

О СТАБИЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВОГО СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА РАБОТЫ РЕАКТОРА ВЫТЕСНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УЧЕТОМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ

Ю. П. Гупало, В. А. Новиков, Ю. С. Рязанцев

(Москва)

Для модели химического реактора идеального вытеснения с интегральным учетом тепловыделения [1], применяемой для описания каталитических реакторов, в частности, реакторов со взвешенным слоем [2-6], возможно существование трех стационарных режимов — нижнего, среднего и верхнего. В нижнем стационарном режиме температура в реакторе слишком мала, чтобы реакция протекала достаточно эффективно. В верхнем режиме температура настолько велика, что это часто приводит к распаду продуктов и возникновению побочных реакций. По этим причинам средний стационарный режим обычно оказывается наиболее целесообразным с точки зрения проведения химико-технологического процесса. Однако как раз такой режим неустойчив [1], и возникает задача его стабилизации.

В данной работе решается задача о стабилизации оптимального неустойчивого среднего режима путем введения в химический реактор системы пропорционального регулирования скорости подачи реагента по отклонению температуры в реакторе. Методом малых возмущений исследуется влияние параметров регулирования на устойчивость. Сначала рассмотрена модель идеальной системы регулирования. Найдено минимальное критическое значение параметра стабилизации, которое обеспечивает устойчивость оптимального режима реактора. С помощью численного решения нестационарной задачи устанавливается критерий для выбора параметра стабилизации в системе регулирования, исходя из масштабов возможных случайных возмущений оптимального режима. Далее изучено влияние времени запаздывания в системе регулирования на возможность стабилизации неустойчивого режима. Установлено, что для фиксированного значения параметра стабилизации существует максимальное критическое значение времени запаздывания, превышение которого делает стабилизацию невозможной. Найдена область параметров, характеризующих систему регулирования, при которых оптимальный режим становится устойчивым.

С использованием численного решения нестационарной задачи исследован переход химического реактора на оптимальный режим при включении системы регулирования для разных значений времени запаздывания. Установлено, что если время запаздывания отсутствует, т. е. имеется идеальная система регулирования, то выход на стабилизированный режим носит неколебательный характер. Если время запаздывания отлично от нуля, то переход реактора в стабилизированное состояние сопровождается колебаниями температуры и профиля концентрации около своих стационарных значений в оптимальном режиме. Эти колебания затухают со временем, причем их амплитуды зависят от времени запаздывания. Показано, что при определенном выборе параметров системы регулирования в реакторе оказываются возможными незатухающие колебания.

Задача о стабилизации неустойчивого стационарного режима для модели реактора полного перемешивания рассматривалась в работах [7-11], где регулирование осуществлялось посредством изменения скорости охлаждающей жидкости в зависимости от

отклонения температуры, либо концентрации от своих стационарных значений. Анализ показал, что регулирование по концентрации не всегда может привести к стабилизации, и температура является более удобной переменной для регулирования; при этом стабилизация осуществляется, если время запаздывания не слишком велико. В работе [12], по-видимому, впервые рассмотрен вопрос о стабилизации неустойчивого режима в модели реактора с распределенными параметрами. Была рассмотрена реакция нулевого порядка, что позволило ограничиться только анализом уравнения для температуры. Оказалось, что любое отличное от нуля время запаздывания в системе регулирования влечет за собой невозможность стабилизации неустойчивого режима.

1. Уравнения. Стационарные состояния, режимы. Уравнения, граничные и начальные условия, описывающие нестационарное изменение температуры и концентрации в рассматриваемой модели реактора [1], можно записать в безразмерном виде

$$(1.1) \quad \frac{\partial \xi}{\partial \tau} + v \frac{\partial \xi}{\partial x} = (1 - \xi) g \exp\left(-\frac{\beta}{\theta}\right)$$

$$(1.2) \quad \frac{d\theta}{d\tau} = \alpha(\theta_0' - \theta) + \omega v(\theta_0'' - \theta) + \omega g \exp\left(-\frac{\beta}{\theta}\right) \int_0^1 (1 - \xi) dx$$

$$(1.3) \quad x = 0, \quad \xi(0, \tau) = 0$$

$$(1.4) \quad \tau = 0, \quad \xi(x, 0) = \xi_0(x), \quad \theta(0) = \theta_0$$

$$\xi = \frac{c_0 - c}{c_0}, \quad x = \frac{X}{L}, \quad v = \frac{u}{u^*}, \quad T^* = \frac{hc_0}{C_g \rho_g}$$

$$\tau = \frac{t}{\tau^*}, \quad \tau^* = \frac{L}{u^*}, \quad \beta = \frac{E}{RT^*}, \quad g = k_0 \tau^*$$

$$\alpha = \alpha_s \frac{S \tau^*}{V \rho_* c_*}, \quad \omega = \frac{\varepsilon_0 \rho_g C_g}{\rho_* C_*}$$

$$\rho_* C_* = \varepsilon_0 \rho_g C_g + (1 - \varepsilon_0) \rho_s C_s$$

Здесь X — пространственная координата ($0 \leq X \leq L$); L — длина реактора; t — время; c — концентрация ключевого вещества; c_0 — концентрация ключевого вещества на входе в реактор; ξ — степень продвижения реакции; u — скорость подачи реагента; ε_0 — объемная доля смеси реагента и продуктов реакции пористого слоя катализатора; T — температура в реакторе; V , S — объем и площадь боковой поверхности реактора; ρ_g , C_g — плотность и удельная теплоемкость смеси; ρ_s , C_s — плотность и удельная теплоемкость катализатора; α_s — коэффициент теплопередачи к боковым стенкам реактора; T_0' — температура окружающей среды; T_0'' — температура поступающей смеси; h — теплота реакции; k_0 — предэкспоненциальный множитель; E — энергия активации; R — универсальная газовая постоянная, u^* — характерная скорость.

При записи уравнений (1.1), (1.2) предполагается, что диффузия реагирующего компонента незначительна по сравнению с конвективным переносом и ею можно пренебречь, в то время как теплопроводность велика, и температуру внутри реактора можно считать постоянной. Принимается, что в реакторе протекает необратимая экзотермическая реакция первого порядка, скорость которой зависит от температуры по закону Аррениуса. Используется также предположение о равномерности распределения скорости потока по поперечному сечению реактора. Будем далее считать реактор адиабатическим, т. е. полагать $\alpha = 0$.

Из (1.1)—(1.3) с учетом $\alpha = 0$ для стационарного распределения степени продвижения реакции $\xi^\circ(x)$ и значения температуры θ° в стационарном состоянии получим

$$(1.5) \quad \xi^\circ(x) = 1 - \exp \left[-x \frac{g}{v} \exp \left(-\frac{\beta}{\theta^\circ} \right) \right]$$

$$(1.6) \quad \theta_0'' - \theta^\circ + 1 - \exp \left[-\frac{g}{v} \exp \left(-\frac{\beta}{\theta^\circ} \right) \right] = 0$$

Анализ уравнения (1.6) показывает, что в зависимости от значений параметров θ_0'' , β , g и v оно может иметь от одного до трех решений [1].

