УДК 531.36

УСТОЙЧИВОСТЬ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

Г. Н. Мильштейн

(Свердловск)

Получен критерий орбитальной экспоненциальной устойчивости периодических движений автономных систем, опирающийся на метод функций Ляпунова. На основании этого критерия с использованием теории оптимального управления дается метод стабилизации орбит.

1. Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений (x и f — n-векторы)

$$dx / dt = f(x) \tag{1.1}$$

Пусть $x = \xi(t)$ — T-периодическое решение системы (1.1), отличное от точки покоя, и γ — траектория этого решения. Будем предполагать компоненты вектора f достаточно гладкими функциями в некоторой окрестности траектории γ.

Для любой точки x, находящейся в достаточно малой окрестности траектории γ, однозначно найдется величина $\theta(x)$, такая, что $0 \leqslant \theta(x) < T$, $\xi(\theta(x))$ — ближайшая к x точка траектории γ и вектор $x - \xi(\theta(x))$ ортогонален вектору $f(\xi(\theta(x)))$.

Определение. Периодическое решение $\xi(t)$ системы (1.1) называется экспоненциально орбитально устойчивым (ЭО-устойчивым), если существуют такие $\delta > 0$, $\alpha > 0$ и $K > 0$, что

$$| x(t) - \xi(\theta(x(t))) | \leqslant K e^{-\alpha(t-t_0)} | x_0 - \xi(\theta(x_0)) | \tag{1.2}$$

как только $| x_0 - \xi(\theta(x_0)) | < \delta$.

В (1.2) $x(t)$ — решение (1.1), выходящее в начальный момент времени t_0 из точки x_0.

Достаточные условия ЭО-устойчивости, связанные с теоремой Андронова — Витта [1, 2] и ее аналогами [3, 4], восходят к Ляпунову [5]. Они состоят в том, что уравнения в вариациях

$$\frac{dy}{dt} = F(t) y, \quad F(t) = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} (\xi(t)) \right\} \tag{1.3}$$

системы (1.1) для периодического решения $\xi(t)$ имеют один простой нулевой характеристический показатель, а все остальные — с отрицательными действительными частями.

Теорема, приведенная в [6], утверждает, что эти условия являются также и необходимыми для ЭО-устойчивости периодического решения $\xi(t)$ системы (1.1).

В этой работе дается признак ЭО-устойчивости, опирающийся на метод функций Ляпунова. Использование этого признака позволяет решить задачу о стабилизации периодического движения $\xi(t)$ системы (1.1).

2. *Лемма.* Если $v(x)$ — достаточно гладкая функция в окрестности траектории γ, $v \geqslant 0$ и $v(\xi(\tau)) = 0$, $0 \leqslant \tau < T$, то

$$v(x) = (x - \xi(\tau))^* V(\tau)(x - \xi(\tau)) + O(| x - \xi(\tau) |^3) \tag{2.1}$$

$$V(\tau) f(\xi(\tau)) = 0 \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(x) \equiv R(x) = (x - \xi(\tau))^* (F^*(\tau) V(\tau) + V(\tau) F(\tau) + V'(\tau))(x - \xi(\tau)) + O(| x - \xi(\tau) |^3) \tag{2.3}$$

$$\left(V(\tau) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} (\xi(\tau)) \right\} \right)$$

Здесь $V(\tau)$ — T-периодическая матрица, а отношения величин $O(| x - \xi(\tau) |^3)$ в (2.1) и (2.3) к $| x - \xi(\tau) |^3$ равномерно по τ ограничены при малых $| x - \xi(\tau) |$.

Доказательство. В точках кривой γ функция $v(x)$ достигает минимума, поэтому

(2.4) $\partial v / \partial x_i \, (\xi(\tau)) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad 0 \leqslant \tau < T$

Воспользовавшись (2.4) и формулой Тейлора для представления $v(x)$ в окрестности точки $\xi(\tau)$, получим (2.1).

