Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 539.31

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ АНТИПЛОСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ

В. А. Ибрагимов

(Ивано-Франковск)

Предлагается общее представление решений в задаче об антиплоском деформированном состоянии среды с определяющими соотношениями типа деформационной теории. Показано, что при весьма слабых ограничениях на вид одноосной диаграммы связи напряжений и деформаций основные уравнения задачи сводятся к обобщенной системе Коши—Римана, определяющей в качестве представления обобщенные аналитические функции комплексного переменного. Тем самым, проблема антиплоского деформирования является краевой задачей теории p-аналитических функций [1].

Рассматривается задача о трещине, выходящей на границу полуплоскости, показаны существование и единственность решения, найдена асимптотика решения для произвольных значений параметра нагрузки. Обсуждается возможность отыскания решений в замкнутом виде.

В более жестких предположениях о виде связи напряжений и деформаций указанная задача рассматривалась в [2].

1. Система основных уравнений задачи имеет вид

$$\frac{\partial\tau_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_y}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\gamma_x}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_y}{\partial x}=0 \tag{1.1}$$
$$\tau_x=\frac{\tau(\gamma)}{\gamma}\gamma_x,\quad \tau_y=\frac{\tau(\gamma)}{\gamma}\gamma_y$$

Здесь τ_x, τ_y, $^1/_2\,\gamma_x$, $^1/_2\,\gamma_y$ — сдвиговые компоненты тензоров напряжений и деформаций в декартовой системе (индекс z для краткости опущен); τ, $^1/_2\,\gamma$ — интенсивности их девиаторов, причем предполагается, что процесс деформирования квазистатический.

Укажем, что некоторые задачи о стационарном распределении тока в нелинейно-проводящих средах (см., например, [3]) также приводят к системе вида (1.1) (такая аналогия отмечается, по-видимому, впервые).

Известные представления решений системы (1.1) относятся к разного рода аппроксимации зависимости $\tau(\gamma)$ и позволили получить важные для приложений решения задач о концентрации напряжений и деформаций в упругопластических телах [4]. Отметим здесь, в частности, работу [2], где (применительно к случаю полуплоскости с угловым вырезом) было получено представление для (1.1) в предположении, что начальный участок диаграммы линейный.

Рассмотрим систему (1.1) в общем случае, считая, что функция $\tau(\gamma)\in\in C_1(0,\infty)$. Внося определяющие уравнения в уравнение равновесия, находим из (1.1)

$$\frac{\partial\gamma_x}{\partial x}\left(\frac{\tau}{\gamma}+\gamma_x^2\frac{\tau'\gamma-\tau}{\gamma^3}\right)+\frac{\partial\gamma_y}{\partial y}\left(\frac{\tau}{\gamma}+\gamma_y^2\frac{\tau'\gamma-\tau}{\gamma^3}\right)+ \tag{1.2}$$
$$+2\gamma_x\gamma_y\frac{\tau'\gamma-\tau}{\gamma^3}\frac{\partial\gamma_x}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\gamma_y}{\partial x}-\frac{\partial\gamma_x}{\partial y}=0$$

Система уравнений (1.2) относительно $\gamma_x(x, y)$, $\gamma_y(x, y)$ — квазилинейная первого порядка. Можно показать обычным образом, что (1.2) принадлежит к эллиптическому типу при $\tau'(\gamma) > 0$, гиперболическому при $\tau'(\gamma) < 0$ и параболическому при $\tau'(\gamma) = 0$. Для упругопластических задач эти случаи отвечают упрочняющейся, разупрочняющейся [5] и идеально пластической среде; для сред с нелинейным законом Ома — устойчивому, неустойчивому участкам и участку насыщения [3] соответственно.

Учитывая свойство приводимости [6] системы, введем для ее линеаризации преобразование годографа с независимыми переменными γ_y, γ_x, так что

$$\frac{\partial x}{\partial\gamma_y}=\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\gamma_x}{\partial y},\quad \frac{\partial x}{\partial\gamma_x}=-\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\gamma_y}{\partial y},\quad \frac{\partial y}{\partial\gamma_y}=-\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\gamma_x}{\partial x} \tag{1.3}$$
$$\frac{\partial y}{\partial\gamma_x}=\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\gamma_y}{\partial x},\quad \Delta=\frac{\partial\gamma_y}{\partial x}\frac{\partial\gamma_x}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_y}{\partial y}\frac{\partial\gamma_x}{\partial x}$$

