Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 539.4

# О КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ НА ВКЛЮЧЕНИЯХ В КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛАХ

В. М. Левин

(Петрозаводск)

Рассматриваются упругие композитные среды, состоящие из однородной и изотропной матрицы, в которой другие компоненты распределены в виде включений эллипсоидальной формы. Положение и ориентация включений в матрице случайны, следовательно, при деформировании композита в нем возникает случайное поле напряжений (микронапряжений). Микронапряжения достигают максимума на поверхности включений (эффект концентрации напряжений). В данной работе устанавливается зависимость между этими максимальными напряжениями и средними при умеренной концентрации включений. В п. 1 излагаются известные результаты [1] исследования напряженного состояния в окрестности одного эллипсоидального включения в неограниченной упругой среде. Искомое поле напряжений удовлетворяет интегральному уравнению, решение которого может быть найдено точно [2]. Задача определения поля микронапряжений в композитном материале сводится к решению системы интегральных уравнений (п. 2). Большое число уравнений, а также случайность положений центров включений в матрице, исключая возможность точного решения этой системы, позволяют использовать статистический характер задачи и решить ее приближенно. В результате определяется эффективный тензорный коэффициент концентрации напряжений, связывающий конфигурационные средние по поверхности выделенного включения с макронапряжениями. Эта величина представляется в виде свертки двух тензоров, один из которых является коэффициентом концентрации напряжений на одном изолированном включении в матрице, а другой учитывает влияние остальных включений. В п. 3 поправочный тензор вычисляется для некоторых типов макроскопически изотропных композитных материалов и, в частности, для среды, ослабленной круговыми трещинами. В п. 4 рассмотрена круговая трещина в композите со сферическими включениями и найден эффективный коэффициент интенсивности напряжений в зависимости от жесткости и объемного содержания включений.

1. Рассмотрим эллипсоидальную неоднородность, занимающую область $v$ в неограниченной среде с тензором упругих модулей $L_0$. Пусть на больших расстояниях от включения заданы напряжения или смещения. Поле деформаций $\varepsilon$ (x) в такой среде удовлетворяет интегральному уравнению [1].

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon_0(\mathbf{x}) + \int\limits_v G(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,[L]\,\varepsilon(\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}' \tag{1.1}$$

$$G(\mathbf{x}) = (G_{ijkl}(\mathbf{x})) = [U_{ik,\,jl}(\mathbf{x})]_{(ij)(kl)}, \quad [L] = L_1 - L_0$$

Здесь $\varepsilon_0$ (x) — поле деформаций, которое существовало бы в среде без включения, $L_1$ — тензор упругих модулей включения, $U_{ik}$ (x) — тензор Грина уравнений Ляме для основной среды, круглые скобки означают симметризацию по соответствующим индексам, а под произведением двух тензоров понимается свертка по двум индексам: $Ab \equiv A_{ijkl}b_{kl}$, $AB \equiv \equiv A_{ijmn}B_{mnkl}$. Уравнение, аналогичное (1.1), можно записать и для напряжений

$$\sigma(\mathrm{x}) = \sigma_0(\mathrm{x}) + \int_v \Gamma(\mathrm{x} - \mathrm{x}')[M]\,\sigma(\mathrm{x}')\,d\mathrm{x}' \tag{1.2}$$

$$\sigma_0(\mathrm{x}) = L_0\varepsilon_0(\mathrm{x}),\quad \Gamma(\mathrm{x}) = -L_0(I\delta(\mathrm{x}) + G(\mathrm{x})L_0)$$

$$[M] = M_1 - M_0,\quad M_1 = L_1^{-1},\quad M_0 = L_0^{-1},\quad I = (I_{ijkl}) = \delta_{i(k}\delta_{l)}$$

где $I_{ijkl}$ — единичный четырехвалентный тензор, $\delta(\mathrm{x})$ — дельта-функция. Если $\mathrm{x} \in v$, то (1.2) превращается в интегральное уравнение относительно поля напряжений $\sigma^+(\mathrm{x})$ во включении. В частности, при однородном поле $\sigma_0$ поле $\sigma^+$ также однородно и определяется выражением

$$\sigma^+ = B\sigma_0,\quad B = (I + Q[M])^{-1} \tag{1.3}$$

$$Q = L_0(I - PL_0),\quad P = -\int_v G(\mathrm{x} - \mathrm{x}')\,d\mathrm{x}',\quad (\mathrm{x}, \mathrm{x}' \in v)$$

где $P$ — постоянный четырехвалентный тензор, зависящий от геометрических характеристик эллипсоида и упругих модулей основного материала.