Подсчитаем i-ю координату вектора $V(\tau) f(\xi,(\tau))$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_k} (\xi(\tau)) f_k(\xi(\tau)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v}{\partial v_i} \right) (\xi(\tau)) f_k(\xi(\tau)) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right) (\xi(\tau)) \tag{2.5}$$

где последнее выражение — полная производная от $\partial v / \partial x_i$ в силу систему (1.1).

Из (2.4) и (2.5) вытекает (2.2).

Докажем формулу (2.3).

Для этого воспользуемся разложением Тейлора в точке $\xi(\tau)$ для функции $R(x)$. Получим

$$R(x) = R(\xi(\tau)) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial R}{\partial x_i} (\xi(\tau)) (x_i - \xi_i(\tau)) + \tag{2.6}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_j} (\xi(\tau)) (x_i - \xi_i(\tau)) (x_j - \xi_j(\tau)) + O(|x - \xi(\tau)|^3)$$

Имеем (см. (2.4)) $R(\xi(\tau)) = 0$.

Далее

$$\frac{\partial R}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_i} f_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right) f_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_i} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} + \tag{2.8}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_j} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_k} \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}$$

Благодаря (2.4) и (2.2) $\partial R(\xi(\tau)) / \partial x_i = 0$.

Далее, первая сумма в правой части (2.8) при $x = \xi(\tau)$ равняется производной по τ в силу системы (1.1) вдоль периодического решения $x = \xi(\tau)$ от функции $\partial^2 v / \partial x_i \partial x_j$. Поэтому указанная сумма равна элементу i-й строки и j-го столбца матрицы $V'(\tau)$. Последняя сумма в (2.8) при $x = \xi(\tau)$ обращается благодаря (2.4) в нуль.

В итоге получаем

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_j} (\xi(\tau)) \right\} = V'(\tau) + F^*(\tau) V(\tau) + V(\tau) F(\tau)$$

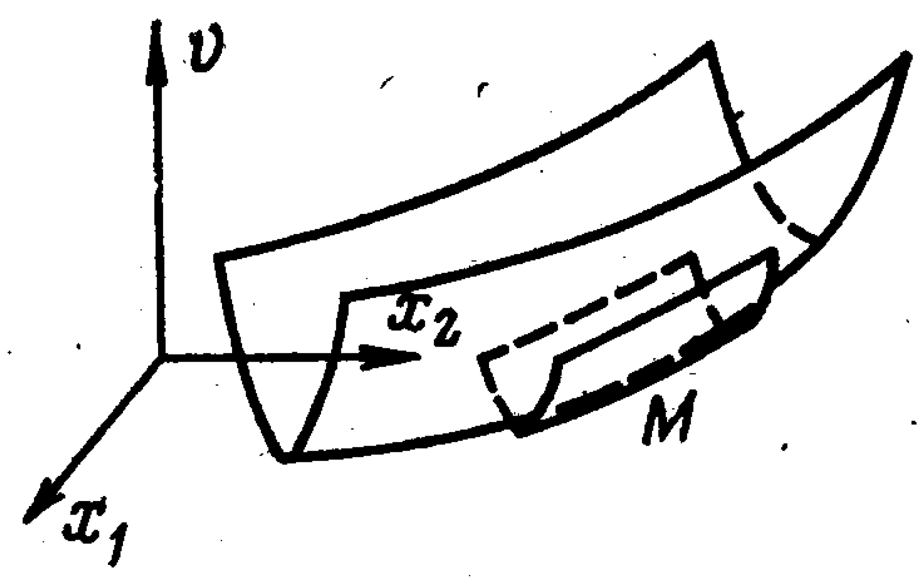
откуда вытекает (2.3).

Равномерная ограниченность упоминаемого в лемме отношения вытекает из предполагаемой гладкости. Лемма доказана.

