

**РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ  
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЫ  
С НЕСКОЛЬКИМИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМИ РАЗРЕЗАМИ**

**В. Н. Чигарев**

(Киев)

Для решения первой основной задачи теории упругости применено конформное отображение, не принадлежащее классу рациональных, что позволяет найти распределение напряжений в полосе с разным числом полубесконечных разрезов. В основе метода — использование зависимости между граничными значениями отображающей функции, в общем случае различными при приближении к действительной оси из верхней и нижней полуплоскости. Полученное решение удовлетворяет граничному условию задачи, чем проверяется правильность решения.

Область  $D$  между прямыми, ограничивающими полосу, и берегами разрезов (фиг. 1) можно рассматривать как конформное преобразование верхней полуплоскости плоскости  $\zeta = \sigma + i\eta$  на плоскость  $z = x + iy$  посредством функции

$$(1) \quad z = c \ln \prod_{k=1}^n (a_k^2 - \zeta^2), \quad a_{k+1} > a_k$$

где  $c > 0$ ,  $a_k > 0$  — заданные постоянные.

Действительно, на интервале  $(-\infty, -a_n)$  оси  $\sigma$

$$x = c \ln \prod_{k=1}^n (\sigma^2 - a_k^2), \quad y = n\pi c$$

так как

$$\operatorname{Im} z = \sum_{k=1}^n \arg(a_k + \sigma)$$

При переходе точки  $\zeta = \sigma$  через точку  $-a_n$  вектор  $a_n + \zeta$  с началом в точке  $-a_n$  совершает поворот на угол  $-\pi$ . Поэтому на интервале  $(-a_n, a_{n+1})$ , где  $a_{n-1} < |\sigma| < a_n$

$$(2) \quad x = c \ln (a_n^2 - \sigma^2) \prod_{k=1}^{n-1} (\sigma^2 - a_k^2), \quad y = (n-1)\pi c$$

причем  $-\infty < x < x_{n-1}$ , а  $x_{n-1}$  равно наибольшему значению функции  $x = x(\sigma)$ , определяемой формулой (2) на интервале  $(-a_n, -a_{n-1})$ . Таким образом, интервал  $(-a_n, -a_{n-1})$  оси  $\sigma$  преобразуется в разрез в полосе, проходящий по прямой  $y = c(n-1)\pi$  из бесконечности до точки с абсциссой  $x = x_{n-1}$ . Совершенно аналогично можно показать, что интервал  $(-a_{n-1}, -a_{n-2})$  той же оси посредством функции (1) преобразуется в разрез,

проходящий по прямой  $y=c(n-2)\pi$ , причем

$$(3) \quad x = c \ln (a_n^2 - \sigma^2) (a_{n-1}^2 - \sigma^2) \prod_{i=1}^{n-3} (\sigma^2 - a_i^2)$$

и  $-\infty < x < x_{n-2}$ , где  $x_{n-2}$  равно наибольшему значению  $x = x(\sigma)$ , определяемому формулой (3).

Подобным образом устанавливается, что вообще каждый из интервалов  $(-a_n, -a_{n-1}), \dots, (-a_1, a_1), \dots, (a_{n-1}, a_n)$  оси  $\sigma$  преобразуется в разрез по одной из параллельных оси  $x$  прямых, проходящий из бесконечности до одной из точек с абсциссами  $x_{n-1}, \dots, x_1$ . При этом интервал  $(-a_1, a_1)$  преобразуется в разрез по самой оси  $x$ , доходящий до точки  $z=x_1$ , где согласно (1)  $x_1=2c \ln a_1 a_2 \dots a_n$  как образ точки  $\zeta=0$ . Абсциссы  $x_{n-3}, \dots, x_2$  окончаний остальных разрезов находятся из условия, что каждая из них является наибольшим значением функции  $x = x(\sigma)$ , определяющей действительную часть  $z$  на соответствующем интервале оси  $\sigma$ . Мнимая часть  $z$ , определяющая уравнение прямой, по которой проходит разрез равна

$$y = \sum_{k=1}^n \arg (a_k^2 - \sigma^2)$$

При прохождении точкой  $\zeta$  каждой из точек  $-a_n, \dots, a_n$  величина  $y$  убывает на  $\pi$ , принимая значения  $y = \pi c l$ ,  $l = 0, \pm 1, \dots, \pm (n-1)$  (фиг. 1 соответствует  $n=2$ ). Таким образом, вся действительная ось  $\sigma$  посредством (1) переводится в две бесконечные прямые и систему полубесконечных разрезов. Окончания этих разрезов располагаются попарно-симметрично относительно оси  $\sigma$ . При этом точки верхней полуплоскости однозначно и конформно преобразуются во внутренние точки полосы. Так, например, точки оси  $\eta$  преобразуются в точки

$$z = c \ln \prod_{i=1}^n (a_i^2 + \eta^2)$$

действительной оси  $ox$ , лежащие правее точки  $x=x_1$ . Отображение, обратное к (1), неоднозначно. Однако с помощью некоторых неравенств [1, 2] можно выделить из многозначного результата обращения функции (1) ту ветвь, которая будет однозначна внутри области  $D$ . С помощью такой ветви и функции (1) верхняя полуплоскость и полоса отображаются одна в другую взаимно однозначно и конформно.