Если матрица изотропна, то

$$P_{ijkl} = \frac{1}{\mu_0}\left(\delta_{ik}\varphi^+_{,jl} - \frac{3k_0 + \mu_0}{3k_0 + 4\mu_0}\psi^+_{,ijkl}\right)_{(ij)(kl)} \tag{1.4}$$

где $k_0$, $\mu_0$ — объёмный и сдвиговой упругие модули среды, $\varphi^+$, $\psi^+$ — гармонический и бигармонический потенциалы эллипсоида единичной плотности на внутреннюю точку. Отсюда следует, что тензор $P$ должен иметь симметрию эллипсоида и определяться девятью существенными компонентами. В системе координат, совпадающей с главными осями эллипсоида

$$P_{1111} = \gamma_0[3J_{11} + (1 - 4\nu_0)J_1],\quad P_{1122} = \gamma_0(J_{21} - J_1) \tag{1.5}$$

$$P_{1212} = \gamma_0[J_{21} + J_{12} + (1 - 2\nu_0)(J_1 + J_2)],\quad \gamma_0 = [16\pi\mu_0(1 - \nu_0)]^{-1}$$

($\nu_0$ — коэффициент Пуассона). Величины

$$J_p = \frac{3}{2}v\int_0^\infty \frac{du}{(a_p^2 + u)\Delta(u)},\quad J_{pq} = \frac{3}{2}va_p^2\int_0^\infty \frac{du}{(a_p^2 + u)(a_q^2 + u)\Delta(u)}$$

$$(\Delta = [(a_1^2 + u)(a_2^2 + u)(a_3^2 + u)]^{1/2},\quad v = {}^4/_3\,\pi a_1a_2a_3)$$

где $a_i$ ($i = 1, 2, 3$) — длины полуосей эллипсоида, выражаются через эллиптические интегралы. Остальные отличные от нуля шесть компонент тензора $P_{ijkl}$ получаются из (1.5) круговой перестановкой индексов.

Поле напряжений вне включения равно

$$\sigma^-(\mathrm{x}) = \sigma_0 - L_0G^-(\mathrm{x})L_0[M]\sigma^+ \tag{1.6}$$

$$G^-(\mathrm{x}) = \int_v G(\mathrm{x} - \mathrm{x}')\,d\mathrm{x}',\quad (x \overline{\in} v)$$

Подстановка формулы (1.3) в (1.6) дает

$$\sigma^-(\mathrm{x}) = F_0(\mathrm{x})\sigma_0,\quad F_0(\mathrm{x}) = B\{I + (Q - L_0G(\mathrm{x})L_0)[M]\} \tag{1.7}$$

Это выражение позволяет определить предельное извне значение тензора напряжений $\sigma^-(\mathbf{n})$ на границе включения. При этом нет необходимости в вычислении внешних потенциалов эллипсоида. Действительно, воспользовавшись соотношением для скачков производных от потенциалов при переходе через границу

$$[\varphi_{,jl}] = -4\pi n_j n_l, \quad [\psi_{,ijkl}] = -8\pi n_i n_j n_k n_l$$

где $n_i$ — компоненты единичной нормали к поверхности включения, получим

$$\sigma^-(\mathbf{n}) = BL_0M_1\{I + K(\mathbf{n})[L]\}\sigma_0 \tag{1.8}$$

$$K(\mathbf{n}) = (K_{ijkl}(\mathbf{n})) = \frac{1}{\mu_0}\left[\delta_{ik}n_jn_l - \frac{3k_0+\mu_0}{3k_0+4\mu_0}n_in_jn_kn_l\right]_{(ij)(kl)}$$

Учитывая, наконец, что $B$ можно преобразовать следующим образом:

$$B = M_0L_1A, \quad A = (I + P[L])^{-1}$$

приходим к выражению для тензорного коэффициента концентрации напряжений $F_0(\mathbf{n})$

$$\sigma^-(\mathbf{n}) = F_0(\mathbf{n})\sigma_0, \quad F_0(\mathbf{n}) = A\{I + K(\mathbf{n})[L]\} \tag{1.9}$$

совпадающему с найденным в работе [1] для более общего случая с помощью задачи о сопряжении двух сред.

