

## КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА СО СЦЕПЛЕНИЕМ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО СЛОЯ

А. О. Ватульян

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается смешанная динамическая задача о действии двух полосовых штампов на ортотропный слой в условиях плоской деформации. В области контакта штампы предполагаются сцепленными со слоем. Краевая задача сведена к системе интегральных уравнений первого рода, которая регуляризуется методом факторизации со стороны широких штампов. Для решения задачи со стороны узких штампов применены методы сингулярных интегральных уравнений типа «метода больших  $\lambda$ » [1, 2], но в отличие от этого метода предложено приближенное представление ядер, сходящееся во всей плоскости, что позволяет произвести сопряжение полученных решений. Получены формулы, описывающие контактные напряжения под штампами, и выявлен характер особенности напряжений у края штампов. Дан численный анализ некоторых характеристик, необходимых для построения решения.

1. Введем естественную систему координат  $Oxyz$ , порожденную ортотропией слоя, считая, что ось  $z$  перпендикулярна его срединной плоскости, а ось штампов образует с осью  $y$  угол  $\varphi$ , и новую систему координат  $Ox'y'z'$  соотношениями

$$x' + iy' = (x + iy) e^{i\varphi}, \quad z' = z$$

В системе  $Ox'y'z'$  поставленная задача описывается уравнениями движения Коши и определяющими уравнениями вида [3]

$$\begin{aligned} \sigma_{11}' &= c_{11}' \varepsilon_{11}' + c_{13}' \varepsilon_{33}', & \sigma_{33}' &= c_{13}' \varepsilon_{11}' + c_{33}' \varepsilon_{33}', & \sigma_{13}' &= \\ &= 2c_{55}' \varepsilon_{13}' \end{aligned}$$

где  $c_{ij}' = c_{ij}'(c_{ij}, \varphi)$ , а  $\varepsilon_{11}'$ ,  $\varepsilon_{33}'$ ,  $\varepsilon_{13}'$  и  $\sigma_{11}'$ ,  $\sigma_{33}'$ ,  $\sigma_{13}'$  — соответственно компоненты тензоров деформаций и напряжений в системе  $Ox'y'z'$ . Граничные условия задачи имеют вид

$$\begin{aligned} z' &= \pm h, & \sigma_{33}' &= \sigma_{13}' = 0, & |x'| &> a \\ u' &= f_1 \pm (x') e^{-i\omega t}, & w' &= f_2 \pm (x') e^{-i\omega t}, & |x'| &\leq a \end{aligned}$$

Здесь  $u'$ ,  $w'$  — компоненты вектора перемещений в новой системе координат,  $f_i \pm (x')$ ,  $i = 1, 2$  характеризует форму штампов,  $\omega$  и  $2a$  — частота колебаний и ширина штампов,  $2h$  — толщина слоя. Замыкает постановку задачи формулировка условий излучения, при выводе которых используется принцип предельного поглощения [4].

Будем изучать установившийся режим колебаний и представим компоненты вектора перемещений в виде

$$u'(x', z', t) = u_0(x', z') e^{-i\omega t}, \quad w'(x', z', t) = w_0(x', z') e^{-i\omega t}$$

Разделим поставленную задачу на симметричную  $A$  и антисимметричную  $B$  по координате  $z'$ . Опуская в дальнейшем штрихи над  $x'$ ,  $z'$ ,  $c_{ij}'$ ,  $\varepsilon_{ij}'$ ,  $\sigma_{ij}'$  и применяя преобразование Фурье по  $x$ , сведем каждую из задач  $A$ ,  $B$  к системе интегральных уравнений относительно контактных напряжений следующего вида:

$$(1.1) \quad \int_{-a}^a k(\xi - x) q(\xi) d\xi = 2\pi f_1(x), \quad |x| \leq a$$

$$k(x) = \int_0^\infty K(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha, \quad K(\alpha) = \begin{vmatrix} K_{11}(\alpha) & iK_{12}(\alpha) \\ -iK_{12}(\alpha) & K_{22}(\alpha) \end{vmatrix}$$

$$q(\xi) = \begin{vmatrix} q_1(\xi) \\ q_2(\xi) \end{vmatrix}, \quad f(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{vmatrix}$$

