Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 539.31

О ДВУХ ЭФФЕКТИВНЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

В. М. Александров, Е. В. Коваленко

(Ростов-на-Дону)

Рассматриваются одномерные интегральные уравнения первого рода с нерегулярными ядрами, содержащими подвижную логарифмическую особенность и некоторый безразмерный геометрический или физический параметр λ. Такие интегральные уравнения возникают при изучении широкого класса линейных смешанных задач теории упругости и вязкоупругости (контактные задачи, задачи о щелях, включениях и накладках), гидромеханики (линейные задачи глиссирования, обтекания тонких профилей и поверхностей, задачи линейной суперкавитации и т. д.). Все ранее применявшиеся методы для исследования указанных интегральных уравнений эффективны либо при больших, либо при малых значениях параметра λ [1]. Это заставляло при изучении той или иной конкретной задачи использовать в совокупности несколько методов, например «асимптотический метод больших λ» и «асимптотический метод малых λ». В данной работе предлагаются алгоритмы, одинаково эффективные при всех значениях параметра $\lambda\in(0, \infty]$.

1. Типы изучаемых интегральных уравнений смешанных задач. Многие из перечисленных выше смешанных задач в плоской и пространственной постановках сводятся к интегральному уравнению первого рода типа свертки на конечном интервале

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \pi f(x) \quad (|x| \leqslant 1) \tag{1.1}$$

$$K(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \frac{L(u)}{u} e^{-iut}\, du \quad \left(t = \frac{x-\xi}{\lambda}, \quad u = \sigma + i\tau\right) \tag{1.2}$$

По свойствам функции $L(u)$ в большинстве случаев встречающиеся задачи делятся на два класса [2]

$$\begin{aligned} &\text{а) } L(u) = Au + O(u^2) \quad (u \to 0) \\ &\text{б) } L(u) = (Bu)^{-1} + D^{-1} + O(u) \quad (u \to 0) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Кроме того, для обоих случаев в полосе $|\tau| \leqslant \gamma$, $|\sigma| < \infty$, $|c| < \gamma$

$$L(u) = 1 + O(e^{-\nu|\sigma|}) \quad (|\sigma| \to \infty) \tag{1.4}$$

и функция $L(u)$ регулярна, за исключением точки $u = 0$ для случая б). В (1.3) и (1.4) A, B, D, γ и ν — постоянные, определяемые конкретными задачами. Ограничения, налагаемые на правую часть уравнения (1.1), будут указаны ниже.

В силу условия (1.3) для случая а) функцию $L(u)$ можно представить в виде

$$L(u) = \operatorname{th} Au + G_1(u) \tag{1.5}$$

Подставляя (1.5) в (1.2) и переходя к интегрированию по вещественной оси в силу (1.4) и известного интеграла [3]

$$-\ln\left|\operatorname{th}\frac{\pi y}{4}\right| = \int_0^\infty \frac{\operatorname{th} v}{v}\cos vy\, dv \tag{1.6}$$

получим следующее представление для ядра $K(t)$:

$$K(t) = -\ln\left|\operatorname{th}\frac{\pi t}{4A}\right| + N_1(t), \quad N_1(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_1(\sigma)}{\sigma} e^{-i\sigma t}\, d\sigma \tag{1.7}$$

На основании (1.4), а также регулярности функции $L(u)$ в полосе и теорем A) и B) (см. [4], стр. 34, 35) убедимся, что $N_1(t)$ как функция комплексного переменного $w = t + is$ регулярна в полосе $|s| < \operatorname{Inf}(\nu, 2A)$, $|t| < \infty$. Кроме того,

$$N_1(t) = O(e^{-\varkappa|t|}) \quad \left(|t| \to \infty, \ \varkappa = \operatorname{Inf}\left(\gamma, \frac{\pi}{2A}\right)\right) \tag{1.8}$$

В силу условия (1.3) для случая б) функцию $L(u)$ можно представить в виде

$$L(u) = \operatorname{cth} Bu + \frac{u}{\operatorname{sh} Du} + G_2(u) \tag{1.9}$$

После подстановки (1.9) в (1.2) и перехода к интегрированию по вещественной оси в силу (1.4) и равенств [3]

$$-\ln\left|2\operatorname{sh}\frac{\pi y}{2}\right| + C = \int_0^\infty \frac{\operatorname{cth} v}{v}\cos vy\, dv \tag{1.10}$$

$$\frac{\pi}{2}\operatorname{th}\frac{\pi y}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin vy}{\operatorname{sh} v}\, dv$$