Поясним смысл леммы графически. Если x — двумерный вектор, то график функции Ляпунова v, о которой идет речь в лемме, представляет собой кольцеобразный желоб, основание которого — орбита $x = \xi(t)$. На фигуре изображен кусок этого желоба. Через точку M, лежащую на орбите, проведен также график функции $(x - \xi(\tau))^* V(\tau)(x - \xi(\tau))$, которая дает соответствующее приближение для функции $v(x)$ в окрестности точки $M(\xi_1(\tau), \xi_2(\tau))$ и является параболическим цилиндром. Сказанное наглядно объясняет вырожденность матрицы $V(\tau)$ и соотношение (2.2).

Обозначим через P_f матрицу, соответствующую оператору проектирования на подпространство, ортогональное вектору $f \neq 0$; $P_f = E - |f|^{-2}ff^*$, E — единичная матрица.

Квадратичную форму x^*Ax, а также симметричную матрицу A будем называть P_f-положительно-определенной (P_f-неотрицательноопределенной), если для любого вектора $x \neq 0$, ортогонального вектору f, выполняется $x^*Ax > 0$ ($x^*Ax \geqslant 0$).



Теорема 1. Для ЭО-устойчивости T-периодического решения $\xi(t)$ системы (1.1) необходимо и достаточно, чтобы для любой T-периодической матрицы $C(\tau)$ и любой T-периодической неотрицательной функции $\alpha(\tau)$, таких, что

$$\int_0^T \alpha(\tau)\,d\tau > 0 \tag{2.9}$$

а матрица $C(\tau) - \alpha(\tau)E$ является $P_{f(\xi(\tau))}$-неотрицательно-определенной, существовала T-периодическая $P_{f(\xi(\tau))}$-положительно-определенная матрица $V(\tau)$, такая, что выполняется (2.2) и

$$V'(\tau) + F^*(\tau)V(\tau) + V(\tau)F(\tau) = -P_{f(\xi(\tau))}C(\tau)P_{f(\xi(\tau))} \tag{2.10}$$

Доказательство. Достаточность. Введем функцию $v(x) = (x - \xi(\theta))^*V(\theta)\cdot(x - \xi(\theta))$. Здесь и ниже $\theta = \theta(x)$. Можно доказать, что $^1/_2\,\{\partial^2 v(\xi(\tau)) / \partial x_i\partial x_j\} = V(\tau)$. Из леммы вытекает равенство

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(x) = (x - \xi(\theta))^* W(\theta)(x - \xi(\theta)) + O(|x - \xi(\theta)|^3) \tag{2.11}$$
$$(W(\tau) = V'(\tau) + F^*(\tau)V(\tau) + V(\tau)F(\tau))$$

Согласно (2.10), (2.11) и ортогональности векторов $f(\xi(\theta))$ и $(x - \xi(\theta))$

$$dv / dt = -(x - \xi(\theta))^*C(\theta)(x - \xi(\theta)) + O(|x - \xi(\theta)|^3) \tag{2.12}$$

Благодаря $P_{f(\xi(\theta))}$-положительной определенности матрицы $V(\theta)$ найдутся такие положительные числа m и M, что

$$m(x - \xi(\theta))^*(x - \xi(\theta)) \leqslant (x - \xi(\theta))^*V(\theta)(x - \xi(\theta)) \leqslant \tag{2.13}$$
$$\leqslant M(x - \xi(\theta))^*(x - \xi(\theta))$$

Из условий теоремы и (2.13) вытекает неравенство

$$-(x - \xi(\theta))^* C(\theta)(x - \xi(\theta)) \leqslant -\alpha(\theta)(x - \xi(\theta))^*(x - \xi(\theta)) \leqslant$$
$$\leqslant -\frac{\alpha(\theta)}{M}(x - \xi(\theta))^* V(\theta)(x - \xi(\theta))$$

Отсюда и из (2.12) при достаточно малых $|x - \xi(\theta)|$ вытекает неравенство

$$\frac{dv}{dt} \leqslant -\frac{\alpha(\theta)}{2M} v \tag{2.14}$$

которое благодаря (2.13) обеспечивает малость $|x - \xi(\theta)|$ для всех моментов времени, если мало $|x_0 - \xi(\theta(x_0))|$.