Переходя к решению первой основной задачи с помощью преобразования (1), рассмотрим сначала случай полосы с одним полубесконечным разрезом (фиг. 2). Тогда (1) принимает вид

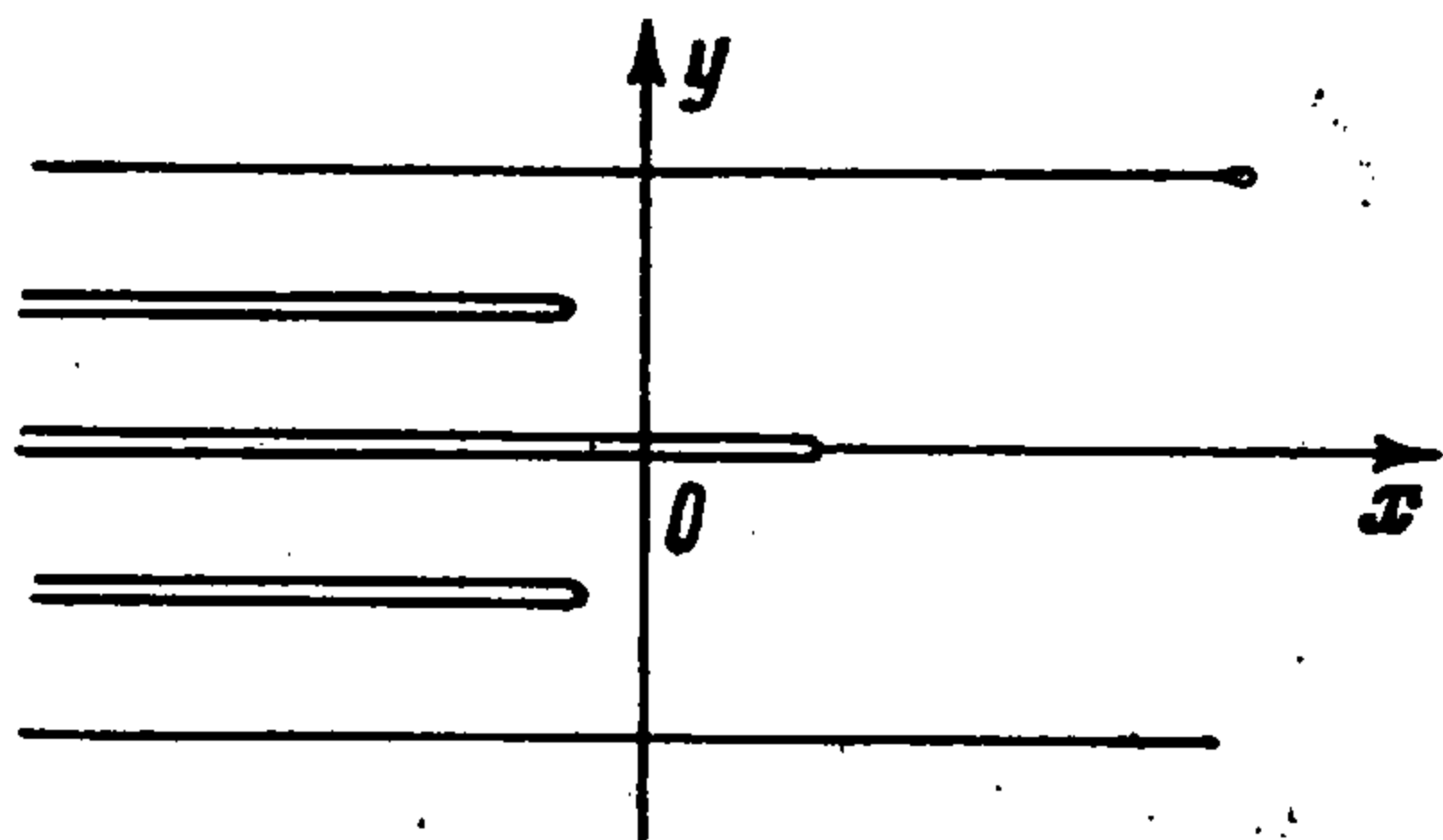
$$(4) \quad z = c \ln (a^2 - \zeta^2)$$

В известной монографии [3] дан метод решения основных задач теории упругости для областей, отображаемых на полуплоскость при помощи рациональных функций. Покажем, что использование преобразований вида (1) при разных значениях  $n$  и в частном случае (4), когда  $n=1$ , не принадлежащих к классу рациональных, позволяет получить решение указанной задачи для полосы соответственно с несколькими или одним разрезом. Верность найденного решения проверяется тем, что оно