понимаемых в смысле теории обобщенных функций [5] (C — неопределенная постоянная), получим для ядра $K(t)$ представление

$$K(t) = -\ln\left|2\operatorname{sh}\frac{\pi t}{2B}\right| + C - \frac{\pi i}{2D}\left(\operatorname{th}\frac{\pi t}{2D} \pm 1\right) + N_2(t) \tag{1.11}$$

$$N_2(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_2(\sigma)}{\sigma} e^{-i\sigma t}\, d\sigma \tag{1.12}$$

В (1.11) знаки плюс или минус выбираются в зависимости от положения контура интегрирования в (1.2). Аналогично предыдущему относительно функции $N_2(t)$ можно утверждать, что она регулярна в полосе $|s| < \operatorname{Inf}(\nu, 2B, D)$, $|t| < \infty$. Кроме того, для $N_2(t)$ при $|t| \to \infty$ имеет место оценка (1.8), где $\varkappa = \operatorname{Inf}(\gamma, \pi/2B, \pi/D)$.

Таким образом, первые слагаемые в выражениях для $K(t)$ вида (1.7), (1.11) полностью отражают все основные свойства ядер интегрального уравнения (1.1), (1.2) для случаев а) и б) при всех $t \in [0, \infty)$. Остальные слагаемые в (1.7) и (1.11) являются сколь угодно гладкими при $t \in [0, \infty)$. Отсюда следует, что если точно обратить интегральные операторы

$$L_a\varphi = -\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) \ln \left| \operatorname{th} \frac{\pi t}{4A} \right| d\xi, \quad L_b\varphi = -\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) \ln \left| 2 \operatorname{sh} \frac{\pi t}{2B} \right| d\xi \tag{1.13}$$

то, по сути дела, будет качественно точно выявлено поведение решений уравнения (1.1), (1.2) для случаев а) и б) при всех значениях параметра λ. На этой основе может быть развит приближенный метод решения интегрального уравнения (1.1), (1.2) для обоих случаев, одинаково эффективный при всех значениях $\lambda \in (0, \infty]$; идея такого подхода намечена в работе [6].

Перейдем к исследованию важных вспомогательных интегральных уравнений вида

$$L_a\varphi = \pi g_1(x), \quad L_b\varphi = \pi g_2(x) \tag{1.14}$$

Ограничимся изучением лишь нечетных случаев, т. е. будем предполагать, что функции $g_1(x)$, $g_2(x)$, а следовательно, и решения уравнений (1.14) нечетные (четные случаи имеют свою специфику и требуют отдельного рассмотрения).

Произведем в уравнениях (1.14) замены переменных и введем обозначения соответственно по формулам

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ \beta = \frac{\operatorname{sh} r\xi}{\operatorname{sh} r}, \quad \alpha = \frac{\operatorname{sh} rx}{\operatorname{sh} r}, \quad r = \frac{\pi}{2A\lambda} \\ &\varphi^*(\beta) = \left(\frac{r \operatorname{ch} r\xi}{\operatorname{sh} r}\right)^{-1} \varphi(\xi), \quad g^*(\alpha) \equiv g_1(x) \\ &\text{б)}\ \beta = \frac{\operatorname{th} r\xi}{\operatorname{th} r}, \quad \alpha = \frac{\operatorname{th} rx}{\operatorname{th} r}, \quad r = \frac{\pi}{2B\lambda} \\ &\varphi^*(\beta) = \left(\frac{r}{\operatorname{th} r \operatorname{ch}^2 r\xi}\right)^{-1} \varphi(\xi), \quad g^*(\alpha) \equiv g_2(x) \end{aligned} \tag{1.15}$$

При этом уравнения (1.14) запишутся в единой форме

$$-\int_0^1 \varphi^*(\beta) \ln \left| \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} \right| d\beta = \pi g^*(\alpha) \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1) \tag{1.16}$$

Учитывая нечетность функций $\varphi^*(\beta)$ и $g^*(\alpha)$, придадим (1.16) вид

$$-\int_{-1}^{1} \varphi^*(\beta) \ln |\beta - \alpha| \, d\beta = \pi g^*(\alpha) \quad (|\alpha| \leqslant 1) \tag{1.17}$$

Таким образом вопросы существования и единственности решения уравнений (1.14) можно решить, изучив их для уравнения (1.17).