Используя свойство непрерывности решений по начальным данным, T-периодичность функции $\alpha(\tau)$ и условие (2.9), получим для малых $|x_0 - \xi(\theta(x_0))|$

$$\int_{rT}^{(r+1)T} \alpha(\theta(x(t)))\,dt \geqslant \alpha_0 > 0, \quad r = 0, 1, \ldots, (x(0) = x_0) \tag{2.15}$$

Разделив обе части неравенства (2.14) на v, интегрируя в пределах от 0 до t и учитывая (2.15), получим

(2.16) $$v(t) \leqslant Kv(0)e^{-\alpha t}$$

где $K > 0$ и $\alpha > 0$ — некоторые постоянные. Неравенство (2.16) благодаря (2.13) доказывает ЭО-устойчивость решения $x = \xi(t)$ системы (1.1).

Необходимость. Рассмотрим функцию

(2.17) $$v(x) = \int_0^\infty (x(t) - \xi(\theta))^* C(\theta)(x(t) - \xi(\theta))\,dt$$
$$(x(0) = x,\ \theta = \theta(x(t)))$$

где $x(t)$ — решение системы (1.1). Функция $v(x)$ удовлетворяет условиям леммы. Нетрудно видеть, что $V(\tau)$ для функции $v(x)$ из (2.17) $P_{f(\xi(\tau))}$-положительно-определенная матрица. Для функции $v(x)$ имеет место формула (2.11). С другой стороны, используя (2.17), найдем

(2.18) $$dv / dt = -(x - \xi(\theta))^* C(\theta)(x - \xi(\theta))$$

Сравнивая (2.11) и (2.18), получим

(2.19) $$P_{f(\xi(\tau))} W(\tau) P_{f(\xi(\tau))} = -P_{f(\xi(\tau))} C(\tau) P_{f(\xi(\tau))}$$

Но из (2.2) вытекает равенство

$$[V'(\tau) + V(\tau)F(\tau)]f(\xi(\tau)) = 0$$

которое с учетом (2.2) дает

(2.20) $$W(\tau)P_{f(\xi(\tau))} = W(\tau)$$

Применив операцию сопряжения к обеим частям (2.20), получим еще одно равенство, которое вместе с (2.19) и (2.20) приводит к (2.10). Теорема 1 доказана.

3. Задаче стабилизации точек покоя [7, 8] посвящено большое количество исследований.

Рассмотрим задачу стабилизации периодического движения системы (1.1). Введем систему с управлением

(3.1) $$dx / dt = f(x) + b(\theta(x))u$$

где $b(\tau)$ — T-периодический n-вектор, u — скалярное управление. Будем искать управление $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ из условия минимизации функционала

(3.2) $$J = \int_0^\infty [(x - \xi(\theta))^* C(\theta)(x - \xi(\theta)) + \beta(\theta)u^2]\,dt, \quad \theta = \theta(x)$$

В (3.2) $C(\tau)$ удовлетворяет требованиям теоремы 1, $\beta(\tau)$ — T-периодическая положительная функция.

Функция Беллмана $v^\circ(x_1, \ldots, x_n)$ задачи (3.1), (3.2) удовлетворяет уравнению

(3.3) $$\min_u \Big[\sum_{i=1}^n \frac{\partial v^\circ}{\partial x_i}(f_i(x) + b_i(\theta)u) + (x - \xi(\theta))^* C(\theta)(x - \xi(\theta)) + \beta(\theta)u^2\Big] = 0$$

Считая функцию v° достаточно гладкой, убеждаемся, что она удовлетворяет условиям леммы. Отсюда вытекают равенства (2.1) и (2.2), где $V(\tau) = {}^1/_2\{\partial^2 v^\circ(\xi(\tau)) / / \partial x_i \partial x_j\}$.

