Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 539.3

ИЗГИБ СИСТЕМЫ ПОЛОСОВЫХ ПЛАСТИН, ЛЕЖАЩИХ НА УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

В. С. Проценко

(Харьков)

Предлагается метод решения задачи о контакте с упругим полупространством конечной системы бесконечных полосовых пластин различной ширины. Трением в области контакта пренебрегается. Задача сводится к совокупности бесконечных систем алгебраических уравнений, которые можно решать методом редукции.

1. Система из m полосовых пластин расположена на упругом однородном полупространстве параллельно оси y. Задача сводится к решению системы уравнений

$$\frac{1-\nu^2}{\pi E}\sum_{i=1}^{m}\iint\limits_{\partial\Omega_i}\frac{r(\zeta,\eta)\,d\zeta\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}=w_i(x,y) \tag{1.1}$$

$$D_i\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 w_i(x,y)=g_i(x,y)-r_i(x,y)\;((x,y)\in\partial\Omega_i,\; i=1,2,\ldots,m)$$

Здесь $\partial\Omega_i$ — область контакта i-й пластины с полупространством, D_i — жесткость пластины, w_i, g_i, r_i — прогиб, нагрузка и реакция основания соответственно.

Полагаем, что края пластин свободны, а функции g_i, w_i, r_i представимы интегралом Фурье (λ — параметр преобразования)

$$\mathbf{a}_i(x,\lambda)=F^{-1}[\mathbf{b}_i(x,\lambda)],\quad \mathbf{b}_i(x,\lambda)=F[\mathbf{a}_i(x,y)] \tag{1.2}$$
$$\mathbf{a}_i=\{g_i, w_i, r_i\},\quad \mathbf{b}_i=\{\bar g_i, \bar w_i, \bar r_i\}$$

С учетом (1.2) из системы (1.1) найдем

$$\frac{1-\nu^2}{\pi E}\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{L_i}\bar r_i(\xi,\lambda)K_0(\lambda|x-\xi|)\,d\xi=\bar w_i(x,\lambda) \tag{1.3}$$

$$D_i\left(\frac{d^2}{dx^2}-\lambda^2\right)^2\bar w_i(x,\lambda)-\bar g_i(x,\lambda)+\bar r_i(x,\lambda)=0 \tag{1.4}$$
$$(x\in L_i=[c_i,d_i],\; i=1,2,\ldots,m)$$

Известно [1], что решение уравнения (1.3) сводится к решению краевой задачи

$$\Delta\varphi-\lambda^2\varphi=0 \tag{1.5}$$
$$\varphi(x,\lambda,0)=\bar w_i(x,\lambda),\quad x\in L_i;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=0}=0\; x\,\overline{\in}\, L_i$$

для исчезающего на бесконечности потенциала

$$\varphi(x, \lambda, z) = \sum_{i=1}^{m} \int_{L_i} \bar{r}_i(\xi, \lambda)\, K_0\left(\lambda \sqrt{(x-\xi)^2 + z^2}\right) d\xi$$

Решив краевую задачу (1.5) функцию $\bar{r}_i\,(x, \lambda)$ находим по формуле

$$\bar{r}_i(x, \lambda) = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_{z=0}, \quad x \in L_i \ (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Введем локальные декартовые координаты $\bar{x}_i$, o_i, $\bar{z}_j$, поместив их начала в середину отрезков $L_i\ (i = 1, 2, \ldots, m)$, и сделаем замену $\bar{x}_i = a_i x_i$, $\bar{z}_i = a_i z_i$, где $2a_i$ — ширина отрезка L_i. Перейдя в каждой локальной системе координат x_i, o_i, z_i к координатам эллиптического цилиндра по формулам

$$x_i = \operatorname{ch} \xi_i \cos \eta_i, \quad z_i = \operatorname{sh} \xi_i \sin \eta_i$$
$$(0 \leqslant \eta_i \leqslant 2\pi, \ 0 \leqslant \xi_i < \infty)$$

согласно работе [1] найдем

$$\bar{r}_i(x_i, \lambda) = \frac{E\,(a_i^2 - x_i^2)^{-\frac{1}{2}}}{2(1-\nu^2)} \sum_{n=0}^{\infty} r_n^{(i)}\, \mathrm{Fek}_n'(0, -q_i)\, \mathrm{ce}_n(\eta_i, -q_i) \tag{1.6}$$