Элементы матрицы  $K(\alpha)$  в случае задачи  $B$  после введения безразмерных параметров

$$\kappa^2 = \rho\omega^2 h^2 c_{33}^{-1}, \quad \gamma_1 = c_{11} c_{33}^{-1}, \quad \gamma_2 = c_{55} c_{33}^{-1}, \quad \gamma_3 = c_{13} c_{33}^{-1}$$

$$\gamma_4 = \gamma_3^2 + \gamma_2 \gamma_3 - \gamma_1, \quad ah = u$$

имеют вид

$$(1.2) \quad K_{ij}(\alpha) = \delta A_{ij}(u), \quad i, j = 1, 2, \quad \delta = hc_{33}^{-1}(\gamma_3 + \gamma_2)$$

$$A_{11}(u) = -\mu_1 \mu_2 (\mu_1^2 - \mu_2^2) \operatorname{sh} \mu_1 \operatorname{sh} \mu_2 D^{-1}(u)$$

$$A_{22}(u) = (\kappa^2 - \gamma_1 u^2) (\mu_1^2 - \mu_2^2) \operatorname{ch} \mu_1 \operatorname{ch} \mu_2 D^{-1}(u)$$

$$A_{12}(u) = u [F(\mu_1, \mu_2) - F(\mu_2, \mu_1)] D^{-1}(u)$$

$$F(\mu_1, \mu_2) = \mu_1 (\kappa^2 - \gamma_1 u^2 - \gamma_3 \mu_2^2) \operatorname{sh} \mu_1 \operatorname{ch} \mu_2$$

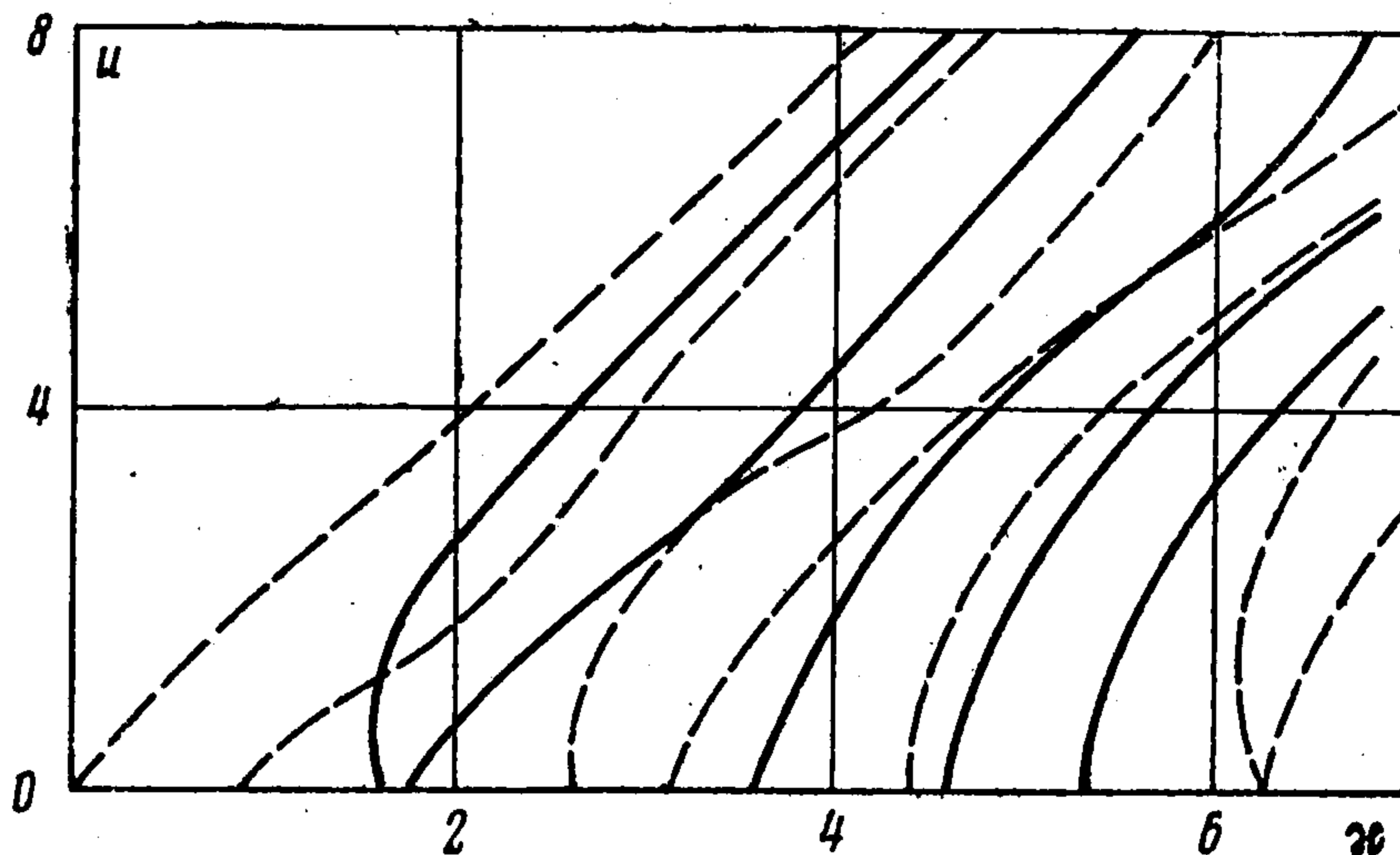
$$D(u) = H(\mu_1, \mu_2) - H(\mu_2, \mu_1), \quad H(\mu_1, \mu_2) = F(\mu_1, \mu_2) \cdot$$

