

## КОЛЕБАНИЯ ШТАМПА, ЧАСТЬЮ ПОВЕРХНОСТИ СЦЕПЛЕННОГО С УПРУГИМ СЛОЕМ

В. А. Бабешко, А. Н. Румянцев

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается плоская задача о гармонической вибрации на поверхности упругого слоя толщины  $2h$  штампа конечных размеров, расположенного на отрезке  $[a_1, a_3]$ ; штамп жестко сцеплен со слоем на отрезке  $[a_1, a_2]$  ( $a_1 < a_2 < a_3$ ) и контактирует без трения на отрезке  $[a_2, a_3]$ .

Построена система интегральных уравнений смешанной задачи с учетом необходимых физических принципов излучения, установлена ее однозначная разрешимость и предложен приближенный метод решения. Метод основан на применении факторизации функций и матриц-функций и позволяет систему интегральных уравнений первого рода свести к системе интегральных уравнений второго рода с вполне непрерывным в некотором пространстве функций оператором, для которого эффективно проводится расщепление на конечномерный и малый. Последнее позволяет производить конечномерную аппроксимацию оператора при численной реализации метода.

Изучены свойства решений интегральных уравнений — распределение контактных напряжений под штампом, а также характер возбуждаемых поверхностных волн. Установлено наличие особенностей в контактных напряжениях, которые имеют место не только на краю штампа, но и во внутренней области контакта.

Данная задача рассматривается в связи с проблемами дефектоскопии фундаментов с помощью вибрации с целью выяснения характера контакта с упругой средой, а также дефектоскопии клеевых посадок.

В качестве примера приводится реализация наиболее сложного момента, возникающего при использовании применяемого метода, — приближенная факторизация конкретной матрицы-функции.

Статические задачи для штампов с неполным разделом граничных условий в несколько иных целях рассматривались в работах [1,2].

1. Для сведения рассматриваемой задачи к интегральным уравнениям решим в области  $|z| \leq h$ ,  $-\infty < x < \infty$  динамические уравнения Ляме (с инерциальными членами) при следующих граничных условиях:

$$z = -h, u = w = 0, -\infty < x < \infty$$

$$z = h, u = u_0(x), x \in [a_1, a_2]$$

$$w = w_0(x), x \in [a_1, a_3]$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, x \in (-\infty, a_1) \cup (a_2, \infty)$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} = 0, x \in (-\infty, a_1) \cup (a_3, \infty)$$

$$(U(x, z, t) = \operatorname{Re} [u(x, z) e^{-i\omega t}], W(x, z, t) = \operatorname{Re} [w(x, z) e^{-i\omega t}])$$

Здесь  $U, W$  — соответственно касательные и нормальные перемещения в слое;  $\lambda, \mu$  — коэффициенты Ляме,  $h$  — полутолщина слоя,  $\omega$  — частота колебаний штампа.

С использованием физического принципа предельного поглощения [3,4] поставленная выше задача методом преобразований Фурье приводится к системе интегральных уравнений вида

$$(1.1) \quad \sum_{s=1}^2 \int_{a_1}^{a_{s+1}} r_{ks}(x-t) q_s(t) dt = f_k(x), \quad x \in [a_1, a_{k+1}]$$

$$(1.2) \quad r_{mn}(t) = \int_{\Gamma} R_{mn}(u) e^{iut} du$$

Элементы матрицы  $R(u)$  связаны с элементами вещественной матрицы  $K(u)$  соотношениями

$$(1.3) \quad \begin{aligned} R_{mm} &\equiv K_{mm}, \quad R_{12} \equiv -R_{21} \equiv iK_{12} \\ K_{11} &= 1/2 \kappa_2^2 (\sigma_2 \operatorname{sh} 2\sigma_2 \operatorname{ch} 2\sigma_1 - \sigma_1^{-1} u^2 \operatorname{sh} 2\sigma_1 \operatorname{ch} 2\sigma_2) \Delta^{-1}(u) \\ K_{12} &= -u \{ (2u^2 - \kappa_2^2/2) (1 - \operatorname{ch} 2\sigma_1 \operatorname{ch} 2\sigma_2) + \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \times \\ &\quad \times [2u^4 - u^2 (3/2 \kappa_2^2 + \kappa_1^2) + \kappa_1^2 \kappa_2^2] \operatorname{sh} 2\sigma_1 \operatorname{sh} 2\sigma_2 \} \Delta^{-1}(u) \\ K_{22} &= 1/2 \kappa_2^2 (\sigma_1 \operatorname{sh} 2\sigma_1 \operatorname{ch} 2\sigma_2 - \sigma_2^{-1} u^2 \operatorname{sh} 2\sigma_2 \operatorname{ch} 2\sigma_1) \Delta^{-1}(u) \\ \Delta(u) &= u^2 (2u^2 - \kappa_2^2) - (2u^4 - u^2 \kappa_2^2 + 1/4 \kappa_2^4) \operatorname{ch} 2\sigma_1 \operatorname{ch} 2\sigma_2 + \\ &\quad + \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} u^2 [2u^4 - u^2 (2\kappa_2^2 + \kappa_1^2) + \kappa_1^2 \kappa_2^2 + 1/4 \kappa_2^4] \times \\ &\quad \times \operatorname{sh} 2\sigma_1 \operatorname{sh} 2\sigma_2 \\ \kappa_1^2 &= \omega^2 \rho h^2 (\lambda + 2\mu)^{-1}, \quad \kappa_2^2 = \omega^2 \rho h^2 \mu^{-1}, \quad \sigma_k = (u^2 - \kappa_k^2)^{1/2} \end{aligned}$$

Здесь  $\nu, \rho$  — коэффициент Пуассона и плотность материала,  $q_1(x), q_2(x)$  — соответственно касательное и нормальное контактные напряжения,  $f_1(x), f_2(x)$  — заданные амплитуды касательных и нормальных смещений точек под штампом соответственно, взятые с множителем  $4\mu h$ .