Коэффициенты $r_n^{(i)}$ определяются из совокупности бесконечных систем

$$r_k^{(i)} + \sum_{s \neq i}^{m} \sum_{n=0}^{\infty} r_n^{(s)} T_n^{(k)}(s, i) = \frac{\gamma_k^{(i)}}{\mathrm{Fek}_k(0, -q_i)}$$
$$T_n^{(k)}(s, i) = \frac{Q_k^{(n)}(s, i)\, \mathrm{Ce}_k(0, -q_s)}{\mathrm{Fek}_k(0, -q_i)} \tag{1.7}$$

где $\gamma_k^{(i)}$ — коэффициенты разложения функций $\bar{w}_i$ в ряды по функциям Матье на L_i

$$\bar{w}_i(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^{(i)}\, \mathrm{ce}_n(\eta_i, -q_i) \tag{1.8}$$

2. Уравнение (1.4) в безразмерных локальных координатах $x_i z_i$ принимает вид

$$D_i^* \left(\frac{d^2}{dx_i^2} - \lambda_i^2\right)^2 \bar{w}_i(x_i, \lambda) - \bar{g}_i(x_i, \lambda) + \bar{r}_i(x_i, \lambda) = 0 \tag{2.1}$$
$$(|x_i| \leqslant 1, \quad D_i^* = D_i / a_i^4, \quad \lambda_i = \lambda a_i)$$

Пусть $G\,(x, \xi)$ — функция Грина краевой задачи

$$(d^2/dx^2 - \lambda^2)^2\, y = 0, \quad y\,(\pm 1) = y''\,(\pm 1) = 0 \tag{2.2}$$

Тогда решение уравнения (2.1) при условиях (2.2) можно записать в виде интеграла

$$\bar{w}_i(x_i, \lambda) = D_i^{*-1} \int_{-1}^{1} G_i(x_i, \xi)\, [\bar{g}_i(\xi, \lambda) - \bar{r}_i(\xi, \lambda)]\, d\xi \tag{2.3}$$

если временно считать функцию $\bar{r}_i\,(x_i, \lambda)$ известной.

Функция $\overline{w}_i(x_i, \lambda)$ должна удовлетворять краевым условиям (края свободны)

$$\frac{d^2\overline{w}_i}{dx_i^2} - \nu_0^{(i)}\lambda_i^2\overline{w}_i = \frac{d^3\overline{w}_i}{dx_i^3} - \lambda_i^2(2-\nu_0^{(i)})\frac{d\overline{w}_i}{dx_i} = 0, \quad x_i = \pm 1 \tag{2.4}$$

($\nu_0^{(i)}$ — коэффициент Пуассона пластинки).

Эти условия легко можно реализовать, если к решению, определенному формулой (2.3) и удовлетворяющему условиям (2.2), прибавить общее решение однородного уравнения (2.2) и затем потребовать выполнения четырех условий (2.4). В связи с этим в дальнейшем будем рассматривать краевые условия для функции $\overline{w}_i(x_i, \lambda)$ в виде (2.2).

Пользуясь соотношениями (1.6), (1.8), из (2.3) найдем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n^{(i)}\operatorname{ce}_n(\eta_i, -q_i) = -k_0^{(i)}\int_{-1}^{1}G_i(\xi, x_i)\times \tag{2.5}$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty} r_n^{(i)}\operatorname{Fek}_n'(0, -q_i)\frac{\operatorname{ce}_n(t, -q_i)}{|\sin t|}\,d\xi + f_i(\eta_i)$$

$$(\xi = \cos t, \ x_i = \cos\eta_i)$$

$$k_0^{(i)} = E\,[D_i^*(1-\nu^2)2a_i]^{-1}, \quad f_i(\eta_i) = D_i^{*-1}\int_{-1}^{1}G_i(\xi, x_i)\,g_i(\xi, \lambda)\,d\xi \tag{2.6}$$

После умножения равенства (2.5) на $\operatorname{ce}_k(\eta_i, -q_i)$ и последующего интегрирования по промежутку $(0, \pi)$ получим

$$\pi_k\gamma_k^{(i)} + \sum_{n=0}^{\infty} R_n^{(i)}K_n^{(k)}(i) = \alpha_k^{(i)} \tag{2.7}$$

$$(\pi_0 = \pi, \ \pi_k = {}^1/_2\pi, \ k \geqslant 1, \ R_n^{(i)} = r_n^{(i)}\operatorname{Fek}_n(0, -q_i))$$