удовлетворяет как граничному условию, так и условиям разрешимости задачи. Однако при этом возникает ряд специфических особенностей, значительно осложняющих отыскание решения, по сравнению с применением рациональных отображений.

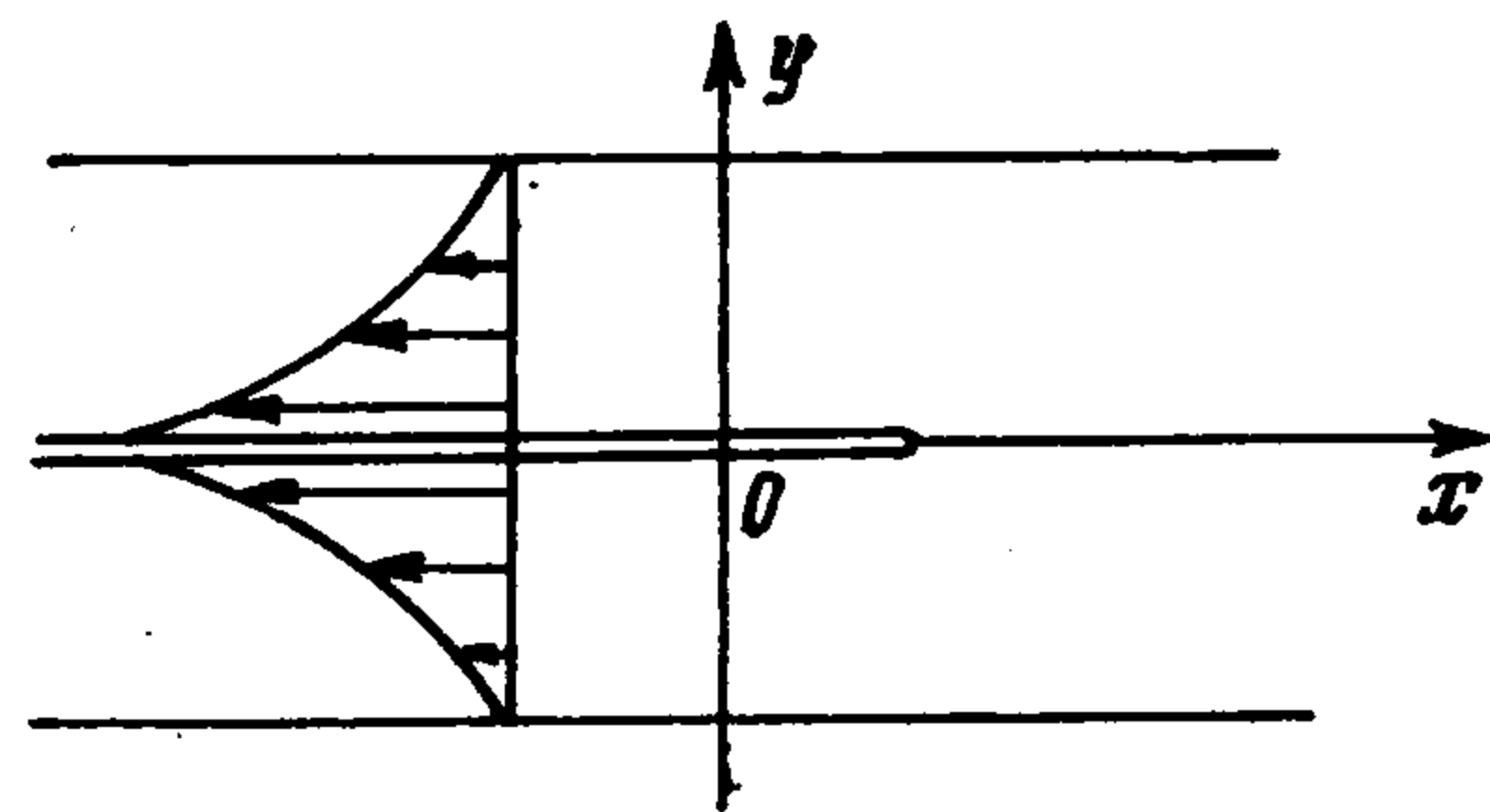
Известно [3-5], что решение первой основной задачи для области, отображаемой на верхнюю полуплоскость посредством функции  $z = \omega(\zeta)$ , сводится к определению двух голоморфных в верхней полуплоскости функций  $\Phi(\zeta)$  и  $\Psi(\zeta)$  из граничного условия (см. [2], § 92)

$$(5) \quad \Phi(\sigma) + \overline{\Phi(\sigma)} + \frac{1}{\omega'(\sigma)} \{ \overline{\omega(\sigma)} \Phi'(\sigma) + \omega'(\sigma) \Psi(\sigma) \} = N + iT$$