2. Рассмотрим теперь многокомпонентный композитный материал, состоящий из однородной матрицы и частиц наполнителя эллипсоидальной формы. Включения одного компонента для простоты будем считать одинаковыми по величине, но различно ориентированными в пространстве.

Выделим характерный объем $V$ композита, т. е. объем с размерами, существенно превышающими расстояния между включениями, но в пределах которого изменением макроскопических полей напряжений и деформаций можно пренебречь. Такой объем должен содержать достаточное для осреднения число включений, причем материал в его пределах можно считать макроскопически однородным.

Представим тензор упругих податливостей $M(\mathbf{x})$ в виде

$$M(\mathbf{x}) = M_0 + \delta M(\mathbf{x}), \quad \delta M(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{n}[M_\alpha]\sum_{m=1}^{N_\alpha}v_{\alpha m}(\mathbf{x}) \tag{2.1}$$

$$[M_\alpha] = M_\alpha - M_0$$

где $n$ — число компонентов, распределенных в материале в виде включений, $N_\alpha$ — число включений $\alpha$-го компонента в характерном объеме, $v_{\alpha m}(\mathbf{x})$ — функция, равная единице внутри $m$-го включения $\alpha$-го компонента и нулю вне включения. Поле напряжений $\sigma(\mathbf{x})$ в $V$ удовлетворяет уравнению, аналогичному (1.2)

$$\sigma(\mathbf{x}) = \sigma_0 + \int_V \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\,\delta M(\mathbf{x}')\,\sigma(\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}' \tag{2.2}$$

$$\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -L_0[I\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')L_0]$$

Здесь $G$ определяется так же, как и в п. 1, причем $U(x, x')$ — исчезающий на поверхности $S$ объема $V$ тензор Грина уравнений Ляме для среды с модулями упругости $L_0$, $\sigma_0$ — внешнее поле, которое существовало бы в матрице при заданных граничных условиях на $S$. Последние выбираются такими, чтобы поле $\sigma_0$ было однородным. В дальнейшем объем $V$ будем считать настолько большим, чтобы тензор Грина $U$ (x, x'), фигурирующий в выражении для ядра уравнения (2.2), можно было заменить тензором Грина $U$ (x — x') для неограниченной области.

Согласно (2.1) поле тензора $\delta M$ (x), а потому и форма под знаком интеграла в (2.2) отличны от нуля только в подобластях, занятых включениями. Следовательно, этот интеграл сводится к сумме интегралов по таким подобластям, и уравнение (2.2) принимает вид

$$\sigma(\mathbf{x}) = \sigma_0 + \sum_\alpha \sum_m \int_{v_{\alpha m}} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}')[M_\alpha]\,\sigma(x')\,d\mathbf{x}' \tag{2.3}$$

где $v_{\alpha m}$ — объем $m$-го включения $\alpha$-го компонента. Если характерный объем содержит

$$N = \sum_\alpha N_\alpha$$

включений, то, принимая за точку x произвольную точку $\mathbf{x} \in v_{\alpha m}$ при $m = 1, 2, \ldots$ , получим систему линейных сингулярных интегральных уравнений относительно $N$ тензорных функций $\sigma$ (x) ($\mathbf{x} \in v_{\alpha m}$), описывающих поля напряжений во включениях. Точное решение этой системы представляет собой весьма сложную задачу даже при относительно небольших $N$. С другой стороны, именно большое число и случайное положение центров включений в характерном объеме позволяют использовать статистический характер задачи и найти математические ожидания искомых величин. В частности, можно определить поле напряжений в произвольном включении в $V$, осредненное по такому множеству конфигураций включений в матрице, у которых положение и ориентация этого включения фиксированы. Определенный на основании этого решения тензорный коэффициент концентрации напряжений на включении следует понимать как средний именно в таком смысле.

Фиксируем точку x в произвольном $k$-м включении $s$-го компонента и перепишем уравнение (2.3) следующим образом:

$$\sigma(\mathbf{x}) = \tau(\mathbf{x}) + \int_{v_{sk}} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}')[M_s]\,\sigma(\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}', \quad \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in v_{sk} \tag{2.4}$$

Здесь выделено интегрирование по области $v_{sk}$ и введено обозначение

$$\tau(\mathbf{x}) = \sigma_0 + \sum_{\alpha, m}{}' \int_{v_{\alpha m}} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha m} - \xi)[M_\alpha]\,\sigma(\mathbf{x}_{\alpha m} + \xi)\,d\xi \tag{2.5}$$

В этом выражении $\mathbf{x}_{\alpha m}$ — радиус-вектор центра включения $v_{\alpha m}$, $\xi$ — вектор, соединяющий центр включения с произвольной его внутренней точкой, а штрих у знака суммы указывает на отсутствие слагаемого с индексом $m = k$ при $\alpha = s$.