2. О структуре решения интегральных уравнений (1.14). Будем искать решение интегрального уравнения (1.17) в виде

$$\varphi^*(\beta) = \omega(\beta)(1 - \beta^2)^{-1/2} \tag{2.1}$$

Относительно функции $\omega(\alpha)$ будем предполагать, что она принадлежит классу $L_2^{1/2}(-1, 1)$, который представляет собой полное пространство функций с нормой

$$\|f\|^2 = \int_{-1}^{1} \frac{|f(\alpha)|^2}{\sqrt{1-\alpha^2}} d\alpha$$

Теперь заметим, что для интегрального оператора

$$M\omega = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\omega(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} \ln|\beta-\alpha|\, d\beta$$

известна замкнутая в $L_2^{1/2}(-1, 1)$ система собственных функций, которую составляют полиномы Чебышева первого рода [7]

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{T_n(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} \ln|\beta-\alpha|\, d\beta = \frac{T_n(\alpha)}{c_n} \quad \left(c_0 = \frac{1}{\ln 2},\ c_n = n \geqslant 1\right) \tag{2.2}$$

Из замкнутости системы вытекает, что для любой функции $\omega(\alpha) \in L_2^{1/2}(-1, 1)$ возможно единственное представление [8]

$$\omega(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n T_n(\alpha) \quad (\|\omega\|_{L_2^{1/2}} = \|\omega\|_{l_2}) \tag{2.3}$$

где l_2 — полное пространство последовательностей с нормой

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^2 \quad (f = \{f_n\})$$

Предположим, что в (1.17) функция $g^*(\alpha)$ такова, что $g^{*\prime}(\alpha) \in L_2^{1/2}(-1, 1)$. Тогда тем более для $g^*(\alpha)$ возможно представление

$$g^*(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n T_n(\alpha) \tag{2.4}$$

Подставляя (2.1), (2.3) и (2.4) в уравнение (1.17) и используя (2.2), найдем

$$\omega_n = c_n g_n \tag{2.5}$$

Теорема 1. Если $g^{*\prime}(\alpha) \in L_2^{1/2}(-1, 1)$, то существует единственное решение интегрального уравнения (1.17), такое, что $\varphi^*(\beta)$ имеет вид (2.1), а функция $\omega(\alpha) \in L_2^{1/2}(-1, 1)$. Кроме того, имеет место следующее соотношение корректности:

$$\|\omega(\alpha)\|_{L_2^{1/2}}^2 \leqslant c_0^2 \left(\int_{-1}^{1} \frac{g^*(\alpha)\, d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)^2 + m\|g^{*\prime}(\alpha)\|_{L_2^{1/2}}^2 \quad (m = \text{const}) \tag{2.6}$$

которое также можно представить в виде

$$\|\varphi^*(\alpha)\|_{L_{4/3-0}} \leqslant m_1 \|g^*(\alpha)\|_{W_{4+0}^1} \quad (m_1 = \text{const}) \tag{2.7}$$

Здесь $L_p(-1,1)$ — пространство функций, абсолютно суммируемых при $\alpha \in [-1, 1]$ со степенью p, $W_p^k(-1,1)$ — пространство функций, k-е производные которых абсолютно суммируемы при $\alpha \in [-1, 1]$ со степенью p.

Для доказательства теоремы продифференцируем (2.4) по α. С учетом (2.5) и принимая во внимание формулы

$$T'_{2n}(\alpha) = 4n \sum_{k=1}^{n} T_{2k-1}(\alpha) \tag{2.8}$$

$$T'_{2n+1}(\alpha) = (2n+1)\left[T_0(\alpha) + 2\sum_{k=1}^{n} T_{2k}(\alpha)\right]$$

получим

$$g^{*\prime}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega_n}{c_n} T'_n(\alpha) = T_0(\alpha)\sum_{n=0}^{\infty} \omega_{2n+1} + 2\sum_{k=1}^{\infty} T_{2k-1}(\alpha)\sum_{n=k}^{\infty}\omega_{2n} + \tag{2.9}$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{\infty} T_{2k}(\alpha)\sum_{n=k}^{\infty}\omega_{2n+1}$$

С другой стороны, для функции $g^{*\prime}(\alpha)$, принадлежащей классу $L_2^{1/2}(-1,1)$, имеет место разложение

$$g^{*\prime}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} g'_n T_n(\alpha) \quad (\{g'_n\} \in l_2) \tag{2.10}$$

Сравнивая (2.9) и (2.10), установим, что

$$\omega_1 = g_0' - {}^1/_2\, g_2', \quad \omega_{2k+1} = g'_{2k} - g'_{2k+2}, \quad \omega_{2k} = g'_{2k-1} - g'_{2k+1}$$

Теперь можем записать

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n^2 = c_0^2 g_0^2 + \left(g_0' - \frac{1}{2} g_2'\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} [(g'_{2k} - g'_{2k+2})^2 + \tag{2.11}$$

$$+ (g'_{2k-1} - g'_{2k+1})^2] \leqslant c_0^2 g_0^2 + m \sum_{n=0}^{\infty} g_n'^2$$