$$\cdot (\kappa^2 + \gamma_4 u^2 + \gamma_2 \mu_1^2)$$

$$\{\gamma_2 \mu^4 + [(1 + \gamma_2) \kappa^2 + (\gamma_4 + \gamma_2 \gamma_3) u^2] \mu^2 + (\kappa^2 - \gamma_1 u^2)(\kappa^2 - \gamma_2 u^2) = 0\}$$

$$\operatorname{Re} \mu_i \geq 0, \quad \operatorname{Im} \mu_i \geq 0, \quad i = 1, 2$$

где  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — корни уравнения, приведенного в фигурных скобках, удовлетворяющие указанным условиям.



Фиг. 1

Элементы  $A_{ij}(u)$  для задачи А получаются из приведенных формул заменой  $\text{sh } \mu_k$  на  $\text{ch } \mu_k$  и наоборот.

Расположение контура  $\sigma$  в (1.1) определяет характер излучения на бесконечности, и для его нахождения требуется привлечение ЭВМ.

На фиг. 1 представлены кривые нулей  $\det A(u)$  задачи В, причем штриховой линией отмечены кривые полюсов  $A_{ij}(u)$  для следующих значений параметров [3]:  $c_{11} = 11.66$ ,  $c_{13} = 3.28$ ,  $c_{33} = 11.04$ ,  $c_{55} = 3.606$  ( $10^{11} \text{ дн} \cdot \text{см}^{-2}$ ),  $\varphi = 0$ .

Учитывая вид этих кривых, можно распорядиться выбором контура  $\sigma$ , который, как правило, обходит положительные полюсы снизу, а отрицательные — сверху. Элементы  $A_{ij}(u)$  удовлетворяют всем условиям [5], кроме асимптотического представления, которое в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} A_{ii}(u) &= C_i |u|^{-1} (1 + O(|u|^{-1})) \quad (i=1, 2) \\ A_{12}(u) &= Bu^{-1} (1 + O(|u|^{-1})), \quad |u| \rightarrow \infty \\ C_1 &= dD^{-1}, \quad C_2 = \sqrt{\gamma_1} C_1, \quad B = (\sqrt{\gamma_1} - \gamma_3) D^{-1} \\ d &= [(\gamma_1 - \gamma_3^2) \gamma_2^{-1} + 2(\sqrt{\gamma_1} - \gamma_3)]^{1/2} \\ D &= (\gamma_2 + \gamma_3) (\gamma_1 - \gamma_3^2) \end{aligned}$$