В системе (2.7) матричные коэффициенты и свободные члены определяются формулами

$$K_n^{(k)}(i) = k_0^{(i)}\frac{\operatorname{Fek}_n'(0, -q_i)}{\operatorname{Fek}_n(0, -q_i)}\int_0^{\pi}\operatorname{ce}_k(\eta, -q_i)\,d\eta\times \tag{2.8}$$

$$\times\int_{-1}^{1}G_i(\xi, x)\frac{\operatorname{ce}_n(t, -q_i)}{|\sin t|}\,d\xi$$

$$\alpha_k^{(i)} = D_i^{*-1}\int_0^{\pi}\operatorname{ce}_k(\eta, -q_i)\,d\eta\int_{-1}^{1}G_i(\xi, x)\,\overline{g}_i(\xi, \lambda)\,d\xi \tag{2.9}$$

Совокупность систем (1.7), (2.7) преобразуем к системе

$$R_k^{(i)} + \sum_{s\neq i}^{m}\sum_{n=0}^{\infty}R_n^{(s)}T_n^{*(k)}(s, i) + \sum_{n=0}^{\infty}R_n^{(i)}K_n^{(k)}(i) = \alpha_k^{(i)}, \tag{2.10}$$

$$T_n^{*(k)}(s, i) = \frac{Q_k^{(n)}(s, i)\operatorname{Ce}_k(0, -q_s)}{\operatorname{Fek}_n(0, -q_s)}$$

Итак, задача сведена к решению совокупности m бесконечных систем линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $R_n^{(i)}$.

3. Для исследования свойств системы (2.10) приведем необходимые вспомогательные формулы из теории функций Матье. Из результатов работы [2] следует, что

$$Q_k^{(n)}(s,i) \sim C^{(n)}(i)[C^{(k)}(s)]^{-1} K_{k+n}(\lambda R_{si}) \quad (n,k\to\infty)$$

$$C^{(2n)}(i) = A_0^{(2n)}(q_i), \quad C^{(2n+1)}(i) = B_1^{(2n+1)}(q_i)\frac{1}{2n+1}$$

Здесь $K_n(t)$ — функция Макдональда, R_{si} — расстояние между центрами декартовых координат с номерами s и i. С учетом асимптотических формул [3] для коэффициентов $A_0^{(2n)}$), $B_1^{(2n+1)}$ и функции $K_n(t)$ находим

$$T_n^{*(k)}(s,i) \sim \mathrm{const}_1\left(\frac{a_i}{R_{si}}\right)^k\left(\frac{a_s}{R_{si}}\right)^n\frac{(n+k)!}{n!k!} \tag{3.1}$$

Свойства матрицы $(K_n^{(k)})$ и свободных членов зависят от свойств функции Грина $G_i(\xi, x)$. Последнюю представим в виде абсолютно и равномерно сходящегося билинейного разложения [4] по собственным функциям краевой задачи

$$(d^2/dx^2 - \lambda^2)^2 y - \mu y = 0, \quad y(\pm 1) = y''(\pm 1) = 0$$

Указанное разложение имеет вид

$$G(\xi,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin p_{2k}x \sin p_{2k}\xi}{\mu_{2k}} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos p_{2k+1}x\cos p_{2k+1}\xi}{\mu_{2k+1}} \tag{3.2}$$

$$\mu_k = (p_k^2 + \lambda^2)^2, \quad p_k = {}^1/_2\pi k$$

В работе [4] функция (3.2) представлена в виде двойного правильно сходящегося ряда по полиномам Чебышева

$$G(\xi,x) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}T_i(x)T_j(\xi) \tag{3.3}$$

коэффициенты которого определяем по формулам

$$a_{2m,2n} = \lambda_{2m,2n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_{2k+1}}J_{2m}(p_{2k+1})J_{2n}(p_{2k+1})$$

$$a_{2m+1,2n+1} = \frac{1}{4}(-1)^{m+n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_{2k}}J_{2m+1}(p_{2k})J_{2n+1}(p_{2k})$$

$$\lambda_{0,0} = {}^1/_4, \quad \lambda_{2n,0} = {}^1/_2(-1)^n, \quad \lambda_{2m,2n} = {}^1/_4(-1)^{m+n}$$