Рассмотрим случай вырождения преобразования. Удовлетворяя уравнению $\Delta = 0$, положим

$$\frac{\partial\gamma_x}{\partial x}=\lambda\frac{\partial\gamma_x}{\partial y},\quad \frac{\partial\gamma_y}{\partial x}=\lambda\frac{\partial\gamma_y}{\partial y}\quad (\lambda=\lambda(x, y)) \tag{1.4}$$

Дифференцируя второе из уравнений (1.2) по x и используя соотношения (1.4), получаем уравнение для определения $\lambda(x, y)$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}-\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial y}=0$$

Общий интеграл уравнения имеет вид $\lambda x + y = C(\lambda)$, поэтому система (1.2) в случае вырождения обладает прямолинейными характеристиками, принадлежащими семейству $\lambda = \mathrm{const}$.

Используя соотношения (1.4), убеждаемся, что деформированное состояние является простым [6] ($\gamma_x = \gamma_x(\lambda x + y)$, $\gamma_y = \gamma_y(\lambda x + y)$). Последнее реализуется, например, около свободного от усилий кругового отверстия в упругой идеально пластической среде.

Возвращаясь к общему случаю $\Delta \neq 0$ и внося (1.3) в (1.2), получаем

$$\frac{\partial y}{\partial\gamma_y}\left(\frac{\tau}{\gamma}+\gamma_x^2\frac{\tau'\gamma-\tau}{\gamma^3}\right)+\frac{\partial x}{\partial\gamma_x}\left(\frac{\tau}{\gamma}+\gamma_y^2\frac{\tau'\gamma-\tau}{\gamma^3}\right)-2\gamma_x\gamma_y\frac{\partial x}{\partial\gamma_y}=0 \tag{1.5}$$
$$\frac{\partial x}{\partial\gamma_y}-\frac{\partial y}{\partial\gamma_x}=0$$

Уравнения, аналогичные (1.5), были получены иным путем в работе [2].

Преобразуем систему (1.5) в логарифмической полярной системе координат

$$\begin{aligned}(1.6)\qquad &\frac{\partial x}{\partial \rho}\sin\varphi+\frac{\partial x}{\partial \varphi}\varkappa\cos\varphi+\frac{\partial y}{\partial \rho}\cos\varphi-\frac{\partial y}{\partial \varphi}\varkappa\sin\varphi=0\\ &\frac{\partial x}{\partial \rho}\cos\varphi-\frac{\partial x}{\partial \varphi}\sin\varphi-\frac{\partial y}{\partial \rho}\sin\varphi-\frac{\partial y}{\partial \varphi}\cos\varphi=0\\ &(\gamma_y=\gamma\cos\varphi,\ \gamma_x=\gamma\sin\varphi,\ \rho=\ln\gamma,\ \varkappa=\tau'\gamma\,/\,\tau)\end{aligned}$$

Вводя неизвестные функции $a(\rho,\varphi)=x\sin\varphi+y\cos\varphi$, $b(\rho,\varphi)=x\cos\varphi-y\sin\varphi$ и систему независимых переменных $\xi=\varphi$

$$\eta=\int\sqrt{\varkappa}\,d\rho$$

из (1.6) находим

$$\frac{\partial a}{\partial \xi}-\sqrt{\varkappa}\frac{\partial b}{\partial \eta}-b=0,\qquad \frac{\partial a}{\partial \eta}+\sqrt{\varkappa}\frac{\partial b}{\partial \xi}+\sqrt{\varkappa}a=0\quad(\varkappa\geqslant 0)$$

Указанная система допускает преобразование зависимых переменных, приводящее ее к обобщенной системе Коши — Римана. Полагая

$$\begin{aligned}(1.7)\qquad &a=\alpha\exp\left(-\int p\,d\eta\right),\qquad b=\beta\exp\left(-\int\frac{d\eta}{p}\right)\\ &P=\frac{1}{p}\exp\left(\int\left(\frac{1}{p}-p\right)d\eta\right),\qquad p=\sqrt{\varkappa}\end{aligned}$$

получаем

$$(1.8)\qquad \frac{\partial \alpha}{\partial \xi}-\frac{1}{P}\frac{\partial \beta}{\partial \eta}=0,\qquad \frac{\partial \alpha}{\partial \eta}+\frac{1}{P}\frac{\partial \beta}{\partial \xi}=0$$

Таким образом, $f(\zeta)=\alpha+i\beta$ — обобщенная аналитическая функция переменной $\zeta=\xi+i\eta$ с характеристикой P. Последняя зависит лишь от переменной η, поэтому $f(\zeta)$ принадлежит инвариантному классу [1].