Функции  $K_{mn}(u)$  (1.3) регулярны на вещественной оси всюду, за исключением одних и тех же для всех функций полюсов  $\pm \zeta_k$  ( $k = 1, 2, \dots, p$ ),  $K_{mm}$  — четные,  $K_{12}$  — нечетная. При  $|u| \rightarrow \infty$  элементы матрицы-функции  $K(u)$  имеют вид

$$\begin{aligned} K_{mm}(u) &= A |u|^{-1} [1 + O(u^{-1})], \quad K_{12}(u) = Bu^{-1} \times \\ &\quad \times [1 + O(u^{-1})], \quad A > |B| \end{aligned}$$

Контур  $\Gamma$  в (1.2) располагается в соответствии с правилами, установленными в [4-6].

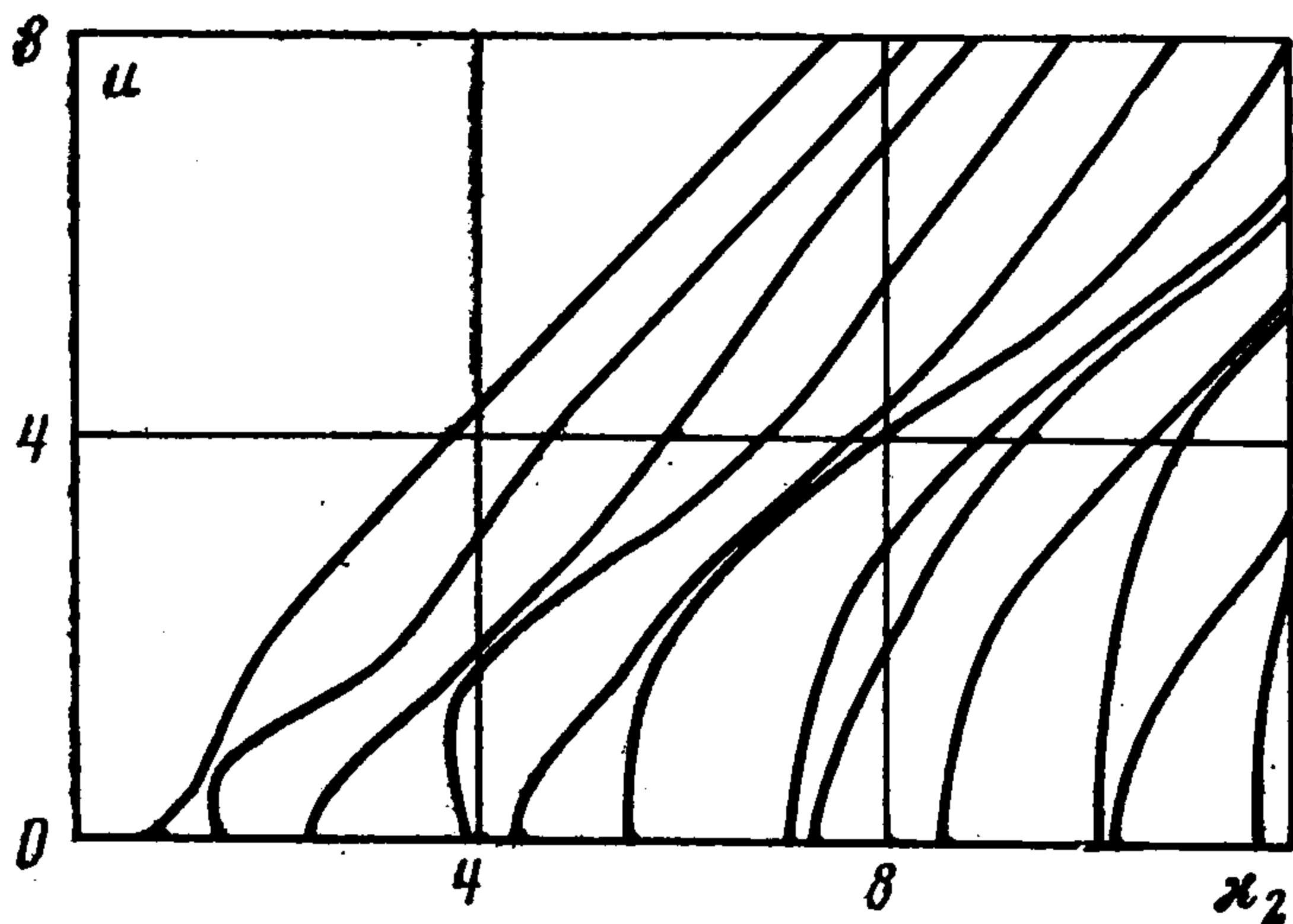
На фигуре приведены кривые распределения вещественных полюсов элементов матрицы  $K(u)$  (1.3) при  $\nu = 0.3$ . Видно, что с увеличением частоты (что соответствует росту параметра  $\kappa_2$ ) увеличивается число полюсов.

2. Теория систем интегральных уравнений вида (1.1) в настоящее время не развита. Поэтому приведем один из критериев единственности решения системы интегральных уравнений (1.1) в пространстве  $L_\alpha(a_1, a_3)$ ,  $\alpha > 1$ , который удалось установить и который в случае вырождения системы в одно уравнение всегда обеспечивает единственность в конкретных задачах.