Типичный вид зависимости θ° от v показан на фиг. 1 (кривая 1) при $\theta_0'' = 1.75$; $\beta = 50$; $g = \exp(25)$. Кривая 1 имеет три точки пересечения O^- , O , O^+ с вертикальной прямой $v = v_0$, которым соответствуют низкотемпературный, средний и высокотемпературный режимы с температурами θ_1° , θ_2° , θ_3° . При этом средний режим оказывается неустойчивым.

Исследуем возможность стабилизации среднего режима путем изменения параметра v (скорости подачи реагирующей смеси) в соответствии с отклонениями температуры и концентрации в реакторе от значений, соответствующих стационарному режиму.

2. Регулирование среднего режима по температуре. Рассматривается реактор, имеющий при некоторых фиксированных значениях параметров θ_0'' , β , g и $v = v_0$ три стационарных режима (см. фиг. 1). Будем считать, что в реакторе имеется система, которая позволяет изменять скорость подачи реагирующей смеси в реактор пропорционально отклонению температуры в реакторе от температуры среднего стационарного состояния. При этом в уравнениях (1.1), (1.2) следует положить

$$(2.1) \quad v(\tau) = v_0 \{1 + d [\theta(\tau - \tau_d) - \theta_2^\circ]\}$$

Здесь θ_2° — температура среднего стационарного режима при $v = v_0$; τ_d — время запаздывания, величина которого определяется степенью инертности системы контроля; d — параметр стабилизации.

Из (1.1), (1.2), (2.1) в стационарном случае вместо (1.6) получим

$$(2.2) \quad \theta_0'' - \theta^\circ + 1 - \exp \frac{-g \exp(-\beta/\theta^\circ)}{v_0 [1 + d(\theta^\circ - \theta_2^\circ)]} = 0$$

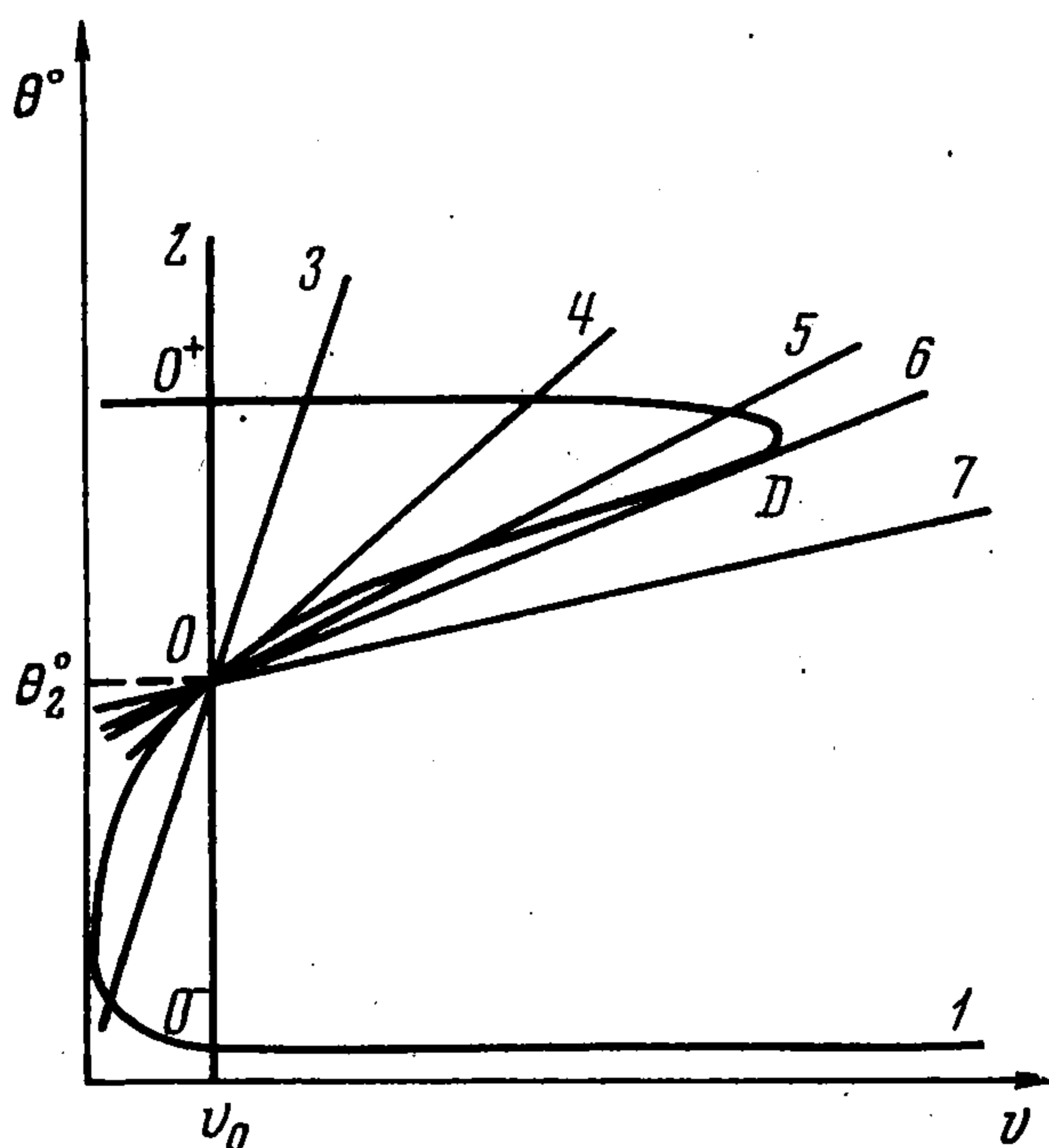
Одним из решений уравнения (2.2) по-прежнему будет $\theta^\circ = \theta_2^\circ$. Другие решения, определяющие стационарные значения температуры, дополнительные к θ_2° , теперь будут зависеть от величины параметра стабилизации d . Эта зависимость показана на фиг. 2. Когда регулирование отсутствует ($d = 0$), стационарные температуры равны прежним значениям θ_1° , θ_2° , θ_3° . При $d \neq 0$ дополнительные к θ_2° стационарные значения температуры определяются как ординаты точек пересечения кривой 1 (см. фиг. 1) с прямой с наклоном $d^{-1}v_0^{-1}$, проходящей через точку v_0, θ_2° . Видно, что с ростом параметра d (прямые 2—7) температура верхнего стационарного режима уменьшается, а нижнего увеличивается. При некотором значении $d = d_c$ нижний режим сливается со средним (прямая 4), а при дальнейшем возрастании d температура θ_2° уже соответствует нижнему режиму

(прямая 5). Наконец, при $d > d_1$ у уравнения (2.2) остается только одно решение θ_2° , соответствующее единственному стационарному режиму (прямая 7).