Рассмотрим теперь ансамбль включений в объеме $V$. Для каждой реализации ансамбля $\sigma = \sigma$ (x; $\mathbf{F}_N$), где $F_N$ — набор радиус-векторов центров включений и их ориентаций, определяющих конкретную конфигурацию.

Введем условную функцию распределения $\varphi(\mathbf{x}_{sk}, \omega_{sk} \mid \mathbf{F}_{N-1})$, где $\omega_{sk}$ — совокупность углов Эйлера, задающих ориентацию эллипсоида с центром в $\mathbf{x}_{sk}$. Применив операцию осреднения по этой функции распределения к уравнению (2.4), получим

$$\langle\sigma(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_{sk})\rangle = \langle\tau(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_{sk})\rangle + \int_{v_{sk}} \Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{x}')[M_s]\langle\sigma(\mathbf{x}' \mid \mathbf{x}_{sk})\rangle d\mathbf{x}' \tag{2.6}$$

При вычислении величины $\langle\tau(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_{sk})\rangle$ воспользуемся уравнением (2.5) и тождеством

$$\varphi(\mathbf{x}, \omega \mid \mathbf{F}_{N-1}) = \varphi(\mathbf{x}, \omega \mid \mathbf{x}', \omega')\, \varphi(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', \omega' \mid \mathbf{F}_{N-2}) \tag{2.7}$$

где $\varphi(\mathbf{x}, \omega \mid \mathbf{x}', \omega')$ — условная унарная функция распределения, нормированная на единицу. Для статистически однородного распределения центров включений при умеренной их концентрации положим

$$\varphi(\mathbf{x}, \omega \mid \mathbf{x}', \omega') = H(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| - 2a)\,\varphi(\mathbf{x}, \omega), \quad \varphi(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{V}\varphi(\omega) \tag{2.8}$$

где $H(\mathbf{x})$ — функция Хевисайда, $a$ — максимальная полуось эллипсоида. Осредняя обе стороны уравнения (2.5) с учетом равенств (2.7) и (2.8), получим

$$\langle\tau(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_{sk})\rangle = \sigma_0 + \frac{1}{V}\sum_{\alpha, m}{}' \iiint \Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{\alpha m}-\xi)[M_\alpha] \times \\ \times H(|\mathbf{x}-\mathbf{x}_{\alpha m}| - 2a)\,\varphi(\omega_{\alpha m})\langle\sigma(\xi \mid \mathbf{x}_{\alpha m}; \mathbf{x}_{sk})\rangle d\xi\, d\omega_{\alpha m}\, d\mathbf{x}_{\alpha m} \tag{2.9}$$

Здесь $\langle\sigma(\xi \mid \mathbf{x}_{\alpha m}; \mathbf{x}_{sk})\rangle$ — поле $\sigma(\mathbf{x})$ $(\mathbf{x} \in v_{\alpha m})$, осредненное по множеству конфигураций, у которых положение и ориентация двух включений фиксированы. Будем считать, что $\langle\sigma(\xi \mid \mathbf{x}_{\alpha m}; \mathbf{x}_{sk})\rangle = \langle\sigma(\xi \mid \mathbf{x}_{\alpha m})\rangle$, причем в силу однородности поля $\sigma_0$ эта величина не зависит от положения включения в объеме $V$, а зависит только от ориентации $\omega_{\alpha m}$. Воспользовавшись затем регуляризацией расходящихся на бесконечности интегралов, в силу которой [3]

$$\int G(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}' = M_0$$

приведем выражение (2.9) к виду

$$\langle\tau(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_{sk})\rangle = \sigma_0 - Q_0 \sum_\alpha [M_\alpha]\, c_\alpha \langle\bar\sigma_\alpha\rangle_\omega \tag{2.10}$$

$$Q_0 = -L_0(I - P_0 L_0), \quad \langle f\rangle_\omega \equiv \int f(\omega)\,\varphi(\omega)\,d\omega,$$