Для решения системы (1.1) со стороны широких штампов применим метод регуляризации, основанный на факторизации матриц-функций [5] и приводящий к решению конечной алгебраической системы, порядок которой определяется задаваемой точностью аппроксимации интегрального оператора

$$\begin{aligned} (1.3) \quad X(z_j) &= \sum_{m=1}^N B_{mj}^{(1)} [N_+^{-1}(-z_m) Y(z_m) e^{-iaz_m} + F(-z_m)] \\ Y(z_j) &= \sum_{m=1}^N B_{mj}^{(2)} [M_-^{-1}(z_m) X(z_m) e^{-iaz_m} + F(z_m)], \quad j=1, 2, \dots, N \\ A(u) &= N_+^{-1}(u) N_-(u) = M_-^{-1}(u) M_+(u) \\ \Delta(u) &= \det A(u) = \Delta_+(u) \Delta_-(u) \\ d_m^{(1)} &= \frac{\Delta_-(-z_m)}{\Delta_-'(-z_m)} e^{-iaz_m}, \quad B_{mj}^{(1)} = M_-(-z_m) \frac{d_m^{(1)}}{|z_m + z_j|} \\ d_m^{(2)} &= \frac{\Delta_+(z_m)}{\Delta_+'(z_m)} e^{-iaz_m}, \quad B_{mj}^{(2)} = N_+(z_m) \frac{d_m^{(2)}}{z_m + z_j} \end{aligned}$$

Здесь  $F(u)$  — преобразование Фурье правой части (1.1),  $z_m$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ ) — нули  $\Delta(u)$ , лежащие ниже контура  $\sigma$ , а факторизация функции  $\Delta(u)$  и матрицы-функции  $A(u)$  производится относительно контура  $\sigma$ .

Используя решение (1.3), можно получить с погрешностью  $O(\exp(-2ba))$ ,  $b > 0$  приближенные формулы для контактных напряжений под штампами

$$(1.4) \quad \delta q(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} A^{-1}(u) F(u) e^{-iux} du +$$

$$+ i \sum_{m=1}^N [N_{-}^{-1}(-z_m) Y(z_m) d_m^{(1)} e^{iz_m x} - M_{+}^{-1}(z_m) X(z_m) d_m^{(2)} e^{-iz_m x}],$$

$$|x| \leq a$$

причем интеграл в правой части характеризует вырожденную составляющую, а сумма — влияние краев штампов.}

Таким образом, для построения (1.4) необходимо осуществить факторизацию матрицы  $A(u)$ , которая в данном случае не вырождается в функционально-коммутирующую. Ниже предлагается прием для осуществления приближенной факторизации матриц такого типа.

Аппроксимируем функции (1.2) для фиксированного  $\kappa$  следующим образом:

$$(1.5) \quad A_{jj}^{*}(u) = C_j R_j(u) (u^2 + b^2)^{-1/2} \quad (j = 1, 2), \quad A_{12}^{*}(u) = Bu^{-1} R_0(u)$$

$$R_j(u) = \prod_{l=1}^{n_j} (u^2 - z_{jl}^2) \prod_{k=1}^p (u^2 - \alpha_{jk}^2) \prod_{i=1}^m (u^2 - \zeta_i^2)^{-1} (u^2 + A^2)^{-p} S_j(u)$$

$$S_j(u) = \begin{cases} 1, & n_j = m \\ \prod_{l=1}^{m-n_j} (u^2 + d_{jl}^2), & m > n_j \end{cases}, \quad j = 0, 1, 2$$

Здесь  $z_{jl}$  и  $\zeta_i$  ( $j = 0, 1, 2$ ) — положительные нули и полюсы  $A_{12}$ ,  $A_{11}$ ,  $A_{22}$  соответственно;  $\alpha_{ij}$ ,  $A$ ,  $d_{jl}$ ,  $b$  — параметры аппроксимации, причем первые два связаны с применением полиномов Бернштейна,  $p$  — степень полиномов.

Далее, вводя матрицу

$$A_1(u) = \Lambda_- A(u) \Lambda_+, \quad \Lambda_- = \begin{vmatrix} C_2^{1/2} & 0 \\ 0 & C_1^{1/2} \end{vmatrix}, \quad \Lambda_+ = \begin{vmatrix} C_1^{-1/2} & 0 \\ 0 & C_2^{-1/2} \end{vmatrix}$$