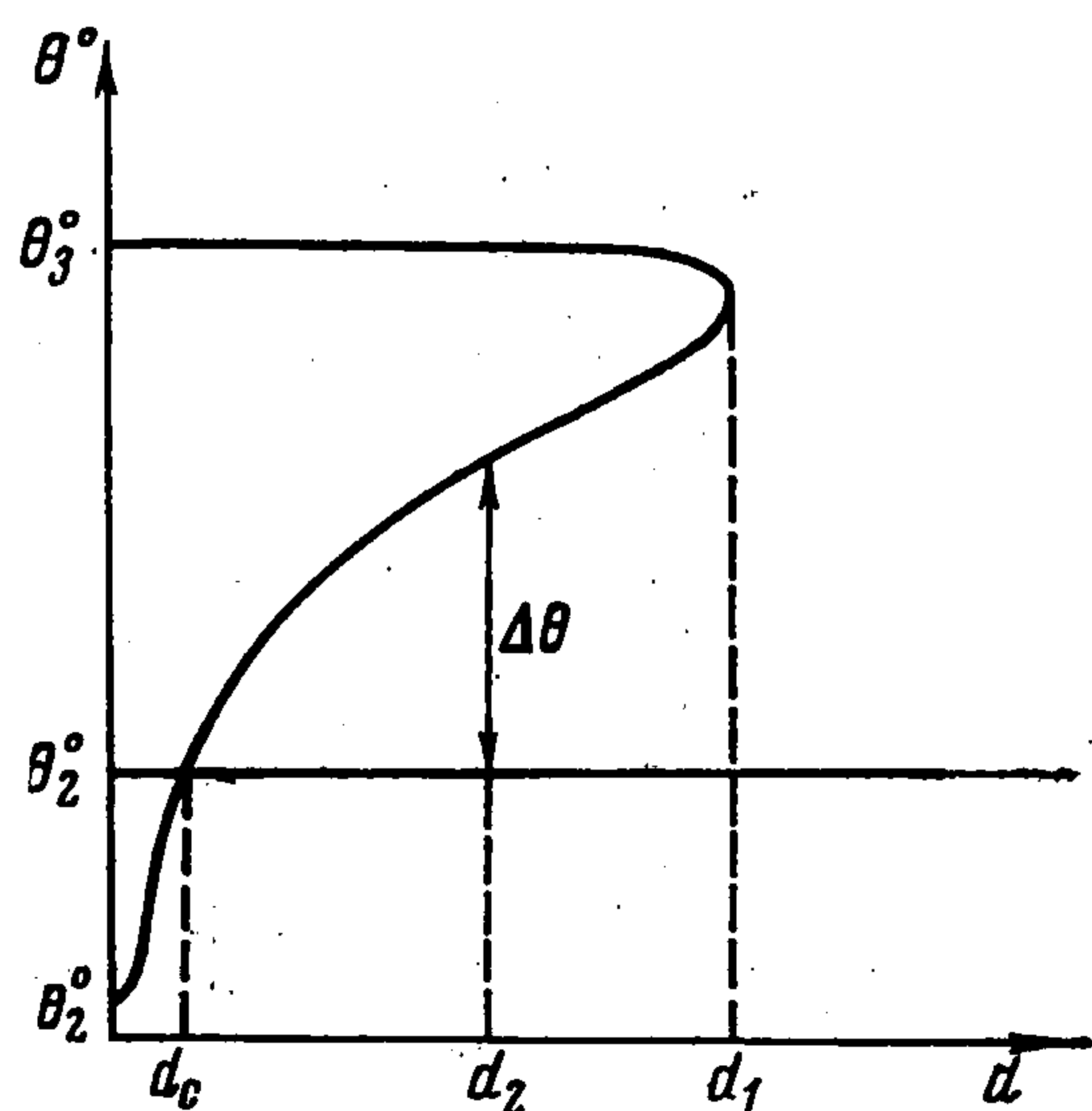
Из условия касания прямых с наклоном $d^{-1}v_0^{-1}$ и кривой 1 в точках O и D можно получить d_c и d_1 , например

$$(2.3) \quad d_c = \frac{\beta}{\theta_2^{\circ 2}} - \frac{v_0}{g} \exp \left[\frac{\beta}{\theta_2^\circ} + \frac{g \exp(-\beta/\theta_2^\circ)}{v_0} \right]$$

По аналогии со случаем реактора без регулирования можно ожидать, что стабилизация среднего режима достигается при значениях параметра



Фиг. 1



Фиг. 2

стабилизации $d > d_c$, когда решение $\theta^\circ = \theta_2^\circ$ уравнения (2.2) соответствует нижнему стационарному состоянию. Чтобы убедиться в этом, исследуем устойчивость стационарных состояний при различных значениях d .

Полагая в (1.1), (1.2), что

$$\theta(\tau) = \theta^\circ + \theta'(\tau), \quad \xi(x, \tau) = \xi^\circ(x) + \xi'(x, \tau)$$

где θ° и $\xi^\circ(x)$ — температура и степень продвижения реакции при стационарном режиме, в линейном приближении из (1.1)–(1.4), (2.1) найдем

$$(2.4) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial \xi'(x, \tau)}{\partial \tau} + v^\circ \frac{\partial \xi'(x, \tau)}{\partial x} + \frac{v_0}{v^\circ} b \exp\left(-\frac{b}{v^\circ}\right) d \theta'(\tau - \tau_d) - \\ & - \frac{\beta b}{\theta^{\circ 2}} \exp\left(-\frac{b}{v^\circ}\right) \theta'(\tau) + b \xi'(x, \tau) = 0 \\ & \frac{1}{\omega} \frac{d \theta'(\tau)}{d \tau} + v^\circ \left\{ 1 - \frac{\beta}{\theta^{\circ 2}} \left[1 - \exp\left(-\frac{b}{v^\circ}\right) \right] \right\} \theta'(\tau) + \\ & + v_0 d (\theta^\circ - \theta_0'') \theta'(\tau - \tau_d) + b \int_0^1 \xi'(x, \tau) dx = 0 \\ & b = g \exp\left(-\frac{\beta}{\theta^\circ}\right), \quad v^\circ = v_0 [1 + d(\theta^\circ - \theta_2^\circ)] \\ & x = 0, \quad \xi'(0, \tau) = 0 \\ & \tau = 0, \quad \xi'(x, 0) = \xi_0'(x), \quad \theta'(0) = \theta_0 \end{aligned}$$

После преобразования Лапласа из (2.4) получим (p — параметр преобразования; трансформанты всюду ниже отмечены указанием аргумента p)

$$(2.5) \quad p\xi'(x, p) - \xi'(x) + v^\circ \frac{d\xi'(x, p)}{dx} + b \exp\left(-\frac{b}{v^\circ}\right) \times \\ \times \left[\frac{v_0}{v^\circ} d \exp(-p\tau_d) - \frac{\beta}{\theta^{\circ 2}} \right] \theta'(p) + b\xi'(x, p) = 0 \\ \frac{1}{\omega} [p\theta'(p) - \theta_0] + \left[v^\circ + v_0 d (\theta^\circ - \theta_0'') \exp(-p\tau_d) - \right. \\ \left. - \frac{\beta v^\circ}{\theta^{\circ 2}} \left(1 - \exp\left(-\frac{b}{v^\circ}\right) \right) \right] \theta'(p) + b \int_0^1 \xi'(x, p) dx = 0 \\ x = 0, \quad \xi'(0, p) = 0$$

