{H}$ (обозначения обычные).

Вместо приведенного уравнения для энтропии s удобно иметь также уравнение энергии, которое можно получить из первых двух уравнений (1.1) (w — энтальпия газа)

$$
\mathbf{v}\left\{\left[\frac{\mathbf{B}}{4\pi\rho}\times\operatorname{rot}\mathbf{H}\right]+\nabla\left[\frac{v^2}{2}+w+\frac{H^2}{8\pi\rho}\left(T\frac{\partial\mu}{\partial T}-\rho\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)\right]\right\}=0 \tag{1.2}
$$

Ограничимся изучением одномерного течения в трубке тока, предполагая, что все параметры газа и поля зависят только от декартовой координаты x, направленной вдоль потока. Считаем также, что проекции скорости $v_y = v_z = 0$, $v_x = v$, а магнитное поле имеет все три компоненты H_x, H_y, H_z по осям прямоугольных декартовых координат x, y, z.

Запишем первое, четвертое, пятое уравнения (1.1) и уравнение (1.2) для данного одномерного случая и добавим к ним уравнение состояния и условие постоянства расхода в трубке

$$
p = \rho R T, \qquad \rho v F = \mathrm{const}
$$

где R — газовая постоянная, F — площадь поперечного сечения трубки. Решая эту систему уравнений, находим следующее дифференциальное соотношение:

$$
(v^2-a^2)\frac{dv}{v\,dx} = N\frac{dF}{F\,dx} \tag{1.3}
$$

$$
a^2 = \frac{a_0^2}{k}+\frac{H_n^2}{2\pi}\left(\frac{\mu}{2\rho}-\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)+\frac{\rho H^2}{8\pi}\left[\frac{2}{\mu}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2-\frac{\partial^2\mu}{\partial\rho^2}\right]+
$$

$$
+(1-k^{-1})\,a_0^2\left(\Lambda_1-\frac{H_n^2}{4\pi\rho R}\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)^2\Lambda_2^{-1}, \qquad H_n^2 = H_y^2+H_z^2
$$

$$
N = \frac{a_0^2}{k}-\frac{H_n^2}{4\pi}\frac{\partial\mu}{\partial\rho}+\frac{\rho H^2}{8\pi}\left[\frac{2}{\mu}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2-\frac{\partial^2\mu}{\partial\rho^2}\right]+
$$

$$
+(1-k^{-1})\,a_0^2\left(\Lambda_1-\frac{H_n^2}{4\pi\rho R}\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)\Lambda_1\Lambda_2^{-1}
$$

$$
\Lambda_1 = 1+\frac{H^2}{8\pi R}\left(\frac{2}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\frac{\partial\mu}{\partial T}+\frac{\partial\mu}{\rho\partial T}-\frac{\partial^2\mu}{\partial\rho\partial T}\right),
$$

$$
\Lambda_2 = 1+\frac{TH^2}{8\pi\rho c_v}\left[\frac{\partial^2\mu}{\partial T^2}-\frac{2}{\mu}\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)^2\right]
$$

являющееся новой разновидностью закона обращения воздействий [5]. Здесь a, a_0 — скорости звука в газе соответственно при наличии и отсутствии магнитного поля, c_v — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, k — показатель адиабаты.

В пределе обычной магнитной газодинамики ($\mu = \mathrm{const}$) из (1.3) получается известное соотношение [6], описывающее движение в поперечном магнитном поле идеально проводящего газа в канале переменного сечения.

При $H_n = 0$ ($H_y = H_z = 0$, $H_x = H$) газ ведет себя как непроводящий электричество, и из (1.3) имеем более простое соотношение, объясняющее работу канала для непроводящего намагничивающегося газа.

2. Для выяснения особенностей течения намагничивающегося проводящего газа в трубке (канале) удобно рассмотреть частные случаи зависимости $\mu = \mu(\rho, T)$.

Так, в случае $\mu = \mu(\rho)$ имеем

$$
a^2 = a_0^2+\frac{\rho H^2}{8\pi}\left[\frac{2}{\mu}\left(\frac{d\mu}{d\rho}\right)^2-\frac{d^2\mu}{d\rho^2}\right]+\frac{H_n^2}{4\pi}\left(\frac{\mu}{\rho}-2\frac{d\mu}{d\rho}\right), \tag{2.1}
$$

$$
N = a^2+\frac{H_n^2}{4\pi}\left(\frac{d\mu}{d\rho}-\frac{\mu}{\rho}\right)
$$

Для эволюционности потока, очевидно, должно выполняться условие $a^2 > 0$, причем знак параметра N может быть любым.