**Теорема 1.** Пусть функции  $K_{mn}(u)$ , имеющие однократные полюсы, обладают следующими свойствами:

- 1)  $[K_{11}^{-1}(\zeta_r)]' > 0, r = 1, 2, \dots, p$
- 2)  $[K_{11}^{-1}(\zeta_r)]' [K_{22}^{-1}(\zeta_r)]' - \{[K_{12}^{-1}(\zeta_r)]'\}^2 > 0$

3) существуют рациональные ограниченные на бесконечности функции  $P_{mn}(u)$  с полюсами в точках  $\pm \zeta_k (k = 1, 2, \dots, p)$ , такие, что при любом  $u (-\infty < u < \infty)$  вещественная эрмитова компонента матрицы  $R(u)P^{-1}(u)$  положительно-определенная.



Для доказательства, применяя методику, предложенную в работе [4], в предположении однократности полюсов функций  $K_{mn}(u)$  умножим первое уравнение системы на  $\bar{q}_1(x)$ , второе — на  $\bar{q}_2(x)$  и проинтегрируем их по всей оси при  $f_k(x) = 0$  (черточка означает

комплексное сопряжение). Сложим полученные результаты и деформируем контур интегрирования на вещественную ось. После выделения вещественной части и приравнивания ее нулю, на основании условий 1), 2) заключаем, что

$$Q_k(\zeta_r) \equiv Q_k(-\zeta_r) \equiv 0, \quad r = 1, 2, \dots, p; \quad k = 1, 2$$

$$Q_k(u) = \int_{a_1}^{a_{k+1}} q_k(x) e^{iux} dx$$

Введя в рассмотрение функции

$$(2.1) \quad T_{n_s}(u) = \sum_{s=1}^2 P_{ns}(u) Q_s(u)$$

представляющие собой, как установлено в [5], преобразования Фурье функций из  $L_\alpha$ , обращающихся в нуль вне  $[a_1, a_{n+1}]$ , и определив из соотношения (2.1)  $Q_s(u)$ , внесем их в уравнения (1.1). После этого требование положительной определенности оператора в левой части системы (1.1) приводит к условиям 3).

3. Сведем систему интегральных уравнений первого рода к системе интегральных уравнений второго рода с вполне непрерывным оператором. Применим для этого метод факторизации функций и матриц-функций. Метод факторизации позволяет удовлетворять разрывным граничным условиям краевой задачи.

Краевая задача имеет три точки смены граничных условий: в точке  $a_1$  меняется сразу два граничных условия, поэтому здесь факторизуется матрица-функция, в точках  $a_2$  и  $a_3$  сменяются лишь по одному граничному условию. В указанных точках должны быть факторизованы функции.

Для реализации этих предложений применим комплексное преобразование Фурье к системе (1.1). В результате система принимает вид

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{R}(u) \mathbf{Q}(u) &= \mathbf{F} + e^{ia_1 u} \Phi^- + e^{ia_2 u} \Psi^+ \\ \mathbf{Q}(u) &= \{Q_1, Q_2\}, \quad Q_1^- = Q_1 e^{-ia_2 u} \end{aligned}$$

$$(3.2) \quad \Phi^- = \left\{ \int_{-\infty}^{a_1} \varphi_1 e^{iu(x-a_1)} dx, \int_{-\infty}^{a_1} \varphi_2 e^{iu(x-a_1)} dx \right\} = \{\Phi_1^-, \Phi_2^-\}$$

$$(3.3) \quad \mathbf{F} = \left\{ \int_{a_1}^{a_2} f_1 e^{iux} dx, \int_{a_1}^{a_3} f_2 e^{iux} dx \right\} = \{F_1, F_2\}$$

$$\Psi_k^+ = \int_{a_{k+1}}^{\infty} \psi_k e^{iu(x-a_{k+1})} dx, \quad \Psi^+ = \{\Psi_1^+, e^{iu(a_3-a_2)} \Psi_2^+\}$$

Здесь  $\varphi_1, \varphi_2$  — продолжение правой части интегральных уравнений (1.1) в область  $x < a_1$ . Аналогично  $\psi_1, \psi_2$  — продолжение правых частей этих уравнений в область  $x > a_2$  и  $x > a_3$  соответственно.

Определив эти функции, найдем из соотношения (3.1) решение  $\mathbf{Q}(u)$  системы интегральных уравнений.

Допуская существование решения  $\mathbf{q}(x) = \{q_1, q_2\}$  в классе  $L_\alpha$ , можно установить, что функции  $\varphi_k, \psi_k$  при  $|x| \rightarrow \infty$  ограничены на бесконечности, вырождаясь в тригонометрические полиномы, представляющие собой излучаемые волны. На любом ограниченном множестве они дифференцируемы.

В связи с перечисленным выше преобразованием Фурье  $\Phi^-, \Psi^+$  существуют на контуре  $\Gamma$  как пределы соответствующих интегралов (3.2), (3.3) соответственно из нижней и верхней полуплоскостей.

Соотношение (3.1) будет эквивалентно системе интегральных уравнений (1.1), если его рассматривать на контуре  $\Gamma$ ; этот контур в своей окрестности определяет некоторую криволинейную полосу  $\Omega$  регулярности всех функций соотношения (3.1). В дальнейшем факторизация всех функций будет производиться относительно контуров, расположенных в  $\Omega$ , в частности, относительно контура  $\Gamma$ .