$$c_\alpha = \frac{N_\alpha}{V}\sum_{m=1}^{N_\alpha} v_{\alpha m}$$

Здесь $\bar\sigma_\alpha(\omega)$ — поле напряжений в произвольном включении $\alpha$-го компонента, осредненное по объему включения, а компоненты изотропного тензора $P_0$ определяются формулами (1.5), в которых следует положить $J_p = {}^4/_3\,\pi$, $J_{pp} = 3\,J_{pq} = {}^4/_5\,\pi a^{-2}$ $(a_i = a)$. Таким образом, при сделанных предположениях поле $\langle\tau(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_{sk})\rangle$ оказывается однородным. Тогда, как это следует из уравнения (2.6), поле $\langle\sigma(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_{sk})\rangle$ также однородно и его можно отождествить со средним по включению. Обозначив $\langle\sigma(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_{sk})\rangle =$

$= \sigma_s(\omega_k)$, имеем в соответствии с формулами (1.3)

$$\sigma_s(\omega_k) = B_s(\omega_k)\left[\sigma_0 - Q_0 \sum_\alpha [M_\alpha] c_\alpha \langle\bar{\sigma}_\alpha\rangle_\omega\right] \tag{2.11}$$

$$B_s(\omega_k) = (I + Q(\omega_k)[M_s])^{-1}, \quad Q(\omega_k) = L_0(I - P(\omega_k) L_0)$$

Умножив обе стороны уравнения (2.11) на $c_s[M_s]$, производя осреднение по ориентациям и суммируя по всем компонентам, найдем

$$\sum_\alpha [M_\alpha] c_\alpha \langle\sigma_\alpha\rangle_\omega = D \sum_\alpha [M_\alpha] c_\alpha \langle B_\alpha\rangle_\omega \sigma_0 \tag{2.12}$$

$$D = \left(I - Q_0 \sum_\alpha [M_\alpha] c_\alpha \langle B_\alpha\rangle_\omega\right)^{-1} \tag{2.13}$$

Подстановка выражения (2.12) в правую часть (2.11) приводит к следующему окончательному выражению для тензора напряжений $\sigma_s^+(\omega)$ внутри эллипсоида $s$-й фазы с ориентацией $\omega$:

$$\sigma_s^+(\omega) = B_s(\omega) D \langle\sigma\rangle \tag{2.14}$$

При этом учтено, что в соответствии с определением характерного объема композита $\sigma_0$ совпадает с макронапряжениями $\langle\sigma\rangle$.

Если фиксировать точку наблюдения $\mathbf{x}$ в матрице вблизи от границы выделенного включения, то с помощью рассуждений, аналогичных приведенным выше, для поля напряжений $\sigma_s^-(\mathbf{x})$ в окрестности этого включения получаем выражение

$$\sigma_s^-(\mathbf{x}) = DF_{0s}(\mathbf{x}) \langle\sigma\rangle \tag{2.15}$$

где $F_{0s}(\mathbf{x})$ по-прежнему определяется формулой (1.7). Отсюда следует, что тензорный коэффициент концентрации напряжений на включениях в композитных материалах

$$F_s(\mathbf{n}) = DF_{0s}(\mathbf{n}) \tag{2.16}$$

отличается от коэффициента концентрации $F_{0s}'(\mathbf{n})$ на одиночном включении в матрице тензорным множителем $D = (D_{ijkl})$, учитывающим влияние других включений.

3. Концентрация напряжений на эллипсоидальной неоднородности в упругой среде и, в частности, на эллипсоидальной трещине и игле подробно исследовалась в работах [1,4]. Поэтому, не останавливаясь на величине $F_{0s}^r(\mathbf{n})$, приведем значение поправочного тензора $D$ для некоторых видов композитных материалов.

Пусть включения в композитном материале изотропны с объемными и сдвиговыми упругими модулями $k_\alpha$ и $\mu_\alpha$, а их ориентации равновероятны. Обозначим объемные концентрации включений различных компонентов $c_\alpha$ ($\sum_\alpha c_\alpha + c_0 = 1$, где $c_0$ — относительный объем матрицы). В этом случае тензор $\langle B_\alpha\rangle_\omega$ изотропен, т. е.

$$\langle B_{ijkl}^\alpha\rangle = B_1^\alpha \delta_{ij}\delta_{kl} + 2 B_2^\alpha (I_{ijkl} - {}^1/_3\, \delta_{ij}\delta_{kl}) \tag{3.1}$$

$$B_1^\alpha = {}^1/_9 B_{iijj}^\alpha, \quad B_2^\alpha = {}^1/_{10}(B_{ijij}^\alpha - 3B_1^\alpha) \tag{3.2}$$