Там же доказано, что имеет место неравенство

$$|a_{m,n}| \leqslant \frac{\mathrm{const}_2}{mn\max(n,m)} \quad (m\geqslant 2, n\geqslant 2)$$

из которого следует неравенство

$$|a_{m,n}| \leqslant \frac{\mathrm{const}_3}{mn(m+n)} \quad (m\geqslant 2, n\geqslant 2) \tag{3.4}$$

Подстановка ряда (3.3) в формулу (2.8) приводит после вычисления соответствующих интегралов к выражению

$$K_n^{(k)}(i) = k_0^{(i)}\frac{\mathrm{Fek}_n'(0,-q_i)}{\mathrm{Fek}_n(0,-q_i)}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\pi_m\pi_j C_m^{(k)}(i)\,C_j^{(n)}(i)\,a_{mj} \tag{3.5}$$

$$C_{2r}^{(2n)}(i) = (-1)^{r+n}A_{2r}^{(2n)}(q_i), \quad C_{2r+1}^{(2n+1)}(i) = (-1)^{r+n}B_{2r+1}^{(2n+1)}(q_i)$$

Из формулы (3.5) следует, что при больших значениях индексов n и k

$$K_n^{(k)}(i) \sim \frac{\mathrm{const}_4}{nk(n+k)} \frac{\mathrm{Fek}_n'(0, -q_i)}{\mathrm{Fek}_n(0, -q_i)} \sim \frac{\mathrm{const}_5}{k(n+k)} \tag{3.6}$$

Асимптотические формулы (3.1), (3.6) гарантируют сходимость рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |K_n^{(k)}(i)|^2, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |T_n^{*(k)}(s, i)|^2$$

Следовательно, система (2.10) порождает в l^2 вполне непрерывный оператор [5]. Формулы для свободных членов (2.9) и учетом разложения (3.3) можно записать в виде

$$\alpha_{2k}^{(i)} = \pi D_i^{*-1}(-1)^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m^{(i)}}{\mu_{2m+1}} \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2k)} J_{2r}\left(\pi m + \frac{\pi}{2}\right) \tag{3.7}$$

$$\alpha_{2k+1}^{(i)} = \pi D_i^{*-1}(-1)^k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m^{(i)}}{\mu_{2m}} \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2k+1)} J_{2r+1}(m\pi)$$

$$b_m^{(i)} = \int_{-1}^{1} \bar{g}_i(\xi, \lambda) \sin(m\pi\xi)\, d\xi$$

$$a_m^{(i)} = \int_{-1}^{1} \bar{g}_i(\xi, \lambda) \cos\frac{\pi}{2}(2m+1)\,\xi d\xi \quad (m \geqslant 0)$$

Из формул (3.7) следует, что даже в случае сосредоточенной нагрузки на пластину коэффициенты $\alpha_k^{(i)} = O(k^{-2})$ при $k \to \infty$.

Бесконечную систему (2.10) с вполне непрерывным в l^2 оператором и свободными членами $\alpha_k^{(i)} \in l^2$ можно решать методом редукции. Решение такой системы, также принадлежащее l^2, можно получить с желаемой точностью.

Более строгий анализ систем (2.7), (2.10) позволяет заключить, что коэффициенты $R_k^{(i)}$, $\gamma_k^{(i)}$ имеют порядок не выше k^{-2} при $k \to \infty$. Таким образом, ряд для $\overline{w}_i$ всегда сходится равномерно и абсолютно и представляет собой непрерывную функцию.

Поступила 6 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Проценко В. С., Проценко В. Г.* Контактна задача з декількома штампами. Доп. АН УССР. Сер. А, 1972, № 10.
2. *Проценко В. С., Проценко В. Г.* Про один випадок теореми додавання функцій Матье. Доп. АН УССР. Сер. А, 1972, № 9.
3. *Мак-Лахлан Н. В.* Теория и приложения функций Матье. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
4. *Проценко В. С., Рвачев В. Л.* Пластина, имеющая форму бесконечной полосы, на упругом полупространстве. ПММ, 1976, т. 40, вып. 2.
5. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.— Л., Физматгиз, 1962.