При $N < 0$, т. е. когда

$$
\frac{\rho H^2}{8\pi}\left[\frac{d^2\mu}{d\rho^2}-\frac{2}{\mu}\left(\frac{d\mu}{d\rho}\right)^2\right]+\frac{H_n^2}{4\pi}\frac{d\mu}{d\rho} > a_0^2 \tag{2.2}
$$

из первого уравнения (1.3) следует, что изменение формы канала действует на поток противоположно обычному соплу. В этом случае для ускорения потока с непрерывным переходом через скорость звука a нужно канал вначале расширять, а после достижения a сужать, т. е. при $N < 0$ сверхзвуковое сопло должно иметь бочкообразную форму.

Видно, что при выполнении условия $a^2 > 0$ случай $N < 0$ возможен лишь при $(d\mu/d\rho) - \mu\rho^{-1} < 0$ или $\mu > \alpha\rho$, где α — произвольная постоянная.

В подтверждение этого вывода рассмотрим пример газов-магнетиков с уравнением состояния $\mu - 1 = \alpha\rho$ [7], для которых $\mu > \alpha\rho$. Примем для упрощения $H_x = 0$. Тогда неравенство (2.2) примет вид $\alpha H_n^2 (4\pi\mu)^{-1} > a_0^2$, так что для парамагнитного газа ($\mu > 1$, $\alpha > 0$) выбором величины магнитного поля $H_n^2 > 4\pi\mu\alpha^{-1}a_0^2$ достигаем $N < 0$, т. е. необычного свойства канала. Для диамагнитного же газа ($\mu < 1$, $\alpha < 0$) всегда $N > 0$. При этом условие эволюционности $a^2 > 0$ в обоих случаях выполняется.

Интересно, что при отсутствии проводимости (для чего, как указывалось, нужно положить $H_n = 0$) из первого соотношения (1.3) и (2.1) получаем

$$\left(\frac{v^2}{a^2} - 1\right)\frac{dv}{v\,dx} = \frac{dF}{F\,dx}, \quad a^2 = a_0^2 + \frac{\rho H_x}{8\pi}\left[\frac{2}{\mu}\left(\frac{d\mu}{d\rho}\right)^2 - \frac{d^2\mu}{d\rho^2}\right] \tag{2.3}$$

где выражение для a было найдено в [3] другим методом. Отсюда следует, что непроводящий намагничивающийся газ с $\mu = \mu(\rho)$ ускоряется в канале подобно обычному газу, но «кризис» течения возникает, когда скорость потока достигает скорости звука a (2.3). При этом величина a может быть как большей, так и меньшей a_0 в зависимости от вида функции $\mu = \mu(\rho)$.

Аналогично исследуется и другой частный случай $\mu = \mu(T)$ для проводящего намагничивающегося газа. Поэтому лучше рассмотрим пример общего случая $\mu = \mu(\rho, T)$ в виде закона Кюри [7] $\mu - 1 = \alpha\rho T^{-1}$. Положим также для простоты $H_x = 0$. Тогда опять выполняется первое соотношение (1.3), в котором

$$a^2 = \frac{H_n^2}{4\pi\rho\mu} + \frac{a_0^2}{k}\left[1 + (k-1)\Lambda_+^2\Lambda\right]$$

$$N = \frac{a_0^2}{k}\left[\Lambda_- + (k-1)\Lambda_+\Lambda^{-1}\left(1 - \frac{\rho\alpha^2 H_n^2}{4\pi\mu R T^3}\right)\right]$$

$$\Lambda_+ = 1 + \frac{\alpha H_n^2}{4\pi\mu R T^2}, \quad \Lambda_- = 1 - \frac{\alpha H_n^2}{4\pi\mu R T^2}, \quad \Lambda = 1 + \frac{\alpha H_n^2}{4\pi\mu c_v T^2}$$

Видно, что для парамагнитного газа ($\alpha > 0$) ограничение $a^2 > 0$ выполняется, причем если еще $H_n^2 > 4\pi\mu\rho^{-1}\alpha^{-2}RT^3$, то канал обладает указанным необычным свойством. Для диамагнитного же газа возможно появление неэволюционности $a^2 < 0$.

Автор благодарит С. В. Фальковича за обсуждение работы и выражает признательность В. В. Гогосову, заинтересовавшего автора данной тематикой.

Поступила 1 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тарапов И. Е.* Простые волны в непроводящей намагничивающейся среде. ПММ, 1973, т. 37, вып. 5.
2. *Тарапов И. Е.* Звуковые волны в намагничивающейся среде. ПМТФ, 1973, № 1.
3. *Седова Г. Л.* Простые волны и малые возмущения в намагничивающихся или поляризующихся средах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 6.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1959.
5. *Вулис Л. А.* Термодинамика газовых потоков. М.— Л., Госэнергоиздат, 1950.
6. *Бай Ши-и.* Магнитная газодинамика и динамика плазмы. М., «Мир», 1964.
7. *Вонсовский С. В.* Магнетизм. М., «Наука», 1971.