УДК 532.516 + 534.2 : 532

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ АКУСТИЧЕСКИХ И ВИХРЕВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ОГРАНИЧЕННОМ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОМ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОГО ГАЗА

К. И. Артамонов

(Москва)

При помощи линеаризованных уравнений Навье—Стокса рассматривается распространение акустических и вихревых возмущений при течении газа в ограниченном по длине плоском канале. В предположении об изэнтропийности колебаний получена система уравнений для возмущенных значений давления и завихренности.

Свойства газа во всем объеме примем постоянными, неравновесность течения связана только с градиентом скорости. Ограничимся рассмотрением изэнтропических колебаний. Колебания энтропии будут также генерироваться в градиентном потоке вязкого газа, однако учет энтропийных возмущений не является принципиальным, так как они в отличие от акустических могут только сноситься вниз по потоку. Изэнтропические малые колебания плотности газа ρ_1 и колебания давления p_1 связаны уравнением

$$\eta \equiv \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{p_1}{(\rho a^2)}$$

Линеаризованные уравнения для малых возмущений скорости $\mathbf{v}\,(v_x, v_y, v_z)$ и давления η имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + U\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{dU}{dy}\mathbf{e}_x = -a^2\nabla\eta + \nu\Delta\mathbf{v} + \frac{\nu}{3}\nabla\operatorname{div}\mathbf{v} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + U\frac{\partial \eta}{\partial x} + \operatorname{div}\mathbf{v} = 0$$

Здесь $U(y)$ — стационарная скорость невозмущенного потока вдоль оси x, ρ, ν, a — постоянные плотность, вязкость газа и скорость звука, $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ — координатные орты.

Взаимосвязь вихревых и акустических колебаний проще показать выводом из уравнений (1) уравнений для возмущения завихренности $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\mathbf{v}$ и давления η, применяя для этого к первому уравнению (1) последовательно операцию rot и div. Для $\boldsymbol{\omega}$ получим

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + U\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial x} - \nu\Delta\boldsymbol{\omega} = \left[v_y\frac{d^2U}{dy^2} + \frac{dU}{dy}\left(\operatorname{div}\mathbf{v} - \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\right]\mathbf{e}_z - \tag{2}$$

$$-\frac{dU}{dy}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial v_y}{\partial z}\mathbf{e}_y\right)$$

Для составляющих ω_x и ω_y источники завихренности, пропорциональные $\partial U / dy$ существуют только при трехмерных возмущениях.

Изменение ω_z описывается уравнением

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + U\frac{\partial \omega_z}{\partial x} - \nu\Delta\omega_z = v_y\frac{d^2U}{dy^2} + \frac{dU}{dy}\left(\operatorname{div}\mathbf{v} - \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \tag{3}$$

Зависимость завихренности от акустических колебаний выражает не только член, пропорциональный $\operatorname{div}\mathbf{v}$; скорость v_y определяется как величиной $\boldsymbol{\omega}$, так и $\operatorname{div}\mathbf{v}$.

Для безразмерного давления η имеем уравнение

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t} + 2U\frac{\partial^2\eta}{\partial t\partial x} + U^2\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - \left[a^2 + \frac{4}{3}\nu\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\Delta\eta = \tag{4}$$

$$= 2\frac{\partial v_y}{\partial x}\frac{dU}{dy} + \frac{4}{3}\nu\left(2\frac{dU}{dy}\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} + \frac{d^2U}{dy^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)$$

Источники акустических колебаний в градиентном течении вынесены в правую часть.

Для исключения скорости v_y, входящей в уравнения (3) и (4), необходимо использовать выражения для ω и $\operatorname{div} \mathbf{v}$ и второе уравнение (1).

При $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ скорость v_y выражается через ω, и уравнение (3) для плоских колебаний сводится к известному уравнению Орра—Зоммерфельда, содержащему первую производную по времени. В общем случае уравнения (3) и (4) содержат производные по времени до третьей включительно, решение содержит три взаимосвязанных волны: прямая и обратная акустические волны и волна Толлмина — Шлихтинга. Фазовые скорости первых двух волн близки к скорости звука (с поправкой на снос волны потоком), скорость третьей волны лежит в интервале изменения стационарной скорости потока. Эти волны, естественно, будут взаимосвязаны граничными условиями. Акустические волны, распространяющие в дозвуковом потоке вверх по течению, могут привести к абсолютной неустойчивости ограниченного потока.

Отметим одно точное соотношение между плоскими акустическими и вихревыми возмущениями, следующее из уравнения (3) для потока с линейным профилем скорости при пренебрежении вязким членом

$$\omega_z / \Omega_0 + \eta = \text{const}$$

Здесь $\Omega_0 = -dU / dy$ — постоянная завихренность стационарного потока. Этот инвариант получается при подстановке в уравнение (3) при $\nu = 0$ и $d^2U / dy^2 = 0$ выражения для $\operatorname{div} \mathbf{v}$ из второго уравнения (1).

УДК 533.6.011:538.4

ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ НАМАГНИЧИВАЮЩЕГОСЯ ПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА

В. Б. Горский

(Горький)

Рассматривается одномерное стационарное адиабатическое движение в трубке тока намагничивающегося идеально проводящего невязкого совершенного газа в магнитном поле. Получено дифференциальное соотношение, определяющее условия непрерывного ускорения газа с переходом через скорость звука. Показано существование необычного ускоряющего сопла с расширяющимися — сужающимися стенками.

Отметим, что изучение звуковых и простых волн в намагничивающейся сжимаемой среде недавно проводилось в работах [1-3].

1. Стационарное адиабатическое движение намагничивающегося идеально электропроводного невязкого и нетеплопроводного совершенного газа в приближении феррогидродинамики описывается следующей системой уравнений [3,4]:

$$\rho (\mathbf{v}\nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \rho \nabla \left(\frac{H^2}{8\pi} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right) - \frac{H^2}{8\pi} \frac{\partial \mu}{\partial T} \nabla T - \left[\frac{\mathbf{B}}{4\pi} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} \right]$$

$$\mathbf{v}\nabla \left(s + \frac{H^2}{8\pi\rho} \frac{\partial \mu}{\partial T} \right) = 0, \qquad \nabla (\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{1.1}$$

$$\operatorname{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = 0, \qquad \nabla \mathbf{B} = 0$$

где предполагается выполнение линейной связи $\mathbf{B} = \mu (\rho, T)\mathbf{H}$ между магнитной индукцией $\mathbf{B}$ и напряженностью магнитного поля $\mathbf{H}$ (обозначения обычные).

Вместо приведенного уравнения для энтропии s удобно иметь также уравнение энергии, которое можно получить из первых двух уравнений (1.1) (w — энтальпия