Здесь для оценки использовано неравенство Коши — Буняковского. Соотношение (2.11) можно также представить в виде

$$\|\omega(\alpha)\|_{l_2}^2 \leqslant c_0^2 g_0^2 + m\,\|g^{*\prime}(\alpha)\|_{l_2}^2$$

или в силу эквивалентности норм в (2.3) в виде (2.6). С помощью неравенства Гельдера нетрудно установить

$$\|\varphi^*(\alpha)\|_{L_{4/3-0}} \leqslant \pi\,\|\omega(\alpha)\|_{L_2^{1/2}}, \qquad \|g^{*\prime}(\alpha)\|_{L_2^{1/2}} \leqslant m_2\,\|g^{*\prime}(\alpha)\|_{L_{4+0}}$$

$$(m_2 = \text{const})$$

и тем самым убедиться в справедливости (2.7).

Следствие 1. Из (2.7) вытекает существование единственного решения $\varphi^*(\alpha)$ интегрального уравнения (1.17) в классе $L_{4/3-0}(-1, 1)$ при $g^*(\alpha) \in W_{4+0}^1(-1,1)$.

При использовании результатов (2.7) следует еще иметь в виду, что если $g^*(\alpha) \in W^1{}_{4+0}(-1,1)$, то $g^*(\alpha) \in B_0^{\mu}(-1,1)$, $0 < \mu \leqslant {}^3/_4$. В справедливости этого можно также убедиться с помощью неравенства Гельдера. Здесь $B_k^{\mu}(-1,1)$ — пространство функций, k-я производная которых при $|\alpha| < 1$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $0 < \mu \leqslant 1$.

Отметим еще, что если $g^*(\alpha) \in B_1^\mu(-1,1)$ и $\mu > 0$, то, как показано в работе [9], $\omega(\alpha) \in \beta_0^\nu(-1, 1)$ и $\nu = \mu$ при $\mu < 1$, $\nu = 1-0$ при $\mu = 1$.

На основании фактов, доказанных для уравнения (1.17), можно теперь утверждать, что при $g_i(x) \in W_{4+0}^1(-1,1)$ $(i = 1, 2)$, существуют единственные решения интегральных уравнений (1.14) вида

$$(2.12)\qquad \text{а) } \varphi(x) = \frac{\omega_1(x)\operatorname{ch} rx}{\sqrt{\operatorname{ch} 2r - \operatorname{ch} 2rx}},\qquad \text{б) } \varphi(x) = \frac{\omega_2(x)}{\operatorname{ch} rx\sqrt{\operatorname{ch} 2r - \operatorname{ch} 2rx}}$$

где функции $\omega_i(x) \in L_2^{1/2}(-1, 1)$, причем справедливы соотношения корректности (2.6) и (2.7). Если же $g_i(x) \in B_1^\mu(-1,1)$ и $\mu > 0$, то $\omega_i(x) \in \in B_0^\nu(-1,1)$ и $\nu = \mu$ при $\mu < 1$, $\nu = 1-0$ при $\mu = 1$.

Далее также понадобятся следующие спектральные соотношения, получающиеся из (2.2) с учетом (1.15):

$$(2.13)\qquad \text{а) } -\int_{-1}^{1} \frac{T_{2j+1}(\operatorname{sh} r\xi/\operatorname{sh} r)}{\sqrt{\operatorname{ch} 2r - \operatorname{ch} 2r\xi}} \ln\left|\operatorname{th}\frac{\pi(\xi - x)}{4A\lambda}\right| \operatorname{ch} r\xi\, d\xi = \pi\lambda_j T_{2j+1}\left(\frac{\operatorname{sh} rx}{\operatorname{sh} r}\right),$$

$$\lambda_j = [\sqrt{2}(2j+1)r]^{-1}$$

$$\text{б) } -\int_{-1}^{1} \frac{T_{2j+1}(\operatorname{th} r\xi/\operatorname{th} r)}{\sqrt{\operatorname{ch} 2r - \operatorname{ch} 2r\xi}} \ln\left|2\operatorname{sh}\frac{\pi(\xi - x)}{2B\lambda}\right| \frac{d\xi}{\operatorname{ch} r\xi} = \pi\lambda_j T_{2j+1}\left(\frac{\operatorname{th} rx}{\operatorname{th} r}\right),$$

$$\lambda_j = [\sqrt{2}(2j+1)r\operatorname{ch} r]^{-1}$$

Возвращаясь к интегральному уравнению (1.1), (1.2), с учетом формул (1.7) и (1.11), (1.12) перепишем его в форме

$$(2.14)\qquad \text{а) } L_a\varphi = \pi f(x) - H_1\varphi,\ \text{б) } L_b\varphi = \pi f(x) - H_2\varphi$$

$$H_i\varphi = \int_{-1}^{1} \varphi(\xi)\, N_i\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi \quad (i = 1, 2)$$