В дальнейшем будем предполагать, что выполнены следующие факторизации:

$$(3.4) \quad \mathbf{R}(u) = \mathbf{K}_+ \mathbf{K}_- = \mathbf{N}_- \mathbf{N}_+$$

$$(3.5) \quad \begin{aligned} K_{11} + i K_{21} K_{12} / K_{22} &\equiv C(u) = C_+ C_- \\ K_{22}(u) &= \Pi_+ \Pi_- \end{aligned}$$

Введем далее следующие обозначения для функции  $g(u)$ , регулярной в  $\Omega$  и убывающей степенным образом на бесконечности:

$$\begin{aligned} g(u) &= \{g\}^+ + \{g\}^- \\ \{g\}^+ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_-} \frac{g(z)}{z-u} dz, \quad u \text{ выше } \Gamma_- \\ \{g\}^- &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} \frac{g(z)}{z-u} dz, \quad u \text{ ниже } \Gamma_+ \end{aligned}$$

Контур  $\Gamma_-$  и  $\Gamma_+$  лежат в  $\Omega$  соответственно ниже и выше контура  $\Gamma$ .

Как известно, операции  $\{ \}^+$ ,  $\{ \}^-$  означают проектирование аналитической функции в области выше ( $E_+$ ) и ниже ( $E_-$ ) контура  $\Gamma$  соответственно.

Умножим теперь соотношение (3.1) на матрицу  $e^{-iua_1}K_-^{-1}$  и результат спроектируем на  $E_-$ . Приходим к соотношению вида

$$(3.6) \quad K_-^{-1}\Phi^- + \{e^{-iua_1}K_-^{-1}F\}^- + \{K_-^{-1}e^{iu(a_2-a_1)}\Psi^+\}^- = 0$$

Исключив из системы (3.1) функцию  $Q_2$ , разделив результат на  $e^{ia_2u}C_+$ , после проектирования на  $E_+$ ,  $E_-$  получим соответственно

$$(3.7) \quad \begin{aligned} & \frac{\Psi_1^+}{C_+} + \left\{ \frac{F_1}{C_+} e^{-ia_2u} \right\}^+ + \left\{ \frac{e^{-i(a_2-a_1)u}}{C_+} \Phi_1^- \right\}^+ - \{DF_2 e^{-ia_2u}\}^+ - \\ & - \{De^{-i(a_2-a_1)u} \Phi_2^-\}^+ - \{De^{i(a_2-a_2)u} \Psi_2^+\}^+ = 0 \\ & Q_1^- C_- - \left\{ \frac{F_1}{C_+} e^{-ia_2u} \right\}^- - \left\{ \frac{e^{-i(a_2-a_1)u}}{C_+} \Phi_1^- \right\}^- + \\ & + \{De^{-i(a_2-a_1)u} \Phi_2^-\}^- + \{De^{i(a_2-a_2)u} \Psi_2^+\}^- + \{DF_2 e^{-ia_2u}\}^- = 0 \\ & (D(u) = iK_{12}/(C_+K_{22})) \end{aligned}$$

Наконец, разделив второе уравнение системы (3.1) на  $e^{iua_2} \Pi_+$  и проектируя результат на  $E_+$ , получим соотношение вида

$$(3.8) \quad \frac{\Psi_2^+}{\Pi_+} + \left\{ \frac{e^{-i(a_2-a_1)u}}{\Pi_+} \Phi_2^- \right\}^+ + \left\{ \frac{e^{-ia_2u} F_2}{\Pi_+} \right\}^+ - \left\{ \frac{iK_{21}}{\Pi_+} e^{-i(a_2-a_2)u} Q_1^- \right\}^+ = 0$$

Введем новые неизвестные, положив

$$\begin{aligned} X^- &= K_-^{-1}\Phi^- = \{X_1^-, X_2^-\}, \quad X^+ = \Psi^+\Pi_+^{-1} = \{X_3^+, X_4^+\} \\ Q_1^- C_- &= X_5^- \end{aligned}$$

Соотношения (3.6) — (3.8) представляют собой замкнутую систему относительно неизвестных  $X_k^\pm$ . Приведем эту систему к уравнениям второго рода с вполне непрерывным оператором. С этой целью представим систему в виде

$$(3.9) \quad \begin{aligned} & X^- + \{K_-^{-1}e^{iu(a_2-a_1)}\Pi_+ X^+\}^- + \{e^{-iua_1}K_-^{-1}F\}^- = 0 \\ & \frac{\Pi_+}{C_+} X_3^+ + \{De^{i(a_2-a_2)u} X_4^+\Pi_+\}^- - De^{iu(a_2-a_2)} X_4^+\Pi_+ + \\ & + \left\{ \frac{e^{-i(a_2-a_1)u}}{C_+} (k_{11}X_1^- + k_{12}X_2^-) \right\}^+ - \\ & - \{De^{-i(a_2-a_1)u} (k_{21}X_1^- + k_{22}X_2^-)\}^+ + \left\{ \left( \frac{F_1}{C_+} - DF_2 \right) e^{-ia_2u} \right\}^+ = 0 \\ & X_5^- - \frac{e^{-i(a_2-a_1)u}}{C_+} \left[ X_1^- \left( k_{11} - \frac{iK_{12}}{K_{22}} k_{12} \right) + \right. \\ & + \left. X_2^- \left( k_{21} - \frac{iK_{12}}{K_{22}} k_{22} \right) \right] + \left\{ \frac{e^{-i(a_2-a_1)u}}{C_+} (k_{11}X_1^- + k_{12}X_2^-) \right\}^+ - \\ & - \{De^{-i(a_2-a_1)u} (k_{21}X_1^- + k_{22}X_2^-)\}^+ + \{De^{i(a_2-a_2)u} X_4^+\Pi_+\}^- - \\ & - \left\{ \left( \frac{F_1}{C_+} - DF_2 \right) e^{-ia_2u} \right\}^- = 0 \\ & X_4^+ + \left\{ \frac{e^{-i(a_2-a_1)u}}{\Pi_+} (k_{12}X_1^- + k_{22}X_2^-) \right\}^+ + \\ & + \left\{ \frac{iK_{21}}{C_-\Pi_+} e^{-i(a_2-a_2)u} X_5^- \right\}^+ + \left\{ \frac{e^{-ia_2u}}{\Pi_+} F_2 \right\}^+ = 0 \end{aligned}$$

Здесь  $k_{mn}$  — элементы матрицы  $K_-(u)$ .