применим для нее описанный в [5] процесс приближенной факторизации матрицы специального вида, полагая  $C = \sqrt{C_1 C_2}$ . Приведем численные результаты построения правосторонней факторизации матрицы  $A(u)$  для задачи  $B$  относительно контура  $\sigma$  для  $\kappa = 1.0$ ,  $b = 10$  с погрешностью, не превышающей 12%

$$A(u) = M^{-1}(u) M_+(u)$$

$$M^{-1}(u) = \Lambda_-^{-1} R_-(u) G_-(u) P_-(u) Q_-(u), \quad M_+(u) =$$

$$= P_+(u) G_+(u) R_+(u) \Lambda_+^{-1} Q_+(u)$$

$$R_{\pm}(u) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} R_{11}^{\pm}(u) & iR_{12}^{\pm}(u) \\ -iR_{12}^{\pm}(u) & R_{11}^{\pm}(u) \end{vmatrix}, \quad R_{11}^{\pm}(u) = T_{\pm}(u) + T_{\mp}(-u)$$

$$R_{12}^{\pm}(u) = T_{\pm}(u) - T_{\mp}(-u)$$

$$T_{\pm}(u) = 1.892 \frac{(u \pm 2.3i)(u \pm z^{\pm}) A^4}{(u \pm 0.416)(u \pm 2.102)(u \pm iA)^4 (b \mp iu)^{0 \pm}} \prod_{k=1}^4 (u - \alpha_k^{\pm})$$

$$Q_{\pm}(u) = \frac{(u \pm 8.8i)(u \pm 9.8i)}{(u \pm z^+)(u \pm z^-)(u \pm 13.8i)^2}, \quad \Lambda_+ = \begin{vmatrix} 0.596 & 0 \\ 0 & 0.529 \end{vmatrix},$$

$$\Lambda_- = \begin{vmatrix} 1.892 & 0 \\ 0 & 1.866 \end{vmatrix}$$

$$A = 4.39, \quad z^+ = 1.283, \quad z^- = 2.295, \quad \theta_{\pm} = 0.5 \pm 0.115i$$

$$\alpha_s^+ = \overline{\alpha_{21}^-}, \quad \alpha = \alpha^+ \alpha^- = 0.016 + 0.138i$$

$$P_{\pm}(u) = \begin{vmatrix} \alpha^{\pm} & 0 \\ 0 & P_{22}^{\pm}(u) \end{vmatrix}, \quad G_+(u) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha^{-1} P_{12}(u) \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$G_-(u) = \begin{vmatrix} G_{11}(u) & G_{12}(u) \\ G_{21}(u) & G_{22}(u) \end{vmatrix}, \quad P_{22}^+(u) = d_{22}^+ \prod_{\text{Im } \beta_k < 0} (u - \beta_k)$$

$$P_{22}^-(u) = d_{22}^- \prod_{\text{Im } \beta_k > 0} (u - \beta_k), \quad P_{12}(u) = \sum_{s=1}^8 d_{12}^s u^{8-s}$$

$$G_{ij}(u) = \sum_{s=0}^4 b_{ij}^s u^{4-s}, \quad d_{22}^+ d_{22}^- = 0.817 - 7.159i$$

$$b_{11}^{\circ} = b_{12}^{\circ} = b_{21}^{\circ} = 0, \quad b_{22}^{\circ} = -b_{21}^1$$

Коэффициенты  $b_{ij}^s$ ,  $\beta_s$ ,  $d_{12}^s$ ,  $\alpha_s^+$  приведены в таблице

	s	$z = b_{11}^s$	$b_{12}^s$	$b_{21}^s$	$b_{22}^s$	$\alpha_s^+$		s	$z = \beta_s$	$d_{12}^s$	s	$z = \beta_s$	$d_{12}^s$
Re z	1	0	8.24	-0.82	2.44	-0.11	Re z	1	-0.04	8.24	5	0.04	73.78
	2	-8.24	23.00	-6.73	2.24	-0.05		2	-0.29	47.59	6	-3.20	19.15
	3	7.29	18.48	-3.98	0.53	0.44		3	-0.42	101.49	7	-1.02	1.82
	4	0.70	2.54	-0.40	0.00	-0.40		4	-0.34	133.25	8	-0.69	0.01
Im z	1	0	6.14	7.16	-21.34	-0.70	Im z	1	-0.03	6.14	5	0.04	36.11
	2	-6.14	16.12	-0.73	-19.60	-0.91		2	0.02	34.43	6	0.15	6.38
	3	-5.61	11.01	-0.38	-4.62	-1.09		3	0.15	69.83	7	-1.30	-0.33
	4	-3.82	-0.12	-0.02	0.00	-1.97		4	-0.26	75.22	8	1.23	-0.07