Здесь учтено, что для нечетного случая в варианте б) постоянная $D = \infty$. Если предположить, что $\varphi(x) \in L_{4/3-0}(-1,1)$, то функции $H_i\varphi$ будут сколь угодно гладкими. Это следует из доказанного выше факта регулярности функций $N_i(t)$ в некоторой полосе плоскости комплексного переменного, содержащей вещественную ось. Теперь на основании теоремы 1 можно сформулировать теорему:

Теорема 2. Если функция $f(x) \in W_{4+0}^1(-1,1)$ и решения уравнений (2.14) существуют в классе $L_{4/3-0}(-1,1)$, то при всех значениях параметра $\lambda \in (0, \infty]$ они имеют вид (2.12), причем функции $\omega_i(x) \in L_2^{1/2}(-1,1)$. При этом если $f(x) \in B_1^\mu(-1,1)$ и $\mu > 0$, то $\omega_i(x) \in B_0^\nu(-1,1)$ и $\nu = \mu(\mu < 1)$, $\nu = 1-0$ $(\mu = 1)$.

3. Метод ортогональных полиномов. Будем искать функции $\omega_i(\xi)(i = 1, 2)$, входящие в соотношение (2.12), в виде следующих рядов по полиномам Чебышева:

$$(3.1)\qquad \omega_i(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_{2k+1}(\beta)$$

В силу свойств функций $\omega_i(\xi)$, указанных в теореме 2, ряды (3.1) сходятся по норме пространства $L_2^{1/2}(-1,1)$, а соответствующие последовательности $\{a_k\}$ принадлежат пространству l_2. Функцию $f(x)$, а также регулярные добавки ядер $N_i(t)$ $(i = 1, 2)$ разложим соответственно в одинарные и двойные ряды по указанным системам полиномов. Будем иметь

$$(3.2)\qquad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k T_{2k+1}(\alpha)$$

$$N_i(t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} e_{mn}(\lambda) T_{2m+1}(\beta) T_{2n+1}(\alpha)$$

Здесь и ниже функции α и β определяются по формулам (1.15) в случаях а) и б) соответственно при $i = 1$ и $i = 2$.

Воспользовавшись известным [3] свойством ортогональности полиномов Чебышева, получим

$$(3.3)\qquad e_{mn}(\lambda) = \frac{8r^2}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{N_i(t)\,T_{2m+1}(\beta)\,T_{2n+1}(\alpha)}{\sqrt{\operatorname{ch}2r - \operatorname{ch}2r\xi}\,\sqrt{\operatorname{ch}2r - \operatorname{ch}2rx}}\,q(\xi, x)\,d\xi\,dx$$

$$\text{а) } q(\xi, x) = \operatorname{ch} r\xi \operatorname{ch} rx, \qquad \text{б) } q(\xi, x) = \frac{\operatorname{ch}^2 r}{\operatorname{ch} r\xi \operatorname{ch} rx}$$

В силу описанных выше свойств функций $f(x)$, $N_1(t)$ и $N_2(t)$ ряды (3.2) равномерно сходятся [10] к этим функциям при всех $|x| \leqslant 1$, $|\xi| \leqslant 1$ и $\lambda > 0$.

Лемма 1. Если функция $f(x) \in W^1_{4+0}(-1,1)$, то любому решению $\varphi(x)$ из класса $L_{4|3-0}(-1,1)$ уравнения вида (2.13) соответствует последовательность чисел a_i из класса l_2, удовлетворяющая бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$(3.4)\qquad a_n = r_n - \sum_{m=0}^{\infty} a_m c_{mn} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$(r_n = f_n \lambda_n^{-1}, \quad c_{mn} = {}^1/_2(2n + 1) l_{mn})$$

Наоборот, если функция $f(x) \in W^1_{4+0}(-1,1)$, то любому решению $\{a_n\}$ из класса l_2 системы (3.4) соответствует решение $\varphi(x) \in L_{4/3-0}(1,1)$ уравнения вида (2.12), (3.1).

Для доказательства, с учетом теоремы 2, подставим в интегральные уравнения (2.13) функции $\varphi(x)$, $f(x)$, $N_1(t)$ и $N_2(t)$ в виде (2.12), (3.1), (3.2). Используя далее спектральные соотношения (2.13) и свойство ортогональности полиномов Чебышева, после преобразований придем к (3.4). Легко производятся и обратные преобразования.