Решение задачи (2.5) для трансформант степени продвижения реакции и температуры имеет вид

$$(2.6) \quad \xi'(x, p) = N(x, p) \exp\left(-\frac{p+b}{v^\circ} x\right) \\ \theta'(p) = (\theta_0 - \omega b D(p)) \left\{ p + M(p) + \frac{\omega b v^\circ}{p+b} \left(\frac{v_0}{v^\circ} d \exp(-p\tau_d) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{b}{\theta^{\circ 2}} \right) \left[\frac{b}{p} \left(1 - \exp\left(-\frac{p}{v^\circ}\right) \right) \exp\left(-\frac{b}{v^\circ}\right) - 1 + \exp\left(-\frac{b}{v^\circ}\right) \right] \right\}^{-1} \\ N(x, p) = \int_0^x \left\{ \exp\left(\frac{p+b}{v^\circ} z\right) \frac{\xi_0'(z) - M(p)\theta'(p)}{v^\circ} \right\} dz \\ \frac{M(p)}{\omega} = v^\circ + v_0 d (\theta^\circ - \theta_0'') \exp(-p\tau_d) - \frac{b v^\circ}{\theta^{\circ 2}} \left[1 - \exp\left(-\frac{b}{v^\circ}\right) \right] \\ D(p) = \frac{1}{p+b} \int_0^1 \xi_0'(x) dx - \frac{1}{p+b} \exp\left(\frac{p+b}{v^\circ}\right) \times \\ \times \int_0^1 \xi_0'(x) \exp\left(\frac{p+b}{v^\circ} x\right) dx$$

Все особенности трансформант — полюсы, поэтому вопрос об устойчивости регулируемого стационарного режима сводится к анализу расположения полюсов функций $\xi'(x, p)$, $\theta'(p)$ на комплексной плоскости p . Если все полюсы этих функций находятся левее мнимой оси, то начальные возмущения стационарного режима затухают со временем, и режим устойчив, если имеются полюсы правее мнимой оси, — неустойчивый.

Полюсы трансформант (2.6) лежат в точке $p = -b$ и нулях функции

$$(2.7) \quad \Psi(s) = s^2 + a_1 s \exp(-s v^\circ \tau_d) + a_2 s + \\ + a_3 \exp(-s v^\circ \tau_d) + a_4 + [a_5 \exp(-s v^\circ \tau_d) - a_6] \times \\ \times s^{-1} [1 - \exp(-s)], \quad s = p / v^\circ$$

Здесь

$$a_1 = \frac{\omega v_0 d}{v^\circ} (\theta^\circ - \theta_0''), \quad a_2 = \omega - \frac{\omega \beta}{\theta^{\circ 2}} \left[1 - \exp\left(-\frac{b}{v^\circ}\right) \right] + \frac{b}{v^\circ} \\ a_3 = \frac{b \omega v_0 d}{v^{\circ 2}} \left[\theta^\circ - \theta_0'' - 1 + \exp\left(-\frac{b}{v^\circ}\right) \right], \quad a_4 = \frac{b \omega}{v^\circ} \\ a_5 = \frac{b^2 \omega v_0 d}{v^{\circ 3}} \exp\left(-\frac{b}{v^\circ}\right), \quad a_6 = \frac{b^2 \omega \beta}{v^{\circ 2} \theta^{\circ 2}} \exp\left(-\frac{b}{v^\circ}\right)$$

При решении вопроса о корнях уравнения $\Psi(s) = 0$, имеющих положительную действительную часть, воспользуемся принципом аргумента, согласно которому число нулей функции $\Psi(s)$ внутри области, ограниченной замкнутым контуром Γ , на котором $\Psi(s) \neq 0$, равно приращению аргумента функции $\Psi(s)$ при обходе контура Γ , деленному на 2π .

В качестве контура Γ выберем контур $\Gamma_1 + \Gamma_2$, составленный из правой полуокружности радиуса R с центром в начале координат (Γ_1), и отрезка оси ординат, заключенного между точками $(0, R)$ и $(0, -R)$. Если на мнимой оси окажутся нули функции $\Psi(s)$, то контур Γ_2 составим из отрезков оси ординат и правых полуокружностей малого радиуса r с центрами, помещенными в чисто мнимые нули функции $\Psi(s)$. Затем перейдем к пределу при $R \rightarrow \infty$, $r \rightarrow 0$.

Анализ показывает, что приращение аргумента функции $\Psi(s)$ на Γ_1 при $R \rightarrow \infty$ не зависит от значений a и равно 2π .

3. Идеальное регулирование. Исследуем сначала случай идеального регулирования, т. е. $\tau_d = 0$. Вместо (2.7) имеем

$$(3.1) \quad \Psi(s) = s^2 + \Omega_3 s - \Omega_1 + \Omega_2 \frac{1 - e^{-s}}{s}$$

$$\Omega_1 = -a_3 - a_4, \quad \Omega_2 = a_5 - a_6, \quad \Omega_3 = a_1 + a_2$$

В функцию (3.1) входят три параметра $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, которые образуют некоторое трехмерное параметрическое пространство. Каждому стационарному состоянию химического реактора соответствует некоторая точка в этом параметрическом пространстве, так как параметры $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ — функции от характеристик реактора и того стационарного режима, в котором реактор находится. Цель дальнейшего исследования состоит в том, чтобы найти в этом параметрическом пространстве область устойчивости, т. е. область, где параметры Ω_1, Ω_2 и Ω_3 принимают такие значения, что функция (3.1) не имеет корней с положительной действительной частью. Тогда, если точка в параметрическом пространстве $(\Omega_1^*, \Omega_2^*, \Omega_3^*)$, соответствующая какому-либо стационарному состоянию [реактора, лежит в области устойчивости, то данное стационарное состояние устойчиво, если же точка лежит вне этой области, — неустойчиво. Займемся нахождением области устойчивости в параметрическом пространстве.