Перенеся в правую часть все интегральные члены системы (3.9) и решив линейную систему в левой части относительно  $X_k^\pm$ , приходим к системе второго рода с вполне непрерывным оператором.

4. В предположении существования решений установим свойства решений системы (3.9), а с ней и системы (1.1). Будем считать, что правые части интегральных уравнений (1.1)  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  принадлежат  $C_2$  на  $[a_1, a_2]$  и  $[a_1, a_3]$  соответственно. В этом случае некоторые продолжения функций  $f_1, f_2$  имеют преобразования Фурье  $F_1, F_2$ , убывающие на бесконечности как  $u^{-2}$  [7]. С помощью этой оценки устанавливается поведение свободных членов системы (3.9) в окрестности бесконечности на любом контуре в области  $\Omega$ . Именно: свободные члены на любом из указанных контуров принадлежат пространству  $c(1)$ ; здесь  $c(\lambda)$  — пространство функций, непрерывных с весом  $|z|^\lambda$  на контуре. |

Изучая уравнения (3.9) в пространстве  $c(\lambda)$ ,  $\lambda \leq 1$ , заключаем, что если решения системы существуют, то они обладают свойствами:  $X_k^\pm \in c(1)$ . Отсюда  $\Phi^-, \Psi^+ \in c(3/2)$ ;  $Q_1^- \in c(1/2)$ . Пользуясь этими свойствами, с помощью соотношений (3.6) — (3.8) получаем следующие представления ряда функций в окрестности бесконечности:

$$\Phi_k^-(z) = \frac{c_1(k) e^{ia_1 z}}{z^{3/2+i\epsilon}} + O(z^{-3/2})$$

$$\Psi_k^+(z) = \frac{c_2(k) e^{ia_{k+1} z}}{z^{3/2}} + O(z^{-3/2})$$

$$Q_1(z) = \frac{c_3 e^{ia_1 z}}{z^{1/2}} + \frac{c_4 e^{-ia_2 z}}{z^{1/2+i\epsilon}} + O(z^{-3/2})$$

$$Q_2(z) = \frac{c_5 e^{ia_1 z}}{z^{1/2+i\epsilon}} + \frac{c_6 e^{i(a_2+a_3)z}}{z^{1/2}} + O(z^{-3/2})$$

Применяя обратное преобразование Фурье, на основании этих оценок устанавливаем следующие свойства функций  $q_k$ :

$$(4.1) \quad \begin{aligned} q_1(x) (x - a_1)^{1/2+i\epsilon} (a_2 - x)^{1/2} &\in C(a_1, a_2) \\ q_2(x) (x - a_1)^{1/2+i\epsilon} |a_2 - x|^{1/2} (a_3 - x)^{1/2} &\in C(a_1, a_3) \end{aligned}$$

т. е.  $q_k \in L_\alpha$  — пространству единственности. Отсюда следует однозначная разрешимость системы (3.9) и, таким образом, системы (1.1) в классе (4.1) для любых правых частей  $f_1, f_2 \in C_2$ .

5. Для построения приближенного решения системы интегральных уравнений (3.9) отметим следующее: поскольку операторы в левой части вполне непрерывные фредгольмовы, то решение системы можно записать в форме ряда Фредгольма с помощью средств внешнего анализа [8]. Урезание этого ряда дает приближенное решение задачи. Сложность при использовании этого подхода состоит в проблеме вычисления кратных интегралов.

Другой приближенный подход состоит в сведении системы Фредгольма к алгебраической системе линейных уравнений [9] в сочетании с приближенным методом факторизации функций и матриц-функций. При этом предполагается, осуществив приближенную факторизацию функций и матриц-функций с помощью иррациональных функций, произвести естественную

аппроксимацию фредгольмовых интегральных операторов конечномерными. Эта аппроксимация осуществляется путем опускания контуров интегрирования в интегральных операторах  $\{ \}^+$  и поднятия в операторах  $\{ \}^-$ . В процессе этих операций, когда при движении контура пересекаются полюсы, происходит расщепление оператора на конечномерный и малый (малость достигается удаленностью точки ветвления, до которой перемещается контур, и наличием затухающих экспонент). Пренебрегая малым оператором, получаем конечномерную аппроксимацию.

Продemonстрируем это на примере последнего уравнения системы (3.9). Обозначим через  $\lambda_{1k}$  ( $k = 1, 2, \dots, r_1$ ),  $\lambda_{2k}$  ( $k = 1, 2, \dots, r_2$ ),  $\lambda_{3k}$  ( $k = 1, 2, \dots, r_3$ ) соответственно полюсы функций  $k_{12}\Pi_+^{-1}$ ,  $k_{22}\Pi_+^{-1}$  и  $iK_{21}\Pi_+^{-1}$ . Получим

$$(5.1) \quad X_4^+(z) - \sum_{k=1}^{r_1} \frac{e^{-i(a_3-a_1)\lambda_{1k}}}{\lambda_{1k}-z} \operatorname{Res} (k_{12}\Pi_+^{-1}) X_1^-(\lambda_{1k}) - \\ - \sum_{k=1}^{r_2} \frac{e^{-i(a_3-a_1)\lambda_{2k}}}{\lambda_{2k}-z} \operatorname{Res} (k_{22}\Pi_+^{-1}) X_2^-(\lambda_{2k}) - \\ - \sum_{k=1}^{r_3} \operatorname{Res} (iK_{21}\Pi_+^{-1}) X_5^-(\lambda_{3k}) \frac{e^{-i(a_3-a_2)\lambda_{3k}}}{(\lambda_{3k}-z)C_-(\lambda_{3k})} + D_4(z) = 0$$

Здесь  $D_4(z)$  — аппроксимация последнего члена в левой части рассматриваемого уравнения. Аналогичным образом можно преобразовать остальные уравнения системы (3.9).