Здесь  $\sigma$  — точка действительной оси плоскости  $\zeta = \sigma + i\eta$ , а  $N$  и  $T$  — нормальное и касательное напряжения, заданные на краях полосы и краях разрезов как функции криволинейных координат, введенных отображением (4).



Фиг. 1



Фиг. 2

В отличие от рациональных конформных отображений правая часть (4) принимает, вообще, разные значения на действительной оси  $\sigma$  в зависимости от того, из верхней или нижней полуплоскости точка  $\zeta$  стремится к  $\sigma$ . Действительно, если  $\zeta \rightarrow \sigma < -a$ , оставаясь в верхней полуплоскости, то  $z = c \ln |a^2 - \sigma^2| + i\pi c$ ; при этом  $\bar{\zeta} \rightarrow \sigma < -a$ , оставаясь в нижней полуплоскости, и  $z = c \ln |a^2 - \sigma^2| - i\pi c$ . Аналогично отображаются другие интервалы оси  $\sigma$  посредством (4).

Вследствие этого ось  $\sigma$  как совокупность предельных точек, удовлетворяющих условию  $\text{Im } \zeta < 0$ ,  $\zeta \rightarrow \sigma$ , посредством (4) преобразуется в граничные прямые полосы, определяемые формулами

$$(6) \quad z = \omega(\sigma) = c [\ln |\sigma^2 - a^2| + i\pi A_0], \quad A_0 = \begin{cases} 1, & -\infty < \sigma < -a \\ 0, & -a < \sigma < a \\ -1, & a < \sigma < \infty \end{cases}$$

Эта же ось как совокупность предельных точек, соответствующих условию  $\text{Im } \bar{\zeta} < 0$ ,  $\bar{\zeta} \rightarrow \sigma$ , посредством (4) преобразуется в граничные прямые полосы, определяемые формулами

$$(7) \quad z^* = \omega^*(\sigma) = c [\ln |\sigma^2 - a^2| - i\pi A_0] = \overline{\omega(\sigma)}$$

Из (6) и (7) следует, что верхняя и нижняя полуплоскости посредством (4) преобразуются на две полосы с разрезами, причем одна из полос является отображением другой в действительной оси  $x$ . Внося в (5)  $\omega'(\sigma) = -2c, \sigma/(a^2 - \sigma^2)$ , граничное условие задачи можно записать в виде

$$(8) \quad \sigma \Phi(\sigma) + \sigma \overline{\Phi(\sigma)} - \frac{1}{2c} \omega^*(\sigma) (a^2 - \sigma^2) \Phi'(\sigma) + \sigma \Psi(\sigma) = F \\ F = \sigma(N + iT)$$