Рассмотрим функцию (3.1) на контуре Γ_2 , где $s = iy$

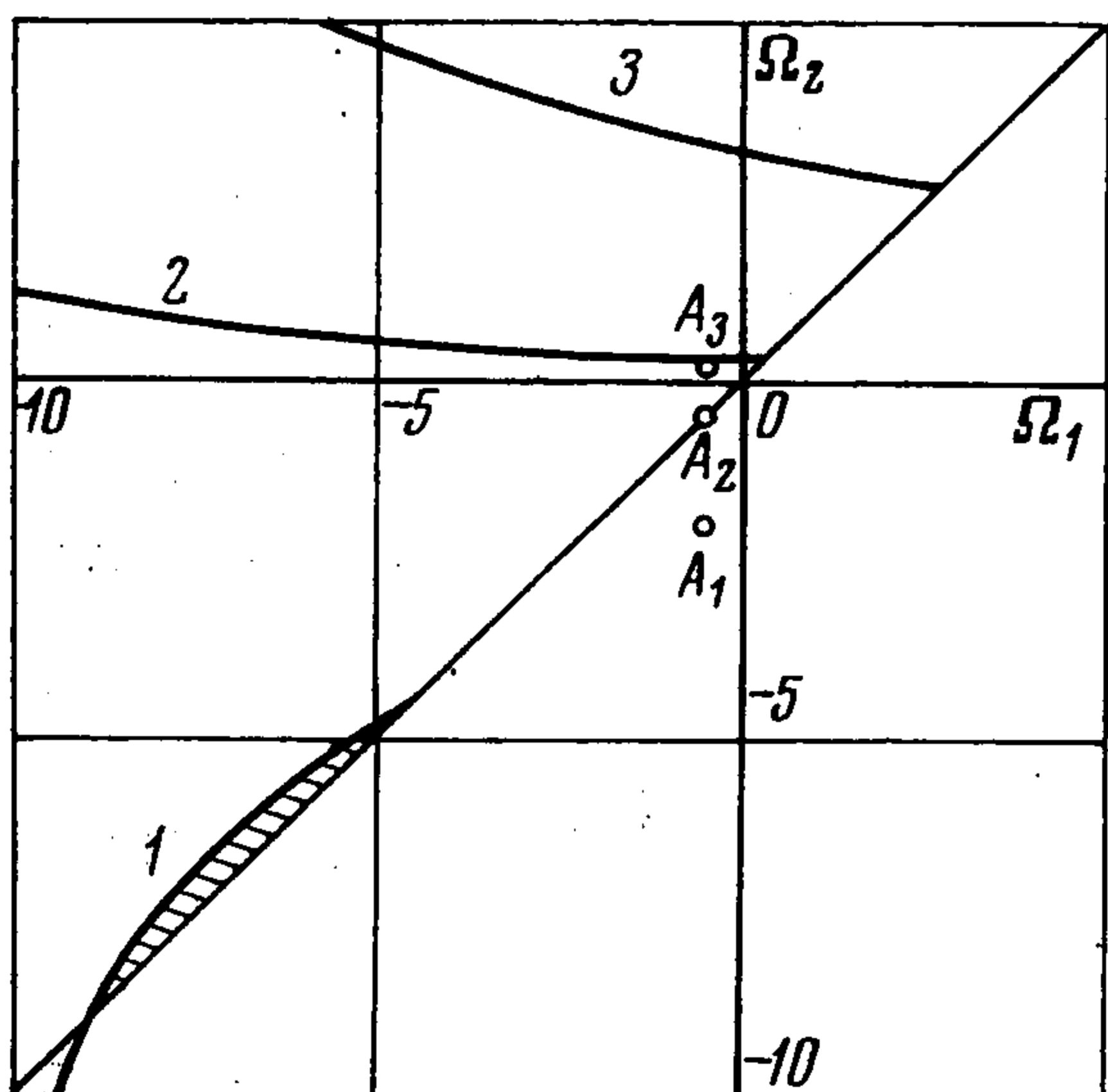
$$(3.2) \quad \Psi(iy) = -y^2 - \Omega_1 + \Omega_2 \frac{\sin y}{y} + i \left(y\Omega_3 - \Omega_2 \frac{1 - \cos y}{y} \right)$$

Определим значения параметров $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, при которых функция (3.1) имеет чисто мнимые нули. Из (3.2) следует, что это будет в случае, когда значения параметров $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ располагаются на поверхности в параметрическом пространстве, определяемой уравнениями

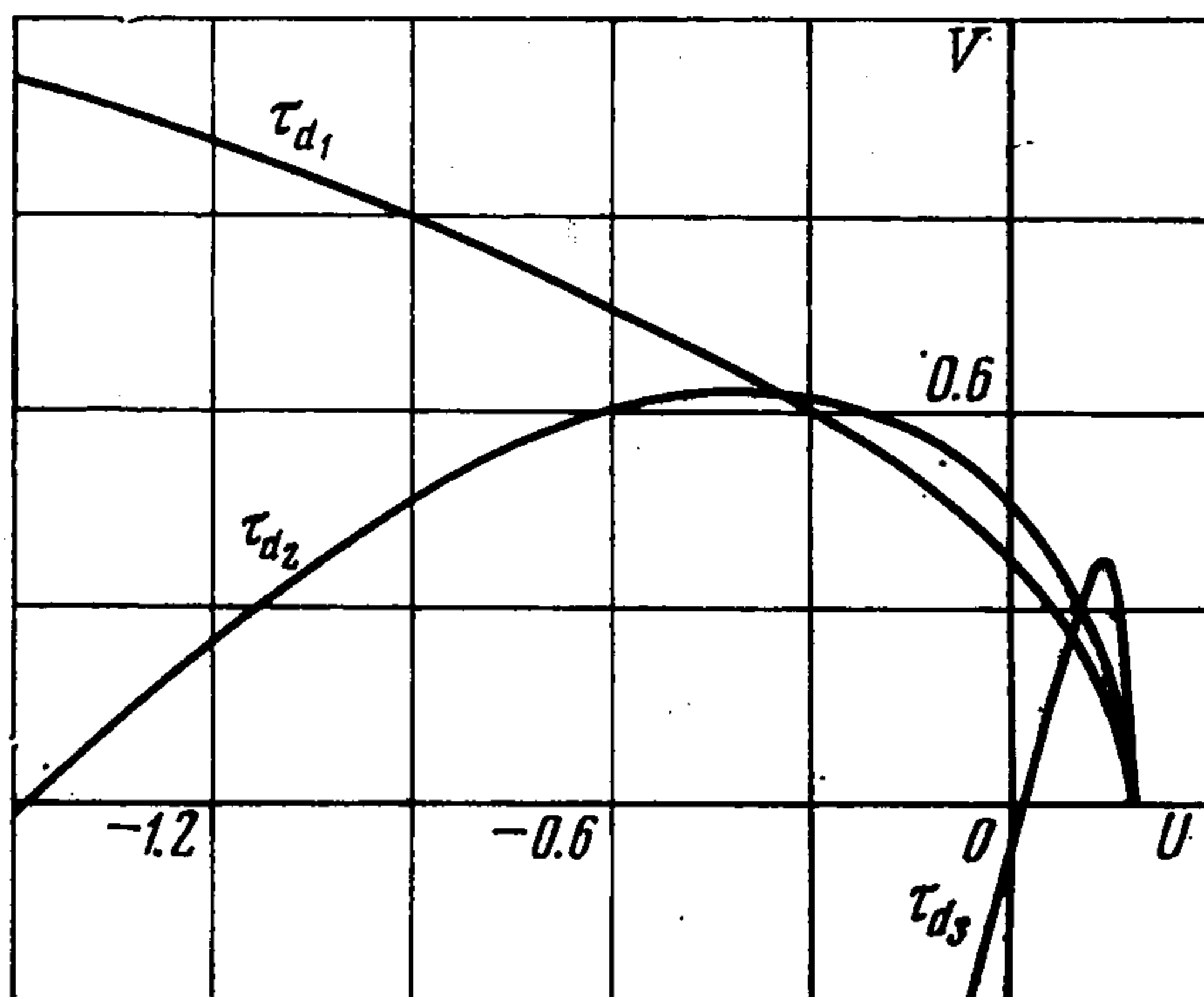
$$(3.3) \quad \Omega_1 = -y^2 + \Omega_3 \frac{y \sin y}{1 - \cos y}, \quad \Omega_2 = \Omega_3 \frac{y^2}{1 - \cos y} \quad (0 \leq y < \infty)$$