Лемма 2. Для коэффициентов $e_{mn}(\lambda)$ вида (3.3) имеют место следующие оценки:

$$(3.5)\qquad \text{а) } |e_{mn}(\lambda)| \leqslant \delta_n \frac{2\operatorname{sh}^3 r}{\pi^2 r^3 \lambda^3 (2m+1)}(2D_3 + D_2 \lambda r \operatorname{sh} r)$$

$$\text{б) } |e_{mn}(\lambda)| \leqslant \delta_n \frac{\operatorname{sh}^3 2r}{2\pi^2 \lambda^3 r^3 (2m+1)}(D_3 + D_2 \lambda r \operatorname{th} r)$$

Здесь

$$D_2 = \max|N_i''(t)|, \quad D_3 = \max|N_i'''(t)| \quad (|t| < \infty, \quad i = 1, 2)$$

$$\delta_n = \begin{cases}[n(n+1)]^{-1}, & n \geqslant 1\\ \pi, & n = 0\end{cases}$$

Для доказательства произведем в (3.3) замены переменных $\beta = \cos\psi$, $\alpha = \cos\varphi$. Далее, интегрируя полученные выражения для $e_{mn}(\lambda)$ дважды по частям по φ и один раз по ψ, после ряда выкладок и оценок придем к (3.5).

Теорема 3. Если функция $f(x) \in W^1_{4+0}(-1,1)$, то оператор, стоящий в правой части (3.4), действует в пространстве l_2, вполне непрерывен при всех $\lambda \in (0, \infty]$ и является оператором сжатия при $\lambda > \lambda_0$. Постоянная λ_0 находится из уравнения

$$\text{(3.6)} \qquad \text{а) } S_1(r) = \frac{1}{8}\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{\pi^2}\right)\left[\frac{8A^3\operatorname{sh}^3 r}{\pi^3}\left(2D_3 + \frac{\pi}{2A}D_2\operatorname{sh} r\right)\right]^2 = 1$$

$$\text{б) } S_2(r) = \frac{1}{128}\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{\pi^2}\right)\left[\frac{8B^3\operatorname{sh}^3 2r}{\pi^3}\left(D_3 + \frac{\pi}{2B}D_2\operatorname{th} r\right)\right]^2 = 1$$

Для доказательства произведем в формулах (3.2) замены переменных согласно (1.15). Дифференцируя затем по α полученные соотношения, принимая во внимание (2.8) и учитывая, что $f'(x) \in L_2^{1/2}(-1,1)$, убедимся, что последовательность $\{r_n\} \in l_2$. Далее с помощью оценок (3.5) можно показать, что при $\lambda > 0$

$$\text{(3.7)} \qquad \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_{mn}^2 < S_i(r) < \infty \quad (i = 1, 2)$$

Из (3.7) следует, что оператор, стоящий в правой части (3.4), действует в пространстве последовательностей l_2 и является там вполне непрерывным [8] при $\lambda \in (0, \infty]$. Таким образом, бесконечная система (3.4) однозначно разрешима почти при всех λ. Из (3.7) видно, что при выполнении равенств (3.6) указанный выше оператор будет оператором сжатия в l_2. Следовательно, при $\lambda > \lambda_0$ решение бесконечной системы (3.4) в пространстве l_2 существует, единственно и может быть получено с любой степенью точности методом последовательных приближений или методом редукции [8].

Заметим, что бесконечную систему (3.4) можно еще представить в форме

$$\text{(3.8)} \qquad a_n^* = f_n - \sum_{m=0}^{\infty} a_m^* c_{mn}^*$$

$$a_n^* = a_n\lambda_n, \quad c_{mn}^* = {}^1/_2(2m+1)\, e_{mn}(\lambda)$$

Если функция $f(x) \in W^1_{4+0}(-1,1)$, то можно показать, что $\{f_n\} \in l_1$, где l_1 — полное пространство последовательностей с нормой

$$\| f \| = \sum_{n=0}^{\infty} | f_n |$$

Получив для c_{mn}^* оценки типа (3.5) можно также убедиться, что оператор, стоящий в правой части (3.8), действует в пространстве l_1. Можно доказать, что бесконечная система (3.8) квазивполне регулярна при $\lambda > 0$. Если существует ее ограниченное решение, то $\{a_n^*\} \in l_1$. Можно указать некоторое $\lambda_0^* > 0$, такое, что при $\lambda > \lambda_0^*$ бесконечная система (3.8) вполне регулярна [11].