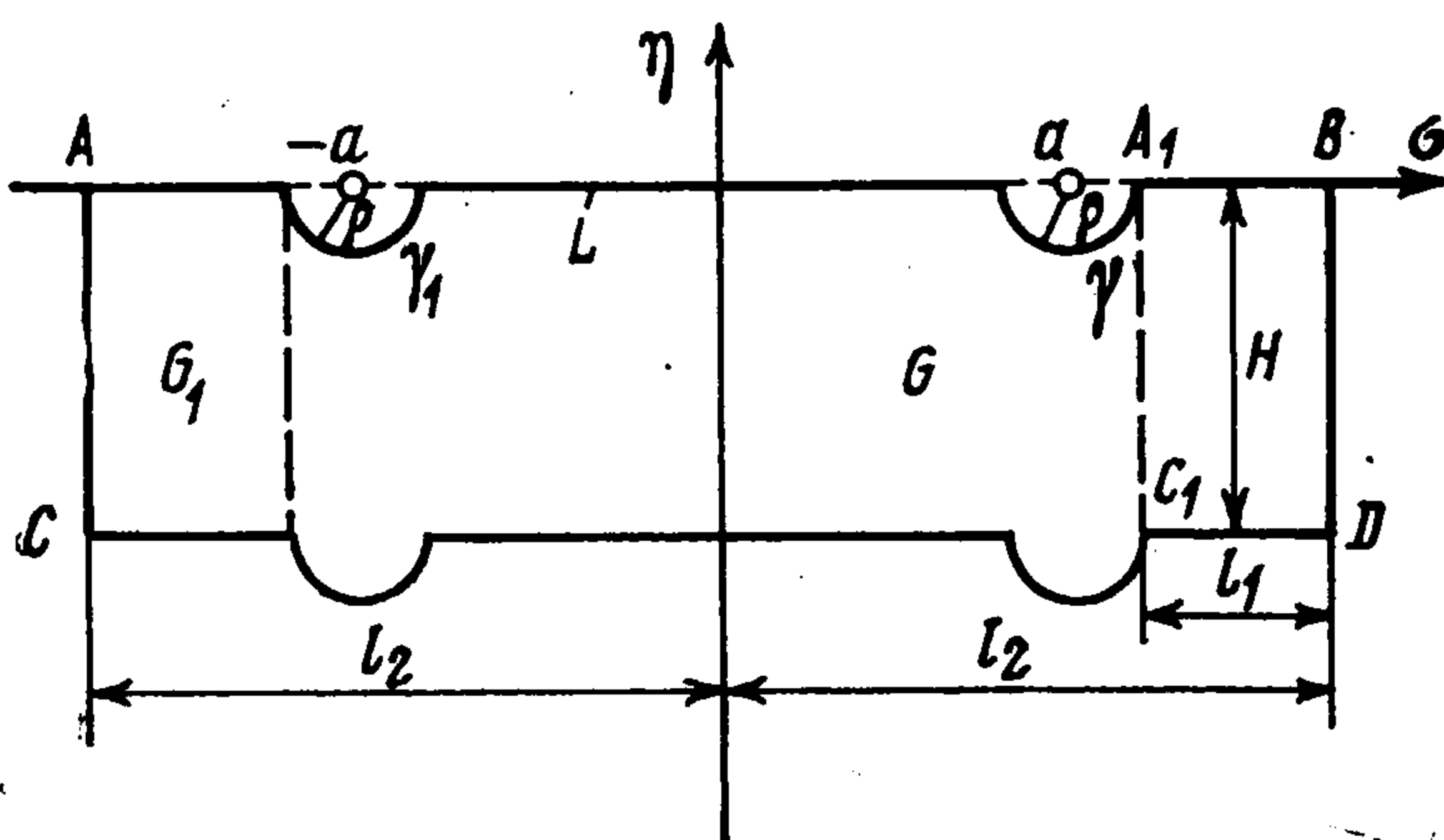
или, переходя в (8) к сопряженным значениям, — в виде

$$(9) \quad \sigma \Phi(\sigma) + \sigma \overline{\Phi(\sigma)} - \frac{1}{2c} \omega(\sigma) (a^2 - \sigma^2) \overline{\Phi'(\sigma)} + \sigma \overline{\Psi(\sigma)} = \overline{F}$$

Выражая условие, что функция  $\sigma\Phi'(\sigma)$ , определяемая равенством (8), есть граничное значение функции  $\zeta\Phi'(\zeta)$ , голоморфной в верхней полуплоскости и исчезающей на бесконечности, получаем, применяя формулу (21) § 76 [3]

$$(10) \quad \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{F} d\sigma}{\sigma - \zeta} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma\Phi(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma\bar{\Phi}(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma + \right. \\ \left. + \frac{1}{2c} \frac{\omega(\sigma)(a^2 - \sigma^2)\bar{\Phi}'(\sigma) d\sigma}{\sigma - \zeta} \right] = 0$$

где  $\zeta$  — точка в верхней полуплоскости. Так как  $\sigma\Phi(\sigma)$  ( $\sigma\bar{\Phi}(\sigma)$ ) — граничное значение функции  $\zeta\Phi(\zeta)$  (соответственно функции  $\bar{\zeta}\bar{\Phi}(\zeta)$ ), голо-



Фиг. 3

морфной в верхней (нижней) полуплоскости и исчезающей на бесконечности, то второй интеграл равен  $\zeta\Phi(\zeta)$ , а третий нулю. Для вычисления четвертого интеграла необходимо привести сомножители в подынтегральном выражении к общей области определения. Для этого достаточно воспользоваться выражением  $\omega(\sigma)$  через  $\omega^*(\sigma)$ , следующим из формул (6) и (7)

$$(7) \quad \omega(\sigma) = \omega(\sigma) + i2\pi c A_0.$$

После этого четвертый интеграл формулы (4) можно записать в виде

$$(11) \quad \frac{1}{4\pi c i} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\sigma) \chi(\sigma) d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \left[ \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\omega}(\sigma) \chi(\sigma) d\sigma + \pi i \int_{-\infty}^{-a} \chi(\sigma) d\sigma - \right. \\ \left. - \pi i \int_a^{\infty} \chi(\sigma) d\sigma \right] \\ \chi(\sigma) = \frac{(a^2 - \sigma^2) \Phi'(\sigma)}{\sigma - \zeta}$$

Покажем, что каждый из интегралов правой части (11) равен нулю.