Из соотношения (5.1) видно, что для приближенного определения  $X_4^+(z)$  достаточно знать значения  $X_1^-$ ,  $X_2^-$ ,  $X_5^-$  соответственно в точках  $\lambda_{ik}$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Полагая в соответствующих уравнениях системы, полученной из (3.9) описанным выше способом,  $z = \lambda_{ik}$  и действуя подобным образом, исходя из необходимости определения  $X_k^\pm$  ( $k = 1, 2, 3, 5$ ), получим замкнутую систему линейных алгебраических уравнений. Определив  $X_k^\pm$ , находим  $\Phi^-$  и  $\Psi^+$ , а затем  $Q$  из уравнения (3.1).

Для исследования поведения поверхности вне штампа достаточно вычислить комплексное обращение Фурье для функций  $\Phi^-$  и  $\Psi^+$ .

В дальней зоне поведение поверхности слоя рассчитывается достаточно просто в связи со следующим представлением функций  $\Phi^-$  и  $\Psi^+$ :

$$\Phi_n^- = \sum_{k=1}^p \frac{c_{kn}}{z - \zeta_k} + \chi_{1n}(z), \quad \Psi_n^+ = \sum_{k=1}^p \frac{d_{kn}}{z + \zeta_k} + \chi_{2n}(z)$$

Здесь функции  $\chi_{1n}$ ,  $\chi_{2n}$  регулярны соответственно в областях  $\operatorname{Im} z \leq \leq \delta_{1n}$ ,  $\operatorname{Im} z \geq \geq \delta_{2n}$  ( $\delta_{kn} > 0$ ). В результате обращения для  $\varphi_k^-(x)$ ,  $\psi_k^+(x)$  получим следующие представления:

$$\varphi_k^-(x) = 2\pi i \sum_{s=1}^p c_{sk} e^{-i\zeta_s x} + O(e^{\delta_{1k}x}), \quad x \rightarrow -\infty \\ \psi_k^+(x) = -2\pi i \sum_{s=1}^p d_{sk} e^{i\zeta_s x} + O(e^{-\delta_{2k}x}), \quad x \rightarrow \infty$$

6. Наиболее сложная часть при применении этого приближенного метода заключается в построении приближенной факторизации функций и

матриц-функций. После выполнения этой задачи дальнейшее решение не представляет трудности.

В соответствии с общими теоремами, изложенными в [10], условия, наложенные выше на матрицу  $R(u)$ , обеспечивают ее факторизацию в форме (3.4). Однако получить явный вид матриц  $K_{\pm}(u)$ ,  $N_{\pm}^{\pm}(u)$  невозможно. Поэтому применим приближенную факторизацию [11], которая осуществляется лишь с помощью ЭЦВМ.

Основанием для применения приближенной факторизации матриц-функций служит следующая теорема, доказательство которой, основанное на методе возмущений, ради краткости опущено.

**Теорема 2.** Пусть система уравнений (1.1) с матрицей-ядром  $K(u)$  имеет решение  $q = \{q_1, q_2\}$ , а с матрицей  $K^*(u)$  — решение  $q^* = \{q_1^*, q_2^*\}$ . Тогда, если в условиях теоремы 1 элементы  $K_{ij}(u)$  и  $K_{ij}^*(u)$  матриц  $K(u)$  и  $K^*(u)$  удовлетворяют условиям

$$|K_{ij}(u) - K_{ij}^*(u)| |K_{ij}(u)|^{-1} (1 + |u|)^{\alpha} < \varepsilon, \quad \alpha > 1/2$$

то при достаточно малом  $\varepsilon$  справедливо неравенство

$$|q_k(x) - q_k^*(x)| \sqrt{|a_3 - x| |a_2 - x| |a_1 - x|} < m \varepsilon$$

где  $m$  не зависит от  $q_k$ .

Вводим функционально-коммутативную матрицу  $G(u)$  с элементами  $G_{mn}(u)$  вида  $G_{11} = G_{22} = K_{11}$ ,  $G_{12} = -G_{21} = iK_{12}$ . Факторизация матрицы  $G(u)$  проводится в явном виде [11]

$$(6.1) \quad \begin{aligned} G(u) &= G_+(u) G_-(u) \equiv G_-(u) G_+(u) \\ 2G_{11}^{\pm}(u) &= 2G_{22}^{\pm}(u) = s_{\pm}(u) + t_{\pm}(u), \quad 2G_{12}^{\pm}(u) = \\ &= -2G_{21}^{\pm}(u) = i[t_{\pm}(u) - s_{\pm}(u)] \\ s_+s_- &= K_{11} - K_{12}, \quad t_+t_- = K_{11} + K_{12} \end{aligned}$$

