Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 533.6.011.8

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВ И НЕОБРАТИМАЯ ТЕРМОДИНАМИКА

С. П. Баканов, В. И. Ролдугин

(Москва)

На примере течения газа в плоскопараллельном канале в условиях, когда длина свободного пробега сравнима с расстоянием между стенками, проводится кинетическое обоснование классического выражения для интегрального производства энтропии. На основании выражения для локального производства энтропии получена система моментных уравнений для вычисления коэффициентов разложения функции распределения по полиномам скорости. Проводится решение полученной системы для течения простого газа, вызванного продольными градиентами давления и температуры. Прямым расчетом показано, что полученное таким путем приближенное решение приводит к точному выполнению соотношения симметрии Онзагера для кинетических коэффициентов.

Для получения замкнутой системы уравнений переноса — уравнений гидродинамики — широко используется метод Чепмена — Энскога, применимый, как известно, в случаях, когда состояние газа слабо отличается от равновесного (например, когда градиенты макроскопических величин невелики). Последнее условие сводится к требованию малости числа Кнудсена. При достаточно высоких разрежениях метод Чепмена — Энскога в его классической форме становится неприменимым.

Часто возникают задачи с двумя характерными геометрическими размерами. В этом случае можно построить обобщенный метод Чепмена — Энскога с двумя числами Кнудсена, одно из которых мало, а другое может принимать произвольные значения. При этом физически очевидно требование, чтобы при условии малости обоих чисел Кнудсена обобщенный метод переходил в классический метод Чепмена — Энскога.

1. Запишем уравнение Больцмана в виде

$$\mathbf{v}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} = I(f_\alpha, f_\alpha) \qquad (1.1)$$

где $I(f_\alpha, f_\alpha)$ — больцмановский интеграл столкновений. Будем искать решение уравнения (1.1) в форме

$$f_\alpha = f_\alpha^\circ (1 + \varphi_\alpha)$$

Здесь φ_α — малая добавка, пропорциональная «продольному» числу Кнудсена (для краткости в дальнейшем будем называть терминами «продольное» и «поперечное» числа Кнудсена соотношения $\mathrm{Kn}_1 = \lambda/S$ и $\mathrm{Kn}_2 = \lambda / L$ соответственно, где S и L — характерные геометрические масштабы задачи, λ — длина свободного пробега молекул газа).

После линеаризации приходим к уравнению

$$v_{\alpha x} \frac{\partial f_\alpha^\circ}{\partial x} + v_{\alpha z} \frac{\partial f_\alpha^\circ}{\partial z} + v_{\alpha x}\varphi_\alpha \frac{\partial f_\alpha^\circ}{\partial x} + f_\alpha^\circ v_{\alpha x} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x} = I(f_\alpha^\circ, f_\alpha^\circ) + f_\alpha^\circ I(\varphi_\alpha) \qquad (1.2)$$

(z, x) — продольная и поперечная координаты. Цепочка последовательных (по Kn_1) приближений имеет вид

$$v_{\alpha x}\frac{\partial f_\alpha{}^\circ}{\partial x} = I(f_\alpha{}^\circ, f_\alpha{}^\circ) \tag{1.3}$$

$$v_{\alpha z}\frac{\partial f_\alpha{}^\circ}{\partial z} + f_\alpha{}^\circ v_{\alpha x}\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x} + v_{\alpha x}\varphi_\alpha\frac{\partial f_\alpha{}^\circ}{\partial x} = f_\alpha{}^\circ I(\varphi_\alpha) \tag{1.4}$$

Уравнению (1.3) удовлетворяет локальное максвелловское распределение, параметры которого не зависят от x. Его используем в качестве нулевого приближения к искомому решению. Решение уравнения (1.4) пригодно при произвольных значениях поперечного числа Кнудсена и позволяет вычислить макрохарактеристики течения при произвольных разрежениях и на любых расстояниях от ограничивающих газ поверхностей. Точное решение уравнения (1.4) может быть получено лишь для некоторых специальных случаев [1]. Поэтому обычно при рассмотрении таких задач прибегают к разного рода приближенным методам. Здесь воспользуемся для этой цели методом моментов.

2. Прежде всего покажем, что термодинамика необратимых процессов может с успехом применяться к изучению явлений, где существенную роль играют свойства газа внутри кнудсеновских слоев у поверхности раздела газ — твердое тело.