Тем самым, задача о нелинейно-упругом деформировании в условиях антиплоского состояния сводится к краевой задаче теории P-аналитических (псевдоаналитических) функций, развитой в работах [1, 7] и др.

Известные приложения указанной теории к проблемам механики сплошной среды относятся в основном к теории фильтрации, осесимметричной задаче теории упругости и плоской задаче теории пластичности, где оказались полезными для формулировки мажорантных методов и позволили получить в ряде случаев замкнутые решения [1].

2. Сформулированная задача оказывается линейной (например, обобщенной задачей сопряжения Римана — Гильберта), если линейны краевые условия, заданные на известных отображениях границ области в плоскости z на плоскость переменной ζ. В частности, это всегда имеет место в случае краевых задач для многоугольников с однородными граничными условиями.

В качестве примера рассмотрим использование полученного в п. 1 представления для полуплоскости $D=\{x\geqslant 0,\ |y|<\infty\}$ с трещиной-разрезом $L=\{0\leqslant x\leqslant l,\ y=0\}$, подвергнутой однородному сдвигу величины γ_∞ на бесконечности.

Введем комплексную функцию

$$\Omega(\zeta) = ((\exp\zeta)^2 - 1)^{1/2} \quad (\eta = \operatorname{Im}\zeta, \quad \eta(\rho_\infty) = 0, \quad \rho_\infty = \ln\gamma_\infty)$$

осуществляющую вместе с преобразованием годографа $\zeta = \zeta(z)$ отображение области D на полуплоскость $D_+^\circ = \{\operatorname{Re}\Omega \geqslant 0\}$. В силу аналитичности $\Omega(\zeta)$ в D система (1.8) переходит в

$$\frac{\partial\beta}{\partial\Omega_1} - \frac{1}{R}\frac{\partial\alpha}{\partial\Omega_2} = 0, \quad \frac{\partial\beta}{\partial\Omega_2} + \frac{1}{R}\frac{\partial\alpha}{\partial\Omega_1} = 0 \tag{2.1}$$

$$R = 1 / P(\ln|\sqrt{\Omega^2+1}|), \quad \Omega = \Omega_1 + i\Omega_2$$

и определяет функцию $f(\Omega) = \beta + i\alpha$, R-аналитическую в D_+°.

Учитывая, что $\xi = 0$ при $x = 0$, $\xi = \pm\pi/2$ при $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$, находим согласно (1.7) краевое условие

$$\beta = \operatorname{Re} f = 0 \quad (\Omega_1 = 0) \tag{2.2}$$

Доопределим решение в полуплоскости $D_-^\circ = \{\Omega_1 < 0\}$ по правилу $f(\Omega) = -\overline{f(-\bar\Omega)}$. Как видно из (2.2), функция $f(\Omega)$ при этом непрерывна на мнимой оси и удовлетворяет соотношениям (2.1) в $D^\circ = D_+^\circ \cup D_-^\circ$, исключая особые точки однозначного характера $\Omega = 0, \infty$. Для отыскания асимптотики в указанных точках заметим, что согласно (1.7)

$$\alpha = a\tau, \quad \beta = b\gamma, \quad f(\Omega) = b\gamma + ia\tau \tag{2.3}$$

так что из (2.3) имеем соответственно при $z \to l$, $z \to \infty$

$$f \sim l(\gamma\cos\xi + i\tau\sin\xi), \quad f \sim b\gamma_\infty + i\tau_\infty a \quad (b + ia = ze^{i\xi}) \tag{2.4}$$

Удовлетворяя первой из асимптотик (2.4), положим

$$f(\Omega) = f_1(\Omega) + F(\Omega) \tag{2.5}$$

$$f_1(\Omega) = l\cos\xi\exp\left(\int_0^\eta \frac{d\eta}{p}\right) + il\sin\xi\exp\left(\int_0^\eta p\,d\eta\right)$$

$$(\zeta = \ln\sqrt{\Omega^2+1} \to \infty)$$

Функция $f_1(\Omega)$, как легко проверить, R-аналитическая и имеет согласно (2.5) полюс первого порядка при $\Omega = \infty$. Поэтому $F(\Omega)$ голоморфна в смысле обобщенных аналитических функций в окрестности $\Omega = \infty$.