Используя (3.3), найдем

(3.4) $$u^\circ = -\frac{1}{\beta(\theta)} b^*(\theta)V(\theta)(x - \xi(\theta)) + O(|x - \xi(\theta)|^2)$$

(3.5) $$V'(\tau) + F^*(\tau)V(\tau) + V(\tau)F(\tau) - $$
$$-\frac{1}{\beta(\tau)}V(\tau)b(\tau)b^*(\tau)V(\tau) = -P_{f(\xi(\tau))}C(\tau)P_{f(\xi(\tau))}$$

Теорема 2. Пусть $P_{f(\xi(\tau))}$ — положительно-определенная T-периодическая матрица $V(\tau)$ удовлетворяет (2.2) и (3.5). Тогда T-периодическое движение $x = \xi(t)$ системы (3.1) с управлением

$$u(x) = -\frac{1}{\beta(\theta)} b^*(\theta) V(\theta)(x - \xi(\theta)) \tag{3.6}$$

ЭО-устойчиво. Значение функционала (3.2) при управлении (3.6) равно $v(x) + O(|x - \xi(\theta)|^3)$, где $v(x) = (x - \xi(\theta))^* V(\theta)(x - \xi(\theta))$, и отличается от оптимального значения на $O(|x - \xi(\theta)|^3)$.

Доказательство. Уравнения в вариациях системы (3.1) с управлением (3.6) для периодического решения $x = \xi(t)$ имеют вид

$$\frac{dy}{dt} = G(t)y = \left(F(t) - \frac{1}{\beta(t)} b(t) b^*(t) V(t)\right) y \tag{3.7}$$

Подставляя вместо F в (2.10) матрицу G и используя (3.5), найдем

$$V'(\tau) + G^*(\tau)V(\tau) + V(\tau)G(\tau) = \tag{3.8}$$
$$= -P_{f(\xi(\tau))} C(\tau) P_{f(\xi(\tau))} - \frac{1}{\beta(\tau)} V(\tau) b(\tau) b^*(\tau) V(\tau)$$

Равенство (3.8) благодаря теореме 1 доказывает ЭО-устойчивость решения $x = \xi(t)$ системы (3.1) с управлением (3.6). Для доказательства оставшейся части теоремы воспользуемся приемом, предложенным в [9]. Вместе с (3.2) рассмотрим функционал

$$K = J + \int_0^\infty \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} (f_i(x) + b_i(\theta) u)\, dt$$

Ясно, что если управление u оптимально в задаче минимизации функционала J, то оно оптимально в задаче минимизации K и наоборот. Это вытекает из равенства $K(x) = J(x) - v(x)$. Подынтегральное выражение $Q(x, u)$ функционала K может быть с использованием леммы представлено в виде

$$Q(x, u) = (x - \xi(\theta))^* [C(\theta) + V'(\theta) + F^*(\theta)V(\theta) +$$
$$+ V(\theta)F(\theta)](x - \xi(\theta)) + \beta(\theta)u^2 + 2b^*(\theta) V(\theta)(x - \xi(\theta))u +$$
$$+ O(|x - \xi(\theta)|^2)u + O(|x - \xi(\theta)|^3)$$

Из равенства (3.5) вытекает

$$\min_u Q(x, u) = O(|x - \xi(\theta)|^3)$$

Отсюда при любом управлении

$$J(x) = K(x) + v(x) \geqslant v(x) - |O(|x - \xi(\theta)|^3)|$$

Но при управлении (3.6) $J = v(x) + O(|x - \xi(\theta)|^3)$. Теорема 2 доказана.