Тензор $D$ также изотропен с компонентами

$$D_{ijkl} = D_1\delta_{ij}\delta_{kl} + D_2\,(I_{ijkl} - {}^1/_3\,\delta_{ij}\delta_{kl}) \tag{3.3}$$

$$D_1 = \left[1 - 3q_1^\circ \sum_\alpha c_\alpha \left(\frac{1}{k_\alpha} - \frac{1}{k_0}\right) B_1^\alpha\right]^{-1}$$

$$D_2 = \left[1 - 2q_2^\circ \sum_\alpha c_\alpha \left(\frac{1}{\mu_\alpha} - \frac{1}{\mu_0}\right) B_2^\alpha\right]^{-1} \tag{3.4}$$

$$q_1^\circ = \frac{4\mu_0 k_0}{3k_0 + 4\mu_0}, \quad q_2^\circ = \frac{\mu_0\,(9k_0 + 8\mu_0)}{5\,(3k_0 + 4\mu_0)}$$

Допустим, что композит содержит сферические включения только одного компонента. В этом случае $P = P_0$ и выражения (3.4) упрощаются

$$D_1 = \frac{1}{3}\left[1 + q_1^\circ\left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_0}\right)\right]\left[1 + c_0 q_1^\circ\left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_0}\right)\right]^{-1} \tag{3.5}$$

$$D_2 = \left[1 + q_2^\circ\left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_0}\right)\right]\left[1 + c_0 q_2^\circ\left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_0}\right)\right]^{-1}$$

В частности, если жесткость включений существенно превышает жесткость матрицы, то

$$D_1 = \frac{k_0 - q_1^\circ}{3\,(k_0 - c_0 q_1^\circ)}, \quad D_2 = \frac{\mu_0 - q_2^\circ}{\mu_0 - c_0 q_2^\circ}$$

т. е. концентрация напряжений на поверхности включений уменьшается с ростом их объемного содержания. В другом предельном случае, когда матрица содержит сферические пустоты (поры), тензор $D$ принимает особенно простой вид

$$D_{ijkl} = c_0^{-1} I_{ijkl}$$

и, следовательно, с увеличением пористости напряжения на поверхности пор возрастают.

Рассмотрим пористый материал, поры которого имеют форму эллипсоидов вращения с полуосями $a_1 = a_2 = a > a_3$ и отношением полуосей $\eta = a_3/a$. В этом случае

$$D = (I - c_1 Q_0 \langle A \rangle_\omega)^{-1} \tag{3.6}$$

где тензор $A^{-1}$ в системе координат с осью $x_3$, совпадающей с осью вращения эллипсоида, имеет орторомбическую структуру с шестью отличными от нуля существенными компонентами

$$A_{1111}^{-1} = A_{2222}^{-1} = \varkappa_0\,[1 - {}^1/_8\,(3 - {}^3/_4 f_1 + f_2)]$$

$$A_{1122}^{-1} = \varkappa^0\,\{\nu_0 - {}^1/_{16}\,[2 - {}^1/_2 f_1 - 2\,(1 - 4\,\nu_0)\,f_2]\} \tag{3.7}$$

$$A_{1133}^{-1} = A_{2233}^{-1} = \varkappa_0\,\{\nu_0 - {}^1/_{16}\,[(1 + \eta^2)\,f_1 - (1 - 4\,\nu_0) \times (4 - f_2)]\}$$

$$A_{3333}^{-1} = {}^1/_4 \varkappa_0\,(\eta^2 f_1 + f_2)$$

$$A_{1212}^{-1} = \varkappa_0\left\{\frac{1-\nu_0}{2} - \frac{1}{16}\left[2 - \frac{1}{2} f_1 + 2\,(1 - 2\nu_0)\,f_2\right]\right\}$$

$$A_{1313}^{-1} = A_{2323}^{-1} = \varkappa_0\left\{\frac{1-\nu_0}{2} - \frac{1}{16}\,[(1 + \eta^2)\,f_1 + (1 - 2\nu_0)\,(4 - f_2)]\right\}$$

$$f_1 = \frac{4 - 3f_2}{1 - \eta^2}, \quad f_2 = \frac{2\eta}{(1 - \eta^2)^{3/2}}\,(\arccos\eta - \eta\sqrt{1 - \eta^2})$$