Для конкретной задачи, рассмотренной в п. 5, $D_2 = 0.3466$, $D_3 = 0.1883$ и из соотношения (3.6) найдем $\lambda_0 = 0.996$. Вычисления показывают, что метод редукции для системы (3.4) сходится также при $\lambda < \lambda_0$. Важно, что количество уравнений в указанной системе при заданной точности решения не превосходит некоторого N при всех $\lambda \in (0, \infty]$.

Решив систему (3.4), найдем затем по формулам (3.1) и (2.12) решения интегральных уравнений (2.14). Коэффициент при особенности у функции $\varphi(x)$ может быть вычислен по формуле

$$\chi = \lim_{x\to 1} \varphi(x)\sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{\operatorname{sh} 2r}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

4. Метод коллокации. Сделав в интегральных уравнениях (2.14) замены переменных по формулам (1.15), перепишем их в единой форме

$$-\int_0^1 \varphi^*(\beta) \ln\left|\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}\right| d\beta = \pi f^*(\alpha) - \int_0^1 \varphi^*(\beta)\, m_k(\beta, \alpha, \lambda)\, d\beta \tag{4.1}$$

$$m_k(\beta, \alpha, \lambda) \equiv N_k\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) - N_k\left(\frac{\xi + x}{\lambda}\right) \quad (k = 1, 2;\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$$

Будем искать решение уравнения (4.1) в виде (2.1). С учетом обозначений $\beta = \cos\gamma$, $\alpha = \cos\theta$ относительно $\omega(\cos\gamma)$ получим интегральное уравнение

$$-\int_0^{\pi/2} \omega(\cos\gamma) \ln\left|\frac{\cos\gamma - \cos\theta}{\cos\gamma + \cos\theta}\right| d\gamma = \tag{4.2}$$

$$= \pi f^*(\cos\theta) - \int_0^{\pi/2} \omega(\cos\gamma)\, m_k(\cos\gamma, \cos\theta, \lambda)\, d\gamma \quad \left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

Построим для функции $\omega(\cos\gamma)$ интерполяционный полином Лагранжа по чебышевским узлам [10]

$$\theta_s = \pi\frac{2s-1}{4i} \quad (s = 1, 2, \ldots, i)$$

С учетом нечетности функции $\omega(\cos\gamma)$ этот полином примет вид

$$\omega(\cos\gamma) = \frac{2}{i}\sum_{s=1}^{i} \omega(\cos\theta_s) \sum_{n=1}^{i} \cos(2n-1)\theta_s \cos(2n-1)\gamma$$

Теперь, используя формулу (2.2), вычислим интеграл в левой части уравнения (4.2). Интеграл, стоящий в правой части (4.2), вычислим, используя квадратурную формулу типа Гаусса [10]. Подставляя найденные выражения интегралов в уравнение (4.2) и давая θ значения

$$\theta_j = \pi\frac{2j-1}{4i} \quad (j = 1, 2, \ldots, i)$$

получим систему уравнений для определения $\omega(\cos\theta_s)$

$$\frac{2}{i}\sum_{s=1}^{i} \omega(\cos\theta_s)\left[\frac{1}{4} m_k(\cos\theta_s, \cos\theta_j, \lambda) + \right. \tag{4.3}$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{i} \cos(2n-1)\theta_s \frac{\cos(2n-1)\theta_j}{2n-1}\right] = f^*(\cos\theta_j)$$

После решения системы (4.3) приближенные решения уравнений (2.14) находим по формулам

$$\varphi(x)=\frac{r\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,rx}{\sqrt{\mathrm{ch}\,2r-\mathrm{ch}\,2rx}}\left[\frac{2}{i}\sum_{s=1}^{i}\omega(\cos\theta_s)\sum_{n=1}^{i}\cos(2n-1)\,\theta_s T_{2n-1}\left(\frac{\mathrm{sh}\,rx}{\mathrm{sh}\,r}\right)\right]$$

$$\varphi(x)=\frac{r\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,r}{\mathrm{ch}\,rx\sqrt{\mathrm{ch}\,2r-\mathrm{ch}\,2rx}}\left[\frac{2}{i}\sum_{s=1}^{i}\omega(\cos\theta_s)\sum_{n=1}^{i}\cos(2n-\right.$$

$$\left.-1)\,\theta_s T_{2n-1}\left(\frac{\mathrm{th}\,rx}{\mathrm{th}\,r}\right)\right]$$

$$\chi=\lim_{x\to1}\varphi(x)\sqrt{1-x^2}=\sqrt{\frac{2r}{\mathrm{sh}\,2r}}\left[\frac{2}{i}\sum_{s=1}^{i}\omega(\cos\theta_s)\sum_{n=1}^{i}\cos(2n-1)\theta_s\right]$$

Сходимость метода с ростом числа узлов коллокации может быть обоснована, если воспользоваться результатами, изложенными в [12] (см. § 12). Важно отметить, что число узлов i при заданной точности приближенрого решения не превосходит некоторого i_0 для всех $\lambda\in(0,\infty]$.