Действительно, замечая, что подынтегральная функция первого интеграла имеет точки разрыва при  $\sigma = \pm a$ , заменим прямую интегрирования линией  $L$ , состоящей из отрезков оси  $\sigma$  и полуокружностей малого радиуса  $\rho$ , описанных из точек  $a$  и  $-a$  (фиг. 3). Тогда подынтегральная функция как функция переменной точки  $\sigma$  нижней полуплоскости голоморфна в области, лежащей ниже линии  $L$ . Построив криволинейный прямоугольник  $ABDC$  с двумя конгруэнтными сторонами  $H$  и  $2l_2$ , как показано на фиг. 3, ограничивающий область  $G$ , имеем при всяких конечных значениях  $H$  и  $l_2$

$$\int_R \omega(\sigma) \chi(\sigma) d\sigma = 2\pi i \sum \text{res}(\zeta) = 0$$

где  $R$  — контур области  $G$ . Полученное значение интеграла не зависит от величины периметра  $R$ , следовательно

$$\int_L \omega(\sigma) \chi(\sigma) d\sigma = \lim \int_R \omega(\sigma) \chi(\sigma) d\sigma = 0 \quad \text{при } H \rightarrow 0, \quad l_2 \rightarrow \infty$$

Из аналогичных вычислений по контуру фигуры  $A_1 BDC_1$  убеждаемся в равенстве нулю второго, а также третьего интегралов правой части (11) соответственно по промежуткам  $(-\infty, -(a+\rho))$ ,  $((a+\rho), \infty)$ .

Покажем теперь, что при  $\rho \rightarrow 0$  величины рассмотренных интегралов также остаются равными нулю. Для первого из них на дуге  $\gamma$  окружности радиуса  $\rho$  (фиг. 3) имеем

$$\left| \int_{\gamma} \frac{(a^2 - \bar{\zeta}^2) c \ln(a^2 - \bar{\zeta}^2) \bar{\Phi}'(\bar{\zeta})}{\bar{\zeta} - \zeta} d\bar{\zeta} \right| \leq 2\pi c \rho |\ln \rho (2a + \rho)| \rho (2a + \rho) |\bar{\Phi}'(\bar{\zeta})| \frac{1}{m}$$

где  $m$  — коэффициент пропорциональности между  $\rho$  и  $|\bar{\zeta} - \zeta|$ , так как  $|\bar{\zeta} - \zeta| = m\rho$ ,  $0 < \rho < 2$  (фиг. 3). При этом использовано, что  $|a^2 - \bar{\zeta}^2| = |a - \bar{\zeta}| |a + \bar{\zeta}| \leq \rho(2a + \rho)$ . Так как

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 |\ln \rho (2a + \rho)| = - \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{(a + \rho) \rho^2}{(2a + \rho)} = 0$$

а  $\Phi(\bar{\zeta})$  — ограниченная функция, то правая часть оценки интеграла при  $\rho \rightarrow 0$  обращается в нуль. Отсюда следует, что равен нулю интеграл по дуге  $\gamma$  при  $\rho \rightarrow 0$ , а значит, при выпрямлении линии  $L$  в прямую  $O\sigma$  интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(\sigma) \chi(\sigma) d\sigma = 0$$

Аналогично устанавливается равенство нулю двух других интегралов при  $\rho \rightarrow 0$ .

Таким образом, из условия (10) окончательно получаем

$$(12) \quad \Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i \zeta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{F} d\sigma}{\sigma - \zeta}$$

После этого функция  $\zeta \Psi(\zeta)$  определяется по своему граничному значению из формулы (8)

$$(13) \quad \zeta \Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F d\sigma}{\sigma - \zeta} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma \Phi(\sigma) d\sigma}{\sigma - \zeta} + \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^*(\sigma) (a^2 - \sigma^2)}{\sigma - \zeta} \times \right. \\ \left. \times \Phi'(\sigma) d\sigma - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma \bar{\Phi}(\sigma) d\sigma}{\sigma - \zeta} \right]$$