Факторизацию (6.1) будем производить приближенно. Рассмотрим факторизацию функции  $S(u) = K_{11} + K_{12}$  с использованием аппроксимирующей функции  $S^*(u)$ , подбираемой с точностью  $\varepsilon$  из условия

$$(6.2) \quad |S(u) - S^*(u)| / |S(u)| < \varepsilon$$

Пусть  $z_s^+ > 0$  ( $s = 1, 2, \dots, n_1$ ) и  $z_k^- < 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n_2$ ) — нули функции  $S(u)$ . Без ограничения общности можем считать, что  $n_1 = n_2 = n$ , где  $n \leq p$ . Составим функцию, не имеющую действительных нулей и полюсов

$$(6.3) \quad S_1(u) = S(u) (A_1^2 + u^2)^{-N} R_1(u) U_1(u)$$

Здесь

$$\begin{aligned} R_1(u) &= \left( \frac{u^2 + b^2}{A^2 - B^2} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{1}{\pi} \ln \frac{A+B}{A-B} \operatorname{arctg} \frac{u}{b} \right) \times \\ &\times \prod_{s=1}^{N'} (u^2 + \xi_s^2) \prod_{k=1}^p (u^2 - \zeta_k^2) \prod_{s=1}^n (u - z_s^+)^{-1} (u - z_s^-)^{-1} \\ U_1(u) &= \begin{cases} \prod_{s=1}^{p-n} (u^2 + v_s^2)^{-1}, & n < p \\ 1, & n = p \end{cases} \end{aligned}$$

В выражении (6.3)  $b \gg 1$  — заранее заданный параметр аппроксимации. Наряду с параметром  $A_1 > 0$  величины  $\xi_k > 0$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) и  $v_k > 0$  ( $k = 1, 2, \dots, p - n$ ) — дополнительные параметры аппроксимации, которые удовлетворяют условию (6.2) наименьшего отклонения  $S^*(u)$  от  $S(u)$  на действительной оси;  $S_1(u) \sim 1$  при  $|u| \rightarrow \infty$ .

Для однозначности функции  $S_1(u)$  проводим разрез от  $bi$  до  $i\infty$  и от  $-bi$  до  $-i\infty$  и фиксируем ветвь условием  $\sqrt{b^2} = b > 0$ . После замены  $x = u^2/(u^2 + A_1^2)$ , преобразующей положительную полуось в отрезок  $[0, 1]$ , приближаем функцию  $S_1(A_1 \sqrt{x/(1-x)})$  полиномами Бернштейна  $B_N(x)$  степени  $2N$ . Получим

$$(6.4) \quad S^*(u) = T_{2N}(u) [R_1(u)]^{-1} U_1^{-1}(u)$$

поскольку  $B_N(u^2/(u^2 + A_1^2))$  — рациональная функция, знаменатель которой представляет собой полином  $(u^2 + A_1^2)^N$ , а числитель — полином  $T_{2N}(u)$  порядка  $2N$ .

Теперь с учетом того, что

$$\exp\left(\frac{1}{\pi} \ln \frac{A+B}{A-B} \operatorname{arctg} \frac{u}{b}\right) = \left(\frac{b+iu}{b-iu}\right)^{i\gamma}, \quad \gamma = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{A+B}{A-B}$$

можно факторизовать  $S^*(u)$  в явном виде. Факторизация функции  $K_{11} - K_{12}$  производится аналогично.

Введем в рассмотрение матрицу

$$(6.5) \quad H(u) = G_-^{-1}(u) R(u) G_+^{-1}(u)$$

Ее элементы имеют вид

$$\begin{aligned} H_{11} &= 1 + \theta (K_{11} - L^+), & H_{22} &= 1 + \theta (K_{11} + L^+) \\ H_{12} &= -i\theta (K_{12} + L^-), & H_{21} &= i\theta (K_{12} - L^-) \end{aligned}$$

$$(\theta = 1/2 (K_{22} - K_{11})/\det G(u), \quad L^\pm = 1/2 (s_+ t_- \pm s_- t_+))$$

Если корни аппроксимирующего полинома  $T_{2N}(u)$  равны  $\alpha_k, \bar{\alpha}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ), то на основании (6.4) получим

$$\begin{aligned} L^\pm(u) &= \frac{1}{2} \left(\frac{A^2 - B^2}{u^2 + b^2}\right)^{1/2} \prod_{k=1}^p (u^2 - \zeta_k^2)^{-1} \prod_{k=1}^N (u^2 + \xi_k^2)^{-1} \times \\ &\times \left\{ \prod_{s=1}^n [u^2 - (z_s^+)^2] \prod_{k=1}^N (u^2 - \alpha_k^2)(b^2 + u^2)^{i\gamma} \pm \prod_{s=1}^n [u^2 - (z_s^-)^2] \times \right. \\ &\times \left. \prod_{k=1}^N (u^2 - \bar{\alpha}_k^2)(b^2 + u^2)^{-i\gamma} \right\} U_1^{-1}(u) \end{aligned}$$

Отсюда видно, что если у функции  $S(u)$  нет вещественных корней или они располагаются симметрично относительно начала координат, то  $H_{11}(u)$  и  $H_{22}(u)$  вещественны на действительной оси, а  $H_{12}(u)$  и  $H_{21}(u)$  являются комплексно-сопряженными.

Очевидно, при  $|u| \rightarrow \infty$  имеют место соотношения

$$H_{mm} = 1 + O(u^{-1}), \quad H_{mn} = O(u^{-1}), \quad m \neq n$$

Аппроксимируем элементы матрицы  $H(u)$  рациональными функциями с помощью полиномов Бернштейна по схеме, представленной выше для

функции  $S(u)$ . При этом параметры аппроксимации будем выбирать из условия малости разности модулей элементов матрицы  $H(u)$  и аппроксимирующих функций по отношению к  $|\det H(u)|$  на вещественной оси. Получим матрицу  $H^*(u)$  с элементами вида

$$(6.6) \quad H_{ij}^*(u) = V_{ij}(u) \prod_{s=1}^{N_1} \frac{1}{u^2 + \eta_s^2} \prod_{k=1}^{m_1} \frac{1}{u^2 - t_k^2}$$

Здесь  $\eta_s$  — параметры аппроксимации,  $t_k$  — положительные полюса элементов матрицы  $H(u)$  (одни и те же для всех элементов). Степень полиномов  $V_{11}(u)$ ,  $V_{22}(u)$  на единицу выше степени полиномов  $V_{12}(u)$  и  $V_{21}(u)$ .