Из анализа функции (3.2), следует, что в области $\Omega_1 > \Omega_2$ приращение аргумента функции (3.1) на контуре Γ_2 при $R \rightarrow \infty$ равно нулю. Следовательно, в области $\Omega_1 > \Omega_2$ функция (3.1) имеет корень в правой полуплос-

кости. Анализ показал также, что в области, заключенной между поверхностью (3.3), когда $0 \leq y < 2\pi$, и плоскостью $\Omega_1 = \Omega_2$ приращение аргумента функции (3.1) на контуре Γ_2 равно -2π . Следовательно, в этой области приращение аргумента функции (3.1) на контуре $\Gamma_1 + \Gamma_2$ равно нулю, и функция (3.1) не имеет там корней с положительной действительной частью. Значит, область, заключенная между поверхностью (3.3) и плоскостью $\Omega_1 = \Omega_2$, и является искомой областью устойчивости.



Фиг. 3



Фиг. 4

Полученные данные об областях устойчивости в параметрическом пространстве $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ позволяют исследовать влияние идеального регулирования на устойчивость среднего стационарного режима с температурой θ_2° . В отсутствие регулирования ($d = 0$) среднему стационарному режиму соответствуют некоторые значения Ω_1^* , Ω_2^* , Ω_3^* . Точка $A = (\Omega_1^*, \Omega_2^*, \Omega_3^*)$ находится вне области устойчивости. С ростом параметра d величина Ω_1^* не изменяется, а величины Ω_2^* и Ω_3^* увеличиваются, поэтому точка A будет перемещаться на плоскости $\Omega_1 = \Omega_1^*$ по направлению к области устойчивости, размеры которой будут также увеличиваться. Изменение взаимного расположения области устойчивости и точки A иллюстрируется фиг. 3 на плоскости $\Omega_3 = \Omega_3^*$ для трех различных значений параметра стабилизации d . Точкам A_1 , A_2 , A_3 и областям устойчивости, заключенным между прямой $\Omega_1 = \Omega_2$ и кривыми 1, 2, 3, соответствуют значения $d_1 = 0$, $d_2 = 7.9$, $d_3 = 12$. Область устойчивости для $d = 0$ заштрихована. Видно, что средний режим становится устойчивым при конечном значении параметра стабилизации d , превышающем критическое значение d_c , при котором точка попадает на границу области устойчивости — прямую $\Omega_1 = \Omega_2$. Нетрудно убедиться, что соотношение $\Omega_1^* = \Omega_2^*$ совпадает с уравнением для определения d_c , полученным в п. 2. Следовательно, стабилизация среднего неустойчивого режима происходит при переходе этого режима в нижний режим.

Аналогичным методом исследуется устойчивость и двух других стационарных режимов при различных параметрах стабилизации. Можно показать, что верхнее стационарное состояние остается устойчивым вплоть

до своего исчезновения, т. е. до достижения параметром стабилизации значения $d = d_1$ (см. фиг. 2), нижнее же стационарное состояние, когда переходит в среднее при $d = d_c$, теряет устойчивость и становится неустойчивым.

Отметим, что при уменьшении параметра d от нуля точка A будет удаляться от области устойчивости, а размер самой области сокращаться. Поэтому выбором отрицательных значений параметра d добиться стабилизации среднего режима невозможно.

Остановимся на вопросе о выборе величины параметра стабилизации d . Как уже говорилось, если $d > d_c$, то осуществляется стабилизация оптимального температурного режима. Численное решение нестационарной нелинейной системы (1.1) — (1.4) показало (см. ниже п. 5), что предельно-допустимый уровень конечных возмущений возрастает с ростом величины параметра стабилизации. Например (см. фиг. 2), при $d = d_2$ стационарный режим с температурой θ_2° устойчив по отношению к возмущениям температуры порядка $\Delta\theta$. Если возмущения больше предельно-допустимого уровня, то реактор переходит в верхний стационарный режим. Таким образом, выбор большого значения параметра стабилизации в системе регулирования более предпочтителен с той точки зрения, что стабилизируемый оптимальный стационарный режим будет устойчив по отношению к возмущениям большего масштаба.

4. Влияние времени запаздывания. Исследуем влияние времени запаздывания τ_d в системе регулирования на устойчивость стабилизируемого режима. Рассмотрим случай, когда параметр стабилизации $d > d_c$, так что при идеальном регулировании режим $\theta^\circ = \theta_2^\circ$ оказывается устойчивым. Будем увеличивать время запаздывания от нуля и определять приращение аргумента функции (2.7) на контуре Γ_2 при каждом из значений τ_d . Годографы вектора $M = \Psi(iy) = V + iV$ ($0 \leq y$) при разных значениях $\tau_{d1} < \tau_{d2} < \tau_{d3}$ показаны на фиг. 4. Видно, что при $\tau_{d1} = 0$ приращение аргумента функции (2.7) на интервале $(0, R)$ при $R \rightarrow \infty$ равно $-\pi$, и в силу симметрии годографа относительно действительной оси полное приращение аргумента на контуре Γ_2 равно -2π . Следовательно, приращение аргумента на всем контуре Γ при $\tau_{d1} = 0$ равно нулю, и функция $\Psi(s)$ не имеет нулей в правой полуплоскости, т. е. рассматриваемый стационарный режим устойчивый, что соответствует результатам, полученным ранее [1].