Применим уравнение (1.4) к рассмотрению течения газа в плоскопараллельном канале длиной S и шириной $2L$. Умножим обе части уравнения на φ_α и проинтегрируем по импульсам $\mathbf{p}_\alpha$ молекул. Имеем

$$\int \varphi_\alpha v_{\alpha z} f_\alpha{}^\circ \frac{\partial \ln f_\alpha{}^\circ}{\partial z} d\mathbf{p}_\alpha + \int \varphi_\alpha v_{\alpha x} f_\alpha{}^\circ \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x} d\mathbf{p}_\alpha = \int \varphi_\alpha f_\alpha{}^\circ I(\varphi_\alpha)\, d\mathbf{p}_\alpha \tag{2.1}$$

Умножим обе части уравнения (2.1) на постоянную Больцмана, просуммируем по всем сортам молекул α и усредним по объему канала. Обозначим символом $\Delta\sigma_t$ производство энтропии, отнесенное к единице объема газа внутри канала. Получим

$$\sum_\alpha \frac{k}{2LS}\int_0^S\int_{-L}^{L}\left(\varphi_\alpha v_{\alpha z}\frac{\partial \ln f_\alpha{}^\circ}{\partial z} + v_{\alpha x}\frac{1}{2}\frac{\partial \varphi_\alpha{}^2}{\partial x}\right) f_\alpha{}^\circ d\mathbf{p}_\alpha dz dx = -\Delta\sigma_t \tag{2.2}$$

Подставим вместо $f_\alpha{}^\circ$ выражение

$$\exp\left[\frac{m_\alpha}{kT}\left(\mu_\alpha - \frac{1}{2}v_\alpha{}^2\right)\right]$$

где μ_α — химический потенциал компонента α, m_α — масса молекулы, и введем обозначения для векторов плотности потока массы $\mathbf{J}_\alpha{}^m(x)$ и энергии $\mathbf{J}_\alpha{}^u(x)$. Тогда вместо (2.2) имеем

$$\frac{1}{2LS}\sum_\alpha\left\{\int_0^S\int_{-L}^{L}\left[J_{\alpha z}{}^m(x)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mu_\alpha}{T}\right) - J_{\alpha z}{}^u(x)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{T}\right)\right]dz dx + \right.$$

$$\left. + kS\int\int_{-L}^{L} f_\alpha{}^\circ v_{\alpha x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi_\alpha{}^2}{2}\right) d\mathbf{p}_\alpha dx\right\} = -\Delta\sigma_t$$

$$\mathbf{J}_\alpha{}^m(x) = m_\alpha \int \varphi_\alpha f_\alpha{}^\circ \mathbf{v}_\alpha d\mathbf{p}_\alpha$$

$$\mathbf{J}_\alpha{}^u(x) = \frac{1}{2} m_\alpha \int \varphi_\alpha f_\alpha{}^\circ \mathbf{v}_\alpha v_\alpha{}^2 d\mathbf{p}_\alpha$$

Обозначив далее символами $\overline{\mathbf{J}_\alpha{}^m}$ и $\overline{\mathbf{J}_\alpha{}^u}$ усредненные по сечению канала значения потоков массы и энергии, имеем окончательно

$$\Delta\sigma_t = \sum_\alpha \left[(\bar{\mathbf{J}}_\alpha^u - \mu_\alpha \bar{\mathbf{J}}^m) \frac{\nabla T}{T^2} + \bar{\mathbf{J}}^m \frac{\nabla \mu_\alpha}{T} \right] - \tag{2.3}$$

$$- \frac{k}{2L} \sum_\alpha \int f_\alpha{}^\circ v_{\alpha x} \frac{\varphi_\alpha{}^2}{2} d\mathbf{p}_\alpha \Bigg|_{-L}^{L}, \quad \nabla T = \frac{T(S) - T(0)}{S}$$

$$\Delta\mu_\alpha = \frac{\mu_\alpha(S) - \mu_\alpha(0)}{S}$$

Таким образом, выражение для производства энтропии в газе отличается от известного классического выражения [2] дополнительным слагаемым, связанным со свойствами газа внутри кнудсеновских слоев у стенок канала.