Для факторизации  $H^*(u)$  достаточно факторизовать матрицу  $V(u)$  с элементами  $V_{ij}(u)$ . Как известно [12], матрицу  $V(u)$  можно представить в форме

$$(6.7) \quad V(u) = X(u) W(u) Y(u)$$

где  $X(u)$  и  $Y(u)$  — полиномиальные матрицы с постоянными отличными от нуля определителями,  $W(u)$  — диагональная матрица, факторизуемая в явном виде.

Таким образом, принимая во внимание (6.5) — (6.7), находим

$$N_-(u) = \prod_{k=1}^{N_1} \frac{1}{u - \eta_k} \prod_{k=1}^{m_1} \frac{1}{u - t_k} G_-(u) X(u) W_-(u)$$

$$N_+(u) = \prod_{k=1}^{N_1} \frac{1}{u + \eta_k} \prod_{k=1}^{m_1} \frac{1}{u + t_k} W_+(u) Y(u) G_+(u)$$

Аналогично строится вторая приближенная факторизация (3.4).

В качестве примера рассмотрим приближенную факторизацию матрицы  $R(u)$  при  $\kappa_2=1.25$ ,  $b=10.0$ ,  $\nu=0.3$ . В этом случае существует один положительный полюс  $p_1=0.5759$  у элементов матрицы  $R(u)$ .

Функция  $S(u)=K_{11}(u) + K_{12}(u)$  хорошо аппроксимируется при помощи многочлена  $T(u)$  восьмой степени с корнями:  $0.689 \pm 1.034i$ ,  $-0.254 \pm 0.854i$ ,  $-0.069 \pm 2.186i$ ,  $0.478 \pm 7.437i$ . При аппроксимации  $\nu_1=0.5$ ,  $\xi_1=1.20$ ,  $\xi_2=1.25$ ,  $\xi_3=1.00$ ,  $\xi_4=3.50$ ,  $A_1=1.100$ .

Вспомогательная матрица  $H(u)$  имеет положительный полюс  $t_1=0.4995$ . Элементы  $H_{11}(u)$  и  $H_{22}(u)$  вещественных нулей не имеют, у элемента  $H_{12}(u)$  на положительной полуоси один нуль  $z_1=0.7043$ .

При аппроксимации элементов матрицы  $H(u)$  с помощью полиномов четвертой степени погрешность аппроксимации  $H_{11}(u)$  не превышает 8%,  $H_{22}(u)$  — 2% и  $H_{12}(u)$  — 11%. При этом  $\eta_1=0.05$ ,  $\eta_2=1.20$ . В результате получаем диагональную матрицу  $W(u)$ , диагональные элементы которой — единица и полином  $w(u)$ , причем

$$w(u) = \prod_{k=1}^6 (u^2 - \alpha_k^2)$$

$$\alpha_1=0.075, \alpha_2=0.445i, \alpha_3=0.146 + 0.073i$$

$$\alpha_4=0.146 - 0.073i, \alpha_5=1.208i, \alpha_6=1.447i$$

Полиномиальные матрицы  $X(u)$  и  $Y(u)$  имеют определители, равные единице. Элементы  $X_{mn}$  имеют вид

$$\begin{aligned} X_{11} &= u^6 + 1.67 u^4 + 2.38 \cdot 10^{-2} u^2 + 0.719 \cdot 10^{-4} \\ 10^{-5} X_{12} &= 0.613 i u^5 - 0.137 u^4 + 1.02 i u^3 - 0.230 u^2 + 0.0152 i u - 0.00548 \\ X_{21} &= -0.186 i u^5 + 0.313 u^4 + 0.0804 i u^3 - 0.158 u^2 + 0.00582 i u + 0.00159 \\ 10^{-5} X_{22} &= 0.114 u^4 + 0.217 i u^3 - 0.0919 u^2 - 0.108 i u + 0.0176 \end{aligned}$$

Матрица  $Y(u)$  имеет элементы

$$\begin{aligned} Y_{11} &= Y_{22} = 1, \quad Y_{21} = 0 \\ 10^{-5} Y_{12} &= -0.613 i u^{11} - 0.0711 u^{10} - 2.80 i u^9 + 0.167 u^8 - 3.32 i u^7 + 0.637 u^6 - \\ & - 0.350 i u^5 + 0.0833 u^4 + 0.0106 i u^3 - 0.00196 u^2 - 0.300 \cdot 10^{-3} i u + 0.375 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

Поступила 13 XII 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Моссаковский В. И., Мицишин И. И. Качение упругих тел. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5
2. Моссаковский В. И., Бискуп А. Г. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления. Докл. АН СССР, 1972, т. 206, № 5.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1972.
4. Бабешко В. А. К теории динамических контактных задач. Докл. АН СССР, 1971, т. 201, № 3.
5. Бабешко В. А. О единственности решений интегральных уравнений динамических контактных задач. Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 6.
6. Бабешко В. А. Об условиях излучения для упругого слоя. Докл. АН СССР, 1973, т. 213, № 3.
7. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., «Наука», 1974.
8. Grothendieck A. La théorie de Fredholm. Bull. Soc. math. France, 1956, t. 84, № 4.
9. Бабешко В. А. Новый эффективный метод решения динамических контактных задач. Докл. АН СССР, 1974, т. 217, № 4.
10. Гохберг И. Ц., Фельдман И. А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М., «Наука», 1971.
11. Бабешко В. А. О системах интегральных уравнений динамических контактных задач. Докл. АН СССР, 1975, т. 220, № 6.
12. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1976.