С увеличением времени запаздывания вид годографа изменяется. Оказывается, что существует критическое значение $\tau_d = \tau_d^*$, такое, что при $\tau_d > \tau_d^*$ приращение аргумента функции $\Psi(s)$ на контуре Γ_2 равно 2π , а полное приращение -4π . Следовательно, при $\tau_d > \tau_d^*$ регулируемый стационарный режим становится неустойчивым. Критическому значению времени запаздывания τ_d^* отвечает годограф, который проходит через точку $(0, 0)$. Из этого условия, приравнявая нулю действительную и мнимую части функции W , получим

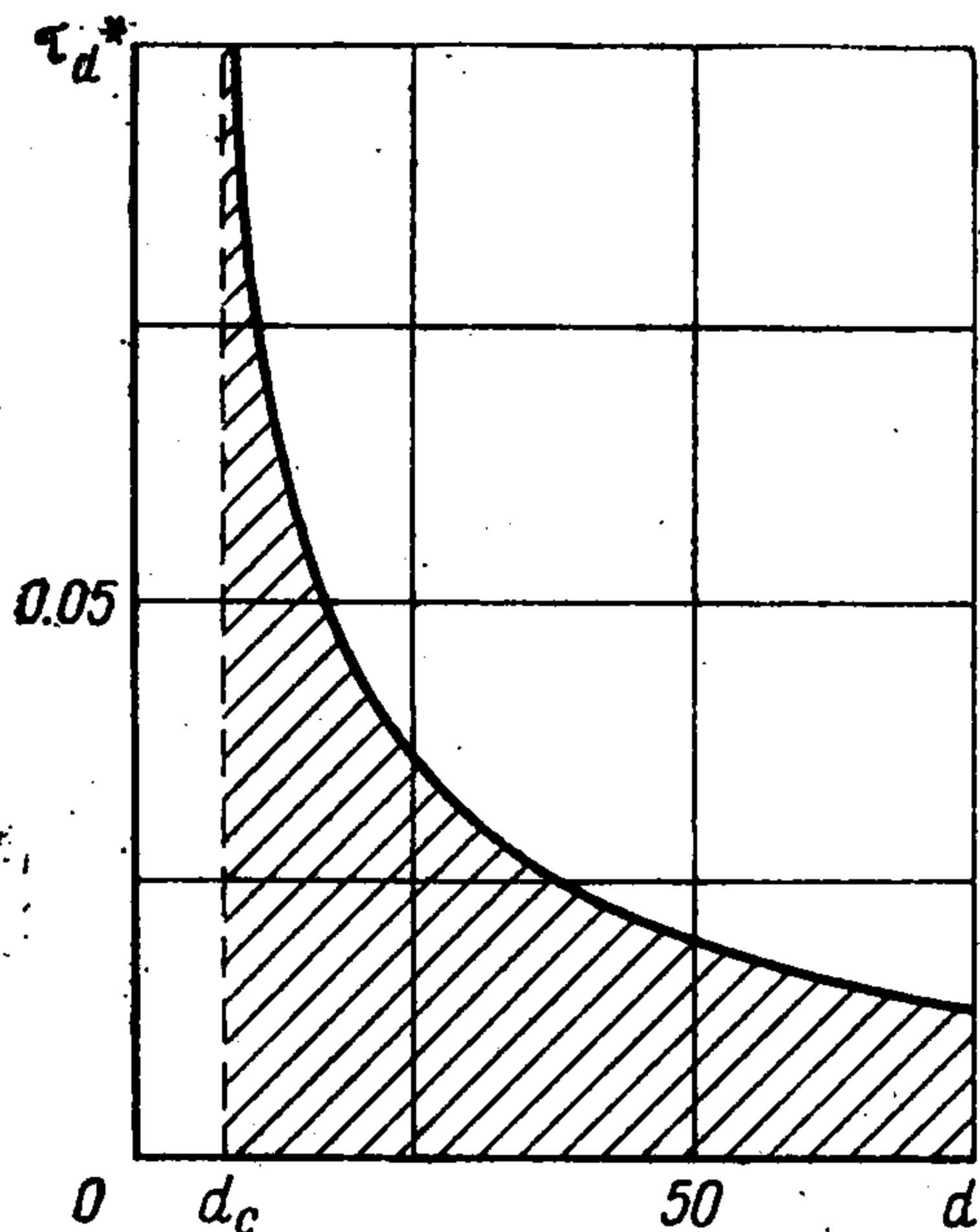
$$(4.1) \quad -y^2 + a_4 + [a_5 \cos(yv\tau_d^*) - a_6] \frac{\sin y}{y} =$$

$$\begin{aligned}
 & -a_5 \sin(yv^\circ \tau_d^*) \frac{1 - \cos y}{y} + a_1 y \sin(yv^\circ \tau_d^*) + a_3 \cos(yv^\circ \tau_d^*) = 0 \\
 & y [a_1 \cos(yv^\circ \tau_d^*) + a_2] + [a_6 - a_5 \cos(yv^\circ \tau_d^*)] \frac{1 - \cos y}{y} - \\
 & - \left[a_3 + a_5 \frac{\sin y}{y} \right] \sin(yv^\circ \tau_d^*) = 0
 \end{aligned}$$

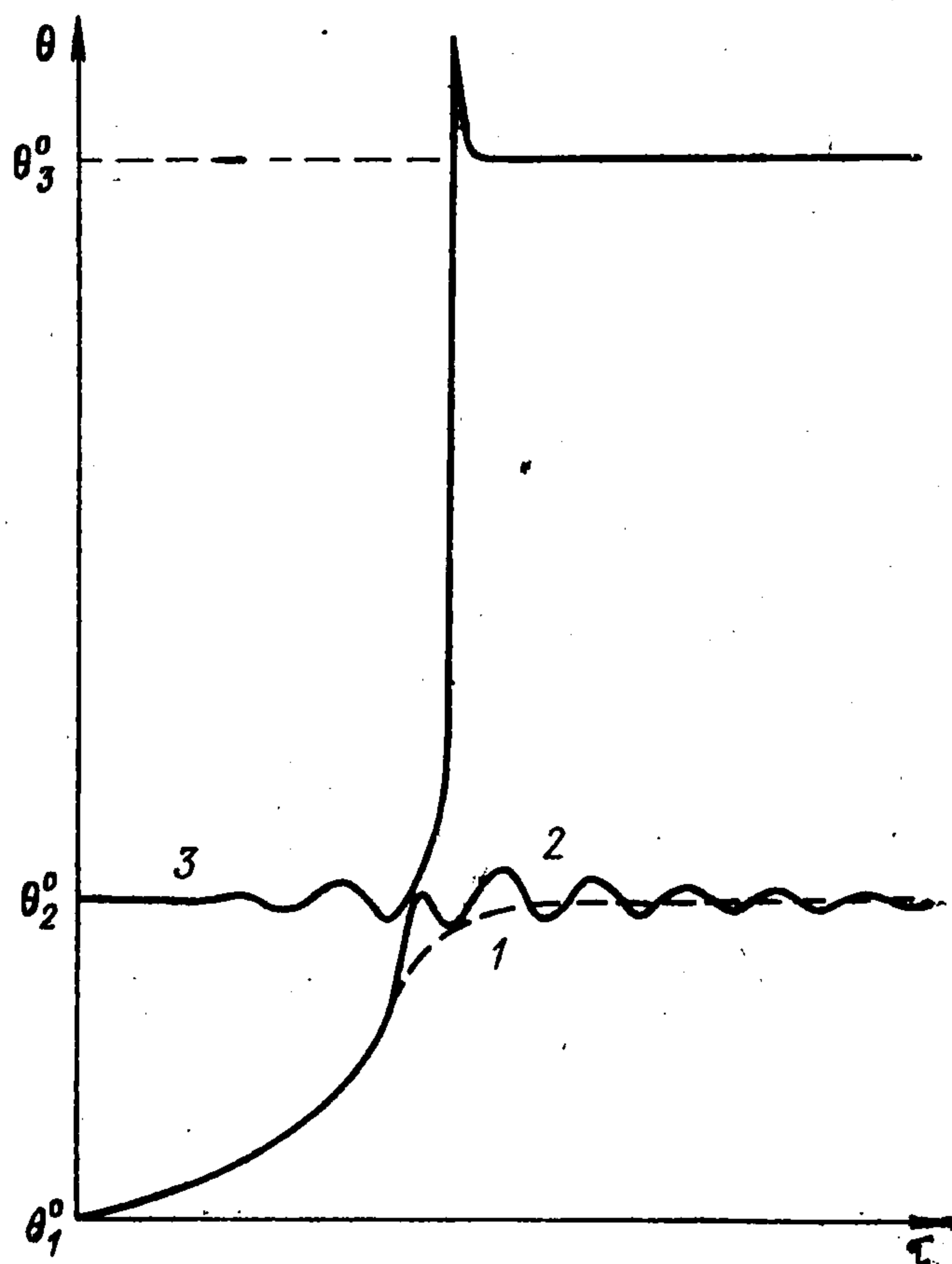
Из системы уравнений (4.1) можно найти критическое значение времени запаздывания τ_d^* как функцию параметра стабилизации d .