Качественные исследования позволяют установить, что существуют частоты колебаний, например, для фиг. 1  $\kappa = 2.70$ , такие, что при повороте штампов на некоторый малый угол  $\Delta\varphi$  меняются не только амплитуды и фазы каждой из волн, но может измениться и их количество (увеличиться или уменьшиться на единицу). Это связано с зависимостью кривых, изображенных на фиг. 1 от  $\varphi$ . Напряжения у края штампов имеют особенность вида

$$q_k(x) \sim A(a \mp x)^{-1/2 \mp iv}, \quad x \rightarrow \pm a, \quad k_1 = 1, 2$$

$$v = \pi^{-1} \text{arcth}(B / \sqrt{C_1 C_2})$$

Заметим, что изложенный метод решения системы (1.1) эффективен для достаточно широких штампов (практически для всех  $a$  за счет выбора параметра  $b$  большим).

2. Для узких штампов используем методы сингулярных интегральных уравнений. Прежде всего выясним структуру ядер

$$K_{ij}^*(t) = \int_{\sigma} A_{ij}^*(u) e^{iut} du$$

используя (1.5). Рассмотрим, например,  $k_{11}(t)$ . Замыкая контур  $\sigma$  при  $t > 0$  в верхнюю полуплоскость, как показано на фиг. 2, и выбирая ту ветвь функции  $(z^2 + b^2)^{1/2}$ , которая при  $z \rightarrow \infty$  принимает положительные значения, имеем

$$\int_{\sigma} \frac{R_1(u) e^{iut}}{\sqrt{u^2 + b^2}} du = 2\pi i \sum_{k=1}^{m+1} \text{res} (R_1(u)(u^2 + b^2)^{-1/2} e^{iut})|_{u=\zeta_k}, \quad \zeta_{m+1} = iA$$

Применяя лемму Жордана и разлагая функцию  $R_1(u)$  на простейшие дроби, рассмотрим один из возникающих интегралов

$$(2.1) \quad I(t) = \int_{i\infty}^{ib} \frac{e^{iut} du}{\sqrt{u^2 + b^2} (u^2 - \zeta^2)} = \int_0^{\infty} (b^2 \text{ch}^2 z + \zeta^2)^{-1} e^{-bt \text{ch} z} dz$$

$(u = ib \text{ch} z)$

Можно показать, что  $I(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению с начальными условиями

$$(2.2) \quad \begin{aligned} I''(t) + \zeta^2 I(t) &= K_0(bt) \\ I(0) &= \zeta^{-1} b^{-1} (1 + \lambda^2)^{-1/2} \ln(\lambda + \sqrt{1 + \lambda^2}), \quad \lambda = \zeta/b \\ I'(0) &= -\frac{\pi}{2} (b^2 + \zeta^2)^{-1/2} \end{aligned}$$

$K_0(x)$  — функция Макдональда. Возможность предельного перехода при  $t \rightarrow 0$  в  $I(t)$  и  $I'(t)$  и дифференцирования под знаком интеграла по параметру  $t \geq 0$  для  $I(t)$  и  $t \geq t_0 > 0$  для  $I'(t)$  показывается путем [проверки условий соответствующих теорем [6].

Зная представление в виде ряда для  $K_0(x)$  [7], естественно искать решение (2.2) в виде

$$I(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \ln t + \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k$$