5. Растяжение упругой полосы, усиленной жесткой накладкой конечной длины. Пусть с одной из границ упругой изотропной полосы с упругими постоянными G и ν (G—модуль сдвига, ν—коэффициент Пуассона) и толщиной h соединена нерастяжимая, но абсолютно гибкая пластинка (накладка) длины $2a$. Предполагается, что вне пластинки граница полосы свободна от усилий. Противоположная граница полосы лежит без трения на недеформируемом основании. Предполагается также, что между полосой и пластинкой в области их контакта осуществляется полное сцепление, а полоса растягивается на бесконечности силами $P=ph$. Требуется определить касательные напряжения $\tau(y)$, возникающие в области контакта полосы и пластинки.

Рассматриваемая задача может быть приведена к решению интегрального уравнения, которое в безразмерных переменных имеет вид [13]

$$\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi=-\pi x\quad(|x|\leqslant1)\tag{5.1}$$

$$K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)=\int_0^\infty\frac{L(u)}{u}\cos\frac{\xi-x}{\lambda}u\,du$$

$$\tau(y)=\frac{p}{2}\varphi\left(\frac{y}{a}\right)\quad(|y|\leqslant a),\qquad\lambda=\frac{h}{a},\qquad L(u)=\frac{\mathrm{ch}\,2u+1}{\mathrm{sh}\,2u+2u}$$

причем для рассматриваемой задачи в (1.3) $B=2$, $D=\infty$.

Приближенное решение уравнения (5.1) при $\lambda>0$ может быть получено одним из методов, изложенных в п. 3 или в п. 4. Необходимые для этого значения функции $N_2(t)$ вычислены на ЭВМ и даны ниже ($N_2(t)\approx\exp(-{}^1/_2\pi t)$ при $t>4$)

t	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$-N_2(t)\cdot10^3$	415	413	405	394	379	360	339
t	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$-N_2(t)\cdot10^3$	291	241	193	151	114	85	62
t	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.5	4.0
$-N_2(t)\cdot10^3$	45	32	22	16	11	4	2

В таблице даны значения функции $\varphi(x)$ и коэффициента при особенности χ, подсчитанные двумя изложенными в п. 3,4 методами (в первой строке методом ортого-

λ	φ (x)					χ
	$x=0.1$	$x=0.3$	$x=0.5$	$x=0.7$	$x=0.9$	
2.0	—0.105	—0.321	—0.592	—2.997	—2.090	—1.002
	—0.104	—0.326	—0.596	—1.007	—2.107	—1.017
1.0	—0.114	—0.352	—0.624	—1.029	—2.062	—0.982
	—0.113	—0.350	—0.625	—1.023	—2.067	—0.980
0.5	—0.093	—0.283	—0.526	—0.857	—1.689	—0.792
	—0.092	—0.288	—0.524	—0.857	—1.690	—0.790

нальных полиномов, во второй — методом коллокации). Для достижения совпадения во втором знаке после запятой (в худшем случае $\lambda = {}^1/_2$) число уравнений в системе (3.4) надо взять равным восьми, а в системе (4.3)—семи.

Поступила 22 X 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., «Наука», 1974.
2. *Александров В. М. Кучеров В. А.* Некоторые задачи о действии двух штампов на упругую полосу. Изв. АН СССР. МТТ, 1968, № 4.
3. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
4. *Нобл Б.* Метод Винера — Хопфа, М., Изд-во иностр. лит., 1962.
5. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1958.
6. *Александров В. М.* О двух новых методах решения контактных задач для упругой полосы. Ростов-на-Дону, Изд-во Ростовск. ун-та, 1965.
7. *Попов Г. Я.* Об одном приближенном способе решения некоторых плоских контактных задач теории упругости. Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. наук, 1961, т. 14, № 3.
8. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.
9. *Александров В. М.* О плоских контактных задачах теории упругости при наличии сцепления или трения. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
10. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. М.—Л. Гостехиздат, 1949.
11. *Александров В. М., Кучеров В. А.* О методе ортогональных полиномов в плоских смешанных задачах теории упругости. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
12. *Каландия А. И.* Математические методы двумерной упругости. М., «Наука», 1973.
13. *Соловьев А. С.* Некоторые смешанные задачи теории упругости. Материалы XVI научн. студ. конференции. Ростов-на-Дону, Изд-во Ростовск. ун-та, 1963.