При $z \to \infty$, $\Omega \to 0$ из (2.1) находим асимптотику

$$\beta + i\frac{\alpha}{R(0)} = \frac{c}{\Omega^n} + o\left(\frac{1}{\Omega^n}\right), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.6}$$

При $R(0) = 1$ решение должно совпадать с линейно-упругим, поэтому в (2.6), учитывая дискретность спектра параметра n, следует положить $n = 1$. Функция $F(\Omega)$ имеет тогда полюс первого порядка при $\Omega = 0$ и представима в виде

$$F(\Omega) = f_2(\Omega) + f_3(\Omega) \tag{2.7}$$

где особенность $f_3(\Omega)$ согласно (2.6) устранима.

Заметим, что $f_1(\Omega)$, $f_2(\Omega)$ голоморфны (или имеют устранимые особенности) при $\Omega = \infty$, 0 соответственно, тогда как R-аналитическая функция $f_3(\Omega)$ не имеет особых точек в D° за исключением, быть может, устранимых особенностей.

Псевдоаналитическая функция определяется заданием набора ее особых точек в полной плоскости, поэтому из соотношений (2.5) — (2.7) и следует существование решения поставленной задачи.

Для доказательства единственности достаточно допустить существование второго решения $g(\Omega)$ и применить к R-аналитической в D° функции $f(\Omega) - g(\Omega)$ обобщенную теорему Лиувилля [1].

3. Рассмотрим вопрос о разрешимости линейных краевых задач для системы (1.8) в замкнутом виде. В работе [1] показано, что достаточным условием этого является представимость характеристики в виде

$$P(\eta) = c\eta^k, \quad k \geqslant 0 \tag{3.1}$$

Найдем зависимости $\tau = \tau(\gamma)$, удовлетворяющие условию (3.1). Полагая в последнем соотношении из (1.7)

$$\exp\left(\int \left(\frac{1}{p} - p\right) d\eta\right) = p\eta^k$$

убеждаемся, что функция $p(\eta)$ удовлетворяет уравнению

$$p'\eta + kp + \eta p^2 = \eta \tag{3.2}$$

определяющему ее с точностью до постоянных k, $p(0)$. Поэтому соответствующий класс диаграмм $\tau(\gamma)$ трехпараметрический. В частности, для среды, удовлетворяющей закону Гука, следует положить $k = 0$, $p(0) = 1$.

Для решения ряда конкретных задач можно использовать аппроксимации участков заданной зависимости решениями уравнения (3.2) с привлечением известных представлений для η^k-аналитических функций. Другая возможность для построения решений заключается в представлении общего интеграла системы в виде линейных комбинаций аналитических функций и их производных (некоторые случаи применительно к плоской задаче теории пластичности изучены в [8]). Пусть $p(\eta) = 1 - \varepsilon(\eta)$, $\sup|\varepsilon(\eta)| = \delta$ на $\eta_0 \leqslant \eta \leqslant \eta_1$. Характеристика функции при $\delta = 0$ (1) имеет вид

$$P = 1 + 2\delta t(\eta - \eta_0) + \varepsilon(\eta) + O(\delta^2) \quad (0 \leqslant |t| \leqslant 1)$$

Поэтому в представлении используется линейно-упругое решение и его производные.

Поступила 17 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Положий Г. Н.* Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Киев, Изд-во Киевск. ун-та, 1965.
2. *Rice J. R.* Stresses due to a sharp notches in a work-hardening elastic-plastic material loaded by longitudinal shear. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1967, vol. 34, No. 2.
3. *Руткевич И. М.* Распространение электромагнитных возмущений и устойчивость стационарных состояний в средах с нелинейным законом Ома. ПМТФ, 1972, № 3.
4. *Черепанов Г. П.* Упругопластическая задача. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 2.
5. *Ибрагимов В. А.* Некоторые вопросы теории разупрочняющихся сред. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 4.
6. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. М., «Наука», 1969.
7. *Bers L.* Partial differential equations and generalised analytic functionc. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1950, vol. 36, No. 2, p. 130—136.
8. *Белоносов С. М.* Приближенное интегрирование уравнений плоской задачи теории пластичности. ПММ, 1957, т. 21, вып. 1.