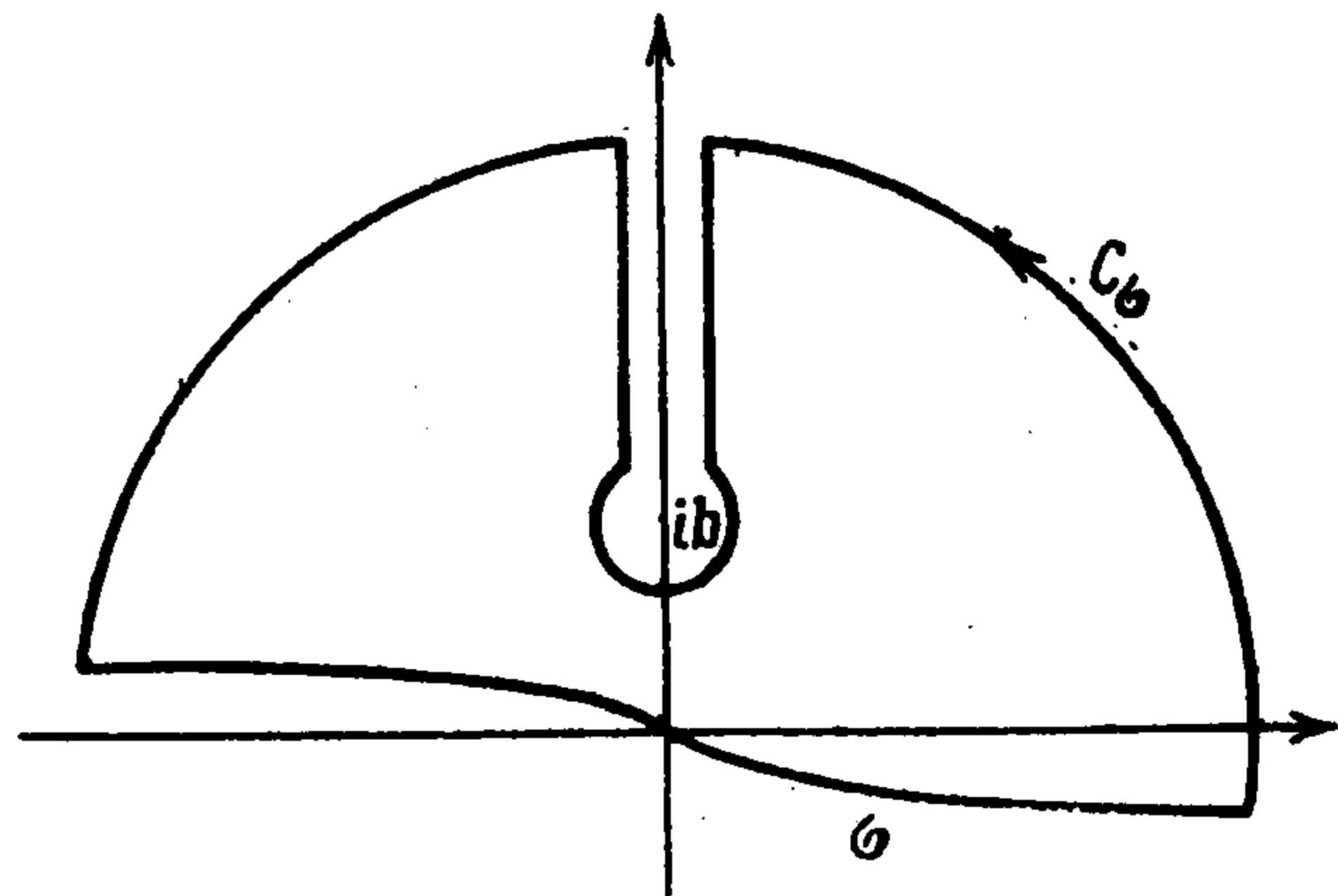
Для  $a_k$  и  $d_k$  получим ( $\psi(x)$  — пси-функция Эйлера)

$$a_{2n+2} = -\frac{1}{(2n+2)!} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{(2k+1)!!}{(2k)!!} \frac{b^{2k} \zeta^{2(n-k)}}{2k+1},$$

$$a_{2n+1} = a_0 = 0$$

$$\begin{aligned} d_{2n+2} &= \frac{1}{(2n+2)!} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \zeta^{2(n-k)} \left\{ -(4k+3)(2k)! a_{2k+2} + \right. \\ &+ b^{2k} \frac{(2k+1)!!}{(2k+1)(2k)!!} \left[ -\ln \frac{b}{2} + \psi(k+1) \right] \left. \right\} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} \zeta^{2n+2} d_0 \end{aligned}$$

$$d_{2n+1} = \frac{(-1)^n \zeta^{2n}}{(2n+1)!} d_1, \quad d_0 = I(0), \quad d_1 = I'(0), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



Фиг. 2

При  $t > 0$  на основании теории вычетов имеем

$$k_{12}^*(t) = iB\pi \left[ 2 \sum_{k=1}^{m+1} \operatorname{res} (u^{-1}R_0(u) e^{iut})|_{u=\zeta_k} + 1 \right], \quad \zeta_{m+1} = iA$$