4. *Пример.* Рассмотрим задачу стабилизации движения $\xi_1 = r\cos t$, $\xi_2 = -r\sin t$ в системе

$$x_1^\cdot = x_2, \quad x_2^\cdot = -x_1 + b(\theta)u \tag{4.1}$$

с минимизацией функционала

$$J = \int_0^\infty [c_1(\theta)(x_1 - \xi_1(\theta))^2 + c_2(\theta)(x_2 - \xi_2(\theta))^2 + \beta(\theta)u^2]\, dt \tag{4.2}$$

Соотношения (2.2) и (3.5) дают следующие выражения для элементов матрицы $V(\tau)$:

$$v_{11} = 2\lambda(\tau)\cos^2\tau, \quad v_{12} = v_{21} = -\lambda(\tau)\sin 2\tau, \quad v_{22} = 2\lambda(\tau)\sin^2\tau$$

где 2π-периодическая положительная функция $\lambda(\tau)$ удовлетворяет уравнению Риккати

$$\lambda' - \frac{2b^2(\tau)}{\beta(\tau)} \sin^2\tau\lambda^2 + \frac{1}{2} c_1(\tau)\cos^2\tau + \frac{1}{2} c_2(\tau)\sin^2\tau = 0 \tag{4.3}$$

Функция $v(x_1, x_2)$ и управление $u(x_1, x_2)$, близкие к оптимальным при малых $|\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - r|$, соответственно равны

(4.4) $$v(x_1, x_2) = 2\lambda(\theta)(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - r)^2$$

(4.5) $$u = -2\lambda(\theta)(x_2 - rx_2 / \sqrt{x_1^2 + x_2^2})$$

где функция $\theta(x_1, x_2)$ находится из соотношений

$$\cos\theta = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \sin\theta = -\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

Если, например, $b = \beta = 1$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, то из (4.3) находим $\lambda \equiv 1/2$. Система (4.1) с управлением (4.5) приобретает в этом случае вид

(4.6) $$x_1^{\boldsymbol{\cdot}} = x_2, \quad x_2^{\boldsymbol{\cdot}} = -x_1 - (x_2 - rx_2 / \sqrt{x_1^2 + x_2^2})$$

Решение $x_1 = r\cos t$, $x_2 = -r\sin t$ системы (4.6) автоколебательное.

Примечание. В работе [10] приведен неверный достаточный критерий стабилизируемости (теорема 3). Оказывается, что полной управляемости недостаточно для стабилизируемости в системах с произвольными шумами. На шумы следует наложить некоторые ограничения. Например, справедлив следующий результат: если система (2.2) вполне управляема и найдется такое число $\alpha > 0$, что для любого $D > 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{r=1}^{k} \sigma_r^* D \sigma_r < \alpha D$$

то система (1.1) при $\varphi_r = 0$ $(r = 1, 2, \ldots, m)$ стабилизируема в среднем квадратическом.

Отметим, что критерий, сформулированный в теореме 3, не связан с основным содержанием статьи [10] и изложение всего остального материала не опирается на эту теорему.

Поступила 1 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андронов А., Витт А.* Об устойчивости по Ляпунову. ЖЭТФ, 1933, т. 3, вып. 5
2. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Физматгиз 1961.
3. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
4. *Демидович Б. П.*, Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967.
5. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
6. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Мир», 1970.
7. *Летов А. М.* Аналитическое конструирование регуляторов. Автоматика и телемеханика, 1960, т. 21, № 4 — 6; 1961, т. 22, № 4; 1962, т. 23, № 11.
8. *Красовский Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений. Доп. к кн. Малкина И. Г. «Теория устойчивости движения». М., «Наука», 1966.
9. *Мильштейн Г. Н.* Применение последовательных приближений для решения одной оптимальной задачи. Автоматика и телемеханика, 1964, т. 25, № 3.
10. *Мильштейн Г. Н., Ряшко Л. Б.* Оптимальная стабилизация линейных стохастических систем. ПММ, 1976, т. 40, вып. 6.