$$\varkappa_0 = \frac{2\mu_0}{1 - \nu_0}$$

Приведенные формулы позволяют исследовать концентрацию напряжений на поверхности круговых в плане трещин, распределенных в материале (под трещиной будем понимать эллипсоидальную полость со стремящимся к нулю отношением $\eta = a_3/a$). В этом случае при вычислении матрицы $A^{-1}(\eta)$ возникает затруднение, связанное с тем, что она становится особенной, т. е. $\det A^{-1}(\eta \to 0) \to 0$. Для осуществления предельного перехода при $\eta \to 0$, соответствующего трещине, запишем разложение тензора $A^{-1}(\eta)$ в ряд по $\eta$

$$A^{-1}(\eta) = A_0^{-1} + A_1^{-1}\eta + O(\eta^2)$$

где приведенные два первых члена разложения получаются из формул (3.7) при $f_1 = 4 - 3\eta$, $f_2 = \eta$. Затем обратим тензор $A_0^{-1} + A_1^{-1}\eta$, учитывая только члены, имеющие порядок $1/\eta$. В результате получим

$$A_{3333} = \frac{4(1-\nu_0^2)}{\pi(1-2\nu_0)\eta}, \quad A_{1313} = A_{2323} = \frac{2(1-\nu_0)}{\pi(2-\nu_0)\eta}$$

а остальные компоненты с точностью $O(1)$ равны нулю. Подставив эти выражения в формулу (3.6), найдем, что при равновероятной ориентации трещин тензор $D$ определяется формулой (3.3), в которой ($n = N/V$ — счетная концентрация трещин)

$$D_1 = (1 - 3cq_1^\circ A_1)^{-1}, \quad D_2 = (1 - 2cq_2^\circ A_2)^{-1}$$

$$A_1 = \frac{4}{9\pi}\frac{1-\nu_0^2}{1-2\nu_0}, \quad A_2 = \frac{4}{15\pi}\frac{(1-\nu_0)(5-\nu_0)}{2-\nu_0}, \quad c = \frac{4}{3}\pi n a^3$$

4. Допустим теперь, что в композитном материале со сферическими включениями возникла микротрещина радиуса $a$. Материал будем считать трехкомпонентным, причем роль одного из них играет полость в форме эллипсоида вращения, в пределе переходящая в трещину. Для исследования напряженного состояния в окрестности трещины можно воспользоваться формулой (2.15), в которой тензор $D$ определяется выражениями (3.3), (3.4), однако ввиду малости множителя $a^3/V$ величины $D_1$ и $D_2$ можно находить по формулам (3.5).

Пусть макроскопическое нагружение материала сводится к простому растяжению вдоль оси $x_1$, а плоскость трещины перпендикулярна к этой оси. В этом случае напряжение $\sigma_{11}^-$ на краю трещины имеет особенность, а эффективный коэффициент интенсивности напряжений $k^*$ равен

$$k^* = (D_1 + {}^2/_3 D_2)k$$

где $k$ — коэффициент интенсивности напряжений для трещины при ее растяжении в среде без включений. Если включения представляют собой пустоты, то

$$k^* = k/c_0$$

а для абсолютно жестких включений —

$$k^* = \frac{1}{3}\left[\frac{k_0 - q_1^\circ}{k_0 - c_0 q_1^\circ} + \frac{2(\mu_0 - q_2^\circ)}{\mu_0 - c_0 q_2^\circ}\right]k$$

Из приведенных формул видно, что с увеличением пористости коэффициент интенсивности напряжений в вершине трещины растет, в то время как наличие жестких включений уменьшает $k^*$ и, следовательно, увеличивает критическую нагрузку.

Поступила 15 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кунин И. А.*, *Соснина Э. Г.* Концентрация напряжений на эллипсоидальной неоднородности в анизотропной упругой среде. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
2. *Кунин И. А.* *Соснина Э. Г.* Эллипсоидальная неоднородность в упругой среде. Докл. АН СССР, 1971, т. 199, № 3.
3. *Канаун С. К.* Метод самосогласованного поля в задаче об эффективных свойствах упругого композита. ПМТФ, 1975, № 4.
4. *Кунин И. А.*, *Миренкова Г. Н.*, *Соснина Э. Г.* Эллипсоидальная трещина и игла в анизотропной среде. ПММ, 1973, т. 37, вып. 3.