Вычисляя вычеты и разлагая в ряды экспоненты, получим следующие представления ядер:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} k_{jj}^*(t) &= 2C_j [-\ln |t| + F_{jj}(t)], \quad j = 1, 2 \\ k_{12}^*(t) &= iB\pi [\operatorname{sign} t + F_{12}(t)] \end{aligned}$$

причем  $F_{ij}(t)$  представимы в виде равномерно сходящихся во всей плоскости рядов

$$F_{jj}(t) = \sum_{s=0}^{\infty} f_{js} t^{2s+2} \ln |t| + \sum_{s=0}^{\infty} h_{js} |t|^s, \quad F_{12}(t) = \sum_{s=0}^{\infty} e_s t^{2s+1}$$

Внося представления (2.3) в систему (1.1), полагая  $x = ay$ ,  $\xi = a\eta$ , вводя новые неизвестные функции соотношением

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(a\eta) &= \Lambda \Psi(\eta), \quad \Psi(\eta) = \begin{Bmatrix} \Psi_1(\eta) \\ \Psi_2(\eta) \end{Bmatrix}, \quad \Lambda = \\ &= \frac{1-i}{4} \begin{Bmatrix} \varepsilon_2^{-1/2}, & i\varepsilon_2^{-1/2} \\ -i\varepsilon_1^{-1/2}, & -\varepsilon_1^{-1/2} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

и умножая полученную систему слева на  $\Lambda^{-1}$ , приходим к системе

$$(2.4) \quad \int_{-1}^1 \mathbf{R}(a(y-\eta)) \Psi(\eta) d\eta = \pi \mathbf{g}(y) - \pi \int_{-1}^1 \mathbf{S}(a(y-\eta)) \Psi(\eta) d\eta, \quad |y| \leq 1$$

$$\mathbf{R}(t) = \begin{Bmatrix} R_+^*(t) & 0 \\ 0 & R_-^*(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{S}(t) = \begin{Bmatrix} S_+(t) & iS_{12}(t) \\ -iS_{12}(t) & S_-(t) \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{g}(y) = \begin{Bmatrix} g_+(y) \\ g_-(y) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} R_{\pm}^*(t) &= -\ln |t| \mp \frac{i\pi\varepsilon}{2} \operatorname{sign} t, \quad g_{\pm}(y) = \left[ \sqrt{\varepsilon_2} \frac{1 \pm i}{C_1} \times \right. \\ &\times f_1(ay) - \left. \sqrt{\varepsilon_1} \frac{1 \mp i}{C_2} f_2(ay) \right] (\gamma_3 + \gamma_2)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\pm}(t) &= \frac{1}{2\pi} [F_{11}(t) \mp F_{22}(t) \mp i\pi\varepsilon F_{12}(t)], \quad S_{12}(t) = \\ &= \frac{1}{2\pi} [F_{11}(t) - F_{22}(t)] \end{aligned}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}, \quad \varepsilon_j = BC_j^{-1}, \quad j = 1, 2$$

Дифференцируя (2.4) по  $y$  и регуляризуя полученную систему по Н. П. Векуа [8], приходим к системе уравнений Фредгольма второго рода. Для малых  $a$  эту систему можно решать методом последовательных приближений [9].

Таким образом, вся область изменения параметра  $a$  оказывается перекрытой с помощью изложенных методов.

*Замечания.* 1°. Приведенные результаты без труда переносятся на общий случай анизотропии.

2°. Изложенное выше справедливо и для статических задач, для которых отпадает необходимость построения кривых (фиг. 1) и изменяется вид (1.5).

3°. В настоящее время разработаны пакеты прикладных программ для решения системы вида (1.3) и расчета контактных напряжений по формулам (1.4).

Автор благодарит И. И. Воровича и В. А. Бабешко за постоянное внимание к работе и советы.

Поступила 10 XII 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., «Наука», 1974.
2. Александров В. М. О плоских контактных задачах теории упругости при наличии сцепления или трения. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
3. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. М., «Наука», 1965.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.
5. Бабешко В. А. Статические и динамические контактные задачи со сцеплением. ПММ, 1975, т. 39, вып. 3.
6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. М., «Наука», 1971.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
8. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М., «Наука», 1970.
9. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1968.