Для вычисления третьего интеграла правой части (13) выразим  $\omega^*(\sigma)$  через  $\omega(\sigma)$  на основе формул (6), (7). Из них следует

$$(14) \quad \omega^*(\sigma) = \omega(\sigma) - i2\pi c A_0$$

Тогда упомянутый интеграл может быть представлен суммой интегралов

$$(15) \quad \frac{1}{4\pi c i} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^*(\sigma) \chi_1(\sigma) d\sigma = \frac{1}{4\pi c i} \left[ -2\pi c i \int_{-\infty}^{-a} \chi_1(\sigma) d\sigma + \right. \\ \left. + 2\pi c i \int_a^{\infty} \chi_1(\sigma) d\sigma + \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\sigma) \chi_1(\sigma) d\sigma \right] \\ \chi_1(\sigma) = \frac{a^2 - \sigma^2}{\sigma - \zeta} \Phi'(\sigma)$$

Для вычисления первого из интегралов правой части (15) найдем сначала

$$J_1 = \frac{-1}{2} \int_{C_1} \chi_1(\sigma) d\sigma$$

где  $G_1$  — прямоугольная область:  $A \leq \sigma \leq -(a + \rho)$ ,  $-H \leq \eta \leq 0$  (фиг. 3), содержащая точку  $\zeta$ :  $J_1 = \Sigma \operatorname{res}(\zeta) = -\pi i (a^2 - \zeta^2) \Phi'(\zeta)$ . Так как  $J_1$  не зависит от размеров области  $G_1$ , то при  $H, \rho \rightarrow 0$ ,  $A \rightarrow -\infty$  получим

$$-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{-a} \chi(\sigma) d\sigma = -\pi i (a^2 - \zeta^2) \Phi'(\zeta)$$

Аналогично для второго интеграла правой части (15) находим

$$\frac{1}{2} \int_a^{\infty} \chi_1(\sigma) d\sigma = \pi i (a^2 - \zeta^2) \Phi'(\zeta)$$

Результат вычисления этих интегралов можно ввести в формулу (13) в виде одного слагаемого  $\Phi_1(\zeta)$ , положив

$$(16) \quad \Phi_1(\zeta) = -i\pi A_0 (a^2 - \zeta^2) \Phi'(\zeta)$$

Наконец, заметим, что произведение  $(a^2 - \sigma^2) \omega(\sigma) = (a^2 - \sigma^2) c \ln(a^2 - \sigma^2)$  на оси  $\sigma$  имеет устранимый разрыв при  $\sigma = \pm a$ . Поэтому подынтегральная функция интеграла

$$J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2 - \sigma^2}{\sigma - \zeta} \Phi'(\sigma) \ln(a^2 - \sigma^2) d\sigma$$

голоморфна в верхней полуплоскости и исчезает на бесконечности (так как  $\Phi'(\zeta)$  по условию обладает этим свойством), вследствие чего  $J_2 = (a^2 - \zeta^2) \ln(a^2 - \zeta^2) \Phi'(\zeta)$ . Таким образом, согласно (16)

$$(17) \quad \Psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i \zeta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F d\sigma}{\sigma - \zeta} - \Phi(\zeta) + \frac{a^2 - \zeta^2}{2\zeta} \ln(a^2 - \zeta^2) \Phi'(\zeta) + \frac{1}{\zeta} \Phi_1(\zeta)$$

Аналогично определяются функции  $\Phi(\zeta)$  и  $\Psi_1(\zeta)$  для полос с любым числом разрезов в соответствии со значением  $n$  в формуле (1). Так, для полосы с тремя разрезами (фиг. 1) после всех выкладок получим

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i f(\zeta)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{F} d\sigma}{\sigma - \zeta}$$

$$\Psi(\zeta) = \frac{-1}{2\pi i f(\zeta)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F d\sigma}{\sigma - \zeta} + \Phi(\zeta) -$$

$$- \frac{(a_1^2 - \zeta^2)(a_2^2 - \zeta^2)}{2f(\zeta)} \ln[(a_1^2 - \zeta^2)(a_2^2 - \zeta^2)] \Phi'(\zeta) +$$

$$+ \frac{2\pi i (a_1^2 - \zeta^2)(a_2^2 - \zeta^2)}{f(\zeta)} \Phi'(\zeta) A_{12}$$

$$A_{12} = \begin{cases} 1, & -\infty < \sigma < -a_2; \\ 1/2, & -a_2 < \sigma < -a_1; \end{cases} \quad A_{12} = 0, \quad -a_1 < \sigma < a_1;$$

$$A_{12} = \begin{cases} -1/2, & a_1 < \sigma < a_2 \\ -1, & a_2 < \sigma < \infty \end{cases}$$