Результаты численного решения системы (4.1) представлены на фиг. 5. Видно, что критическое время запаздывания падает с ростом параметра стабилизации. Кривая $\tau_d^* = \tau_d^*(d)$ (см. фиг. 5) разбивает всю область значений параметров d и τ_d на две области. Заштрихованная область определяет значения параметра стабилизации и времени запаздывания, при которых стабилизируемый стационарный режим устойчив.

Для каждого значения времени запаздывания в системе регулирования существует верхняя граница значений параметра стабилизации, обеспечивающих стабилизацию.



Фиг. 5



Фиг. 6

цию неустойчивого стационарного режима. Таким образом, слишком большие времена запаздывания приводят к потере устойчивости.

Напомним, что выше было установлено, что нестабильность параметров реактора и связанные с этим возмущения температуры в реакторе накладывают ограничение снизу на параметр стабилизации в системе регулирования. Теперь видно, что учет времени запаздывания устанавливает верхнюю грань значений параметра стабилизации. Очевидно, что чем большим временем запаздывания обладает система регулирования, тем меньшим должен быть уровень возмущений параметров реактора для успешной стабилизации стационарного режима.

Таким образом, исследования, проведенные в данной работе, позволяют, исходя из характеристик рассматриваемого химического реактора, дать конкретные рекомендации относительно конструктивных параметров

системы регулирования, которая сможет обеспечить стабилизацию оптимального неустойчивого стационарного режима.

5. Результаты численного решения нелинейной задачи. С целью исследования нестационарного поведения реактора и выхода его на стационарный режим решалась численно с помощью ЭВМ задача (1.1) — (1.4). Некоторые результаты этого расчета представлены на фиг. 6. Кривые 1 и 2 показывают переход реактора на стабилизированный режим из нижнего стационарного состояния, когда в момент времени $\tau=0$ включается пропорциональное регулирование. Кривая 1 соответствует случаю, когда параметр стабилизации $d > d_c$ и осуществляется идеальное регулирование, т. е. $\tau_d=0$. Как видно, в этом случае выход на режим является монотонным.

Для кривой 2 параметры d и τ_d выбраны так, что точка (d, τ_d) лежит в заштрихованной области на фиг. 5. Как уже указывалось, в этом случае регулируемый режим устойчив. Таким образом, появление времени запаздывания приводит к тому, что выход на стабилизированный режим становится колебательным. Численный счет показывает, что амплитуда таких затухающих колебаний зависит от параметров d и τ_d . Наличие этих температурных колебаний в реакторе необходимо учитывать с точки зрения возможности перегревов.

Кривая 3 иллюстрирует поведение реактора, когда точка (d, τ_d) находится вне заштрихованной области на фиг. 5. В этом случае, как установлено, стабилизируемый режим неустойчив. Методом, аналогичным п. 4, можно показать, что время запаздывания не влияет на устойчивость верхнего стационарного режима. Видно (фиг. 6), что в этом случае реактор покидает регулируемый режим и переходит в верхнее устойчивое стационарное состояние. Если при этом параметр стабилизации $d > d_1$ (фиг. 2), то верхний стационарный режим существовать не будет и, как показывают численные решения на ЭВМ, в реакторе наблюдаются незатухающие колебания.

Поступила 17 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С. О режимах работы химического реактора идеального вытеснения с интегральным учетом тепловыделения. ПМТФ, 1969, № 1.
2. Бородуля В. А., Гупало Ю. П. Математические модели химических реакторов с кипящим слоем. Минск, «Наука и техника», 1976.
3. Сливко М. Г., Шеплев В. С. Моделирование каталитических процессов в псевдоожигенном слое. Кинетика и катализ, 1970, т. 11, вып. 2.
4. Bukur D. B., Wittmann C. V., Amundson N. R. Analysis of a model for a nonisothermal continuous fluidized bed catalytic reactor. Chem. Engng Sci., 1974, vol. 29, No. 5, p. 1173.
5. Bukur D. B., Amundson N. R. Modelling of fluidized bed reactors — II. Uniform catalyst temperature and concentration. Chem. Engng Sci., 1975, vol. 30, No. 8, p. 847.
6. Bukur D. B., Amundson N. R. Mathematical modelling of fluidized bed reactors — III. Axial dispersion model. Chem. Engng Sci., 1975, vol. 30, No. 9, p. 1159.
7. Aris R., Amundson N. R. Stability of some chemical systems under control. Chem. Engng Progr., 1957, vol. 53, No 5, p. 227.
8. Aris R., Amundson N. R. An analysis of chemical reactor stability and control — I. The possibility of local control, with perfect or imperfect control mechanisms. Chem. Engng Sci., 1958, vol. 7, No. 3, p. 121.
9. Aris R., Amundson N. R. An analysis of chemical reactor stability and control — II. The evolution of proportional control. Chem. Engng Sci., 1958, vol. 7, No. 3, p. 132.
10. Aris R., Amundson N. R. An analysis of chemical reactor stability and control — III. The principles of programming reactor calculations. Some extensions. Chem. Engng Sci., 1958, vol. 7, No. 3, p. 148.
11. Nemanic D. J., Tierney J. M., Aris R., Amundson N. R. An analysis of chemical reactor stability and control — IV. Mixed derivative and proportional control. Chem. Engng Sci., 1959, vol. 11, No. 3, p. 199.
12. Oh S. H., Schmitz R. A. A study of the control of a tubular reactor with recycle. Chem Engng Commun., 1974, vol. 1, p. 199.