$y$	$\zeta = \sigma + i\eta$	$\varphi$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\theta$	$X_x - Y_y$
$0^+$	$a/2$	$0$	$\pi$	$0$	$\pi$	$-2p$
$0^-$	$-a/2$	$\pi$	$\pi$	$0$	$\pi$	$-2p$
$\pi$	$1,3a$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$
$-\pi$	$-1,3a$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$0$	$0$
$-\pi/2$	$\lambda a$	$18,5^\circ$	$57^\circ$	$10,5^\circ$	$46,5^\circ$	$-0,156p$
$\pi/2$	$-\lambda a$	$161,5^\circ$	$123^\circ$	$169,5^\circ$	$46,5^\circ$	$-0,156p$

Приведем пример расчета напряжений по формулам (12) и (17) при загрузении краев разреза (фиг. 2) нормальным давлением

$$N(x) = -p\sigma(x) = \begin{cases} p \sqrt{a^2 - e^{x/c}} & \text{при } -\infty < x^+ < x_1; \\ -p \sqrt{a^2 - e^{x/c}} & \text{при } -\infty < x^- < x_1, \end{cases} \quad p = \text{const} > 0$$

$$(18) \quad \Phi(\zeta) = \frac{ip}{\pi} \left[ \frac{a}{\zeta} + \frac{1}{2} \ln \frac{a - \zeta}{a + \zeta} \right] \quad \text{на } (-a, a)$$

$$\Phi'(\zeta) = \frac{ip}{\pi} \left[ \frac{2a}{\zeta^2 - a^2} - \frac{a}{\zeta^2} \right]$$

$$\Psi(\zeta) = \frac{ipa}{\pi\zeta} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{a^2}{\zeta^2} - 1 \right) \right] \ln(a^2 - \zeta^2) + \frac{1}{\zeta} \Phi_1(\zeta)$$

$$\Phi_1(\zeta) = ap \left( 3 - \frac{a^2}{\zeta^2} \right) A_0, \quad -\infty < \sigma < -a$$

Так как  $\text{Re } \Phi(\zeta) = P/\pi (\sin \varphi - \theta/2)$ , где  $\varphi = \arg \zeta$ ,  $\theta = \varphi_1 - \varphi_2$ ,  $\varphi_1 = \arg(\zeta - a)$ ,  $\varphi_2 = \arg(\zeta + a)$ , то для построения эшоры (фиг. 2) распределения значений суммы  $X_x + Y_y$  по сечению полосы  $x = 2 \ln(\sqrt{3}a/2)$  получаем данные, приведенные ниже ( $\lambda = 1.28 + 0.43i$ ).

Покажем, что решение, определяемое функциями (18), удовлетворяет граничному условию (9). Действительно, при  $\zeta = \sigma$

$$\Phi(\sigma) = -\frac{p}{\pi} \left[ \left( \frac{1}{2} \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} \pm \frac{a}{\rho} \right) i - \frac{\pi}{2} \right] \quad \text{на } (-a, a)$$

$$\rho = |\zeta|; \quad \rho_1 = |\zeta - a|, \quad \rho_2 = |\zeta + a|, \quad \bar{\Phi}(\sigma) = P/\pi [-(1/2 \ln \rho_1/\rho_2 \pm a/\rho) i - \pi/2]$$

вследствие чего

$$(19) \quad \sigma [\Phi'(\sigma) + \bar{\Phi}'(\sigma)] = -\sigma p$$

на том же интервале. При этом

$$(20) \quad -\frac{1}{2c} \omega(\sigma) (a^2 - \sigma^2) \bar{\Phi}'(\sigma) = \frac{ipa}{2\pi} \left( 3 - \frac{a^2}{\sigma^2} \right) \ln(a^2 - \sigma^2)$$

$$(21) \quad \sigma \bar{\Psi}'(\sigma) = -\frac{ipa}{2\pi} \left( 3 - \frac{a^2}{\sigma^2} \right) \ln(a^2 - \sigma^2)$$

Граничное же условие (9) как сумма выражений (19)–(21) обращается в заданную величину  $N(\sigma) = -p\sigma$  на интервале  $(-a, a)$  и, как нетрудно подсчитать, — в нуль вне этого интервала, что служит проверкой правильности решения.

Поступила 15 IV 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Чигарев В. Н. Некоторые отображения многозначной функцией и их применение. Киев. «Наукова думка», 1971.
2. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.—Л. Гостехиздат, 1948.
3. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд-во АН СССР, 1954.
4. Современная математика для инженеров. (Под. ред. Э. Ф. Бекенбаха). М., Изд-во иностр. лит., 1959.
5. Белоносов С. М. Основные плоские статические задачи теории упругости для одно-связных и двусвязных областей. Новосибирск, СО АН СССР, 1962.