Выражение (2.3) определяет производство энтропии, связанное только со столкновениями молекул газа между собой. В рассматриваемом случае существенную роль играет взаимодействие газа со стенками канала. Оно также приводит к некоторой величине производства энтропии в газе, которую необходимо добавить к правой части выражения (2.3). Эту величину можно вычислить следующим образом. На поверхность стенки $x = L$ падают молекулы с распределением $f_\alpha{}^+$, а рассеянные стенкой молекулы несут распределение f_α^- (верхний индекс указывает знак x-составляющей скорости молекул). Если закон взаимодействия газа со стенкой отличен от зеркального, то эти функции оказываются существенно различными. Таким образом, падающие на стенку молекулы несут поток энтропии с плотностью $\mathbf{J}^s(0)$, а отраженные от стенки — с плотностью $\mathbf{J}^s(\delta)$

$$\mathbf{J}^s(0) = -k \sum_\alpha \int\limits_{v_x > 0} \mathbf{v} f_\alpha{}^+ \ln f_\alpha{}^+ d\mathbf{p}_\alpha$$

$$\mathbf{J}^s(\delta) = -k \sum_\alpha \int\limits_{v_x < 0} \mathbf{v} f_\alpha{}^- \ln f_\alpha{}^- d\mathbf{p}_\alpha$$

где δ — условная толщина слоя вещества стенки, в котором происходит описываемая трансформация функции распределения. Запишем уравнение баланса энтропии

$$\operatorname{div} \mathbf{J}^s = \Delta\sigma_w{}^*$$

где $\Delta\sigma_w{}^*$ — производство энтропии в слое δ на единицу объема слоя. Проинтегрируем это равенство по объему слоя $S\delta$ и отнесем к объему канала. Получим для производства энтропии в поверхностном слое стенки $x = L$ выражение

$$\Delta\sigma_w = \frac{k}{2L} \sum_\alpha \left\{ \int\limits_{v_x < 0} v_{\alpha x} f_\alpha{}^- \ln f_\alpha{}^- d\mathbf{p}_\alpha + \int\limits_{v_x > 0} v_{\alpha x} f_\alpha{}^+ \ln f_\alpha{}^+ d\mathbf{p}_\alpha \right\} =$$

$$= \frac{k}{2L} \sum_\alpha \int v_{\alpha x} f_\alpha \ln f_\alpha d\mathbf{p}_\alpha$$

Аналогичный вид имеет выражение для производства энтропии в поверхностном слое стенки $x = -L$. Имея в виду разницу в знаках составляющей скорости v_x, получим окончательно для производства энтропии при соударениях газовых молекул со стенками канала выражение

$$\Delta\sigma_w = \frac{k}{2L}\sum_\alpha \int v_{\alpha x} f_\alpha \ln f_\alpha \, d\mathbf{p}_\alpha \Big|_{-L}^{L} = \frac{k}{2L}\sum_\alpha \int v_{\alpha x} f_\alpha^\circ \frac{\varphi_\alpha^2}{2} d\mathbf{p}_\alpha \Big|_{-L}^{L} \tag{2.4}$$

Величина полного производства энтропии в единице объема канала $\Delta\sigma = \Delta\sigma_t + \Delta\sigma_w$ имеет классический вид билинейной комбинации термодинамических сил и потоков. Этот результат положительно решает вопрос о законности применения термодинамики необратимых процессов к задачам, где существенным образом учитываются свойства газа внутри кнудсеновских слоев. В частности, сохраняют свою форму термодинамические уравнения движения. Так, для простого газа имеем

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}} &= L_{11}\frac{\nabla T}{T^2} + L_{12}\frac{\nabla p}{T} \\ \bar{\mathbf{u}} &= \frac{\mathbf{J}^m}{\rho} = L_{21}\frac{\nabla T}{T^2} + L_{22}\frac{\nabla p}{T} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Для бинарной газовой смеси

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}} &= \alpha_{11}\frac{\nabla T}{T^2} + \alpha_{12}\frac{\nabla c_1}{T} + \alpha_{13}\frac{\nabla p}{T} \\ \overline{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)}\, p &= \alpha_{21}\frac{\nabla T}{T^2} + \alpha_{22}\frac{\nabla c_1}{T} + \alpha_{23}\frac{\nabla p}{T} \\ \bar{\mathbf{v}}_0 + \frac{m_2 - m_1}{\rho}\frac{n_1 n_2}{n}\overline{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)} &= \alpha_{31}\frac{\nabla T}{T^2} + \alpha_{32}\frac{\nabla c_1}{T} + \alpha_{33}\frac{\nabla p}{T} \\ \mathbf{q} = \sum_\alpha \left(\mathbf{J}_\alpha^u - \frac{5}{2}\frac{kT}{m_\alpha}\mathbf{J}_\alpha^m\right), &\quad \mathbf{v}_0 = \frac{1}{\rho}\sum \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \\ \mathbf{u}_\alpha = \frac{\mathbf{J}_\alpha^m}{\rho_\alpha}, &\quad c_\alpha = \frac{n_\alpha}{n} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Здесь $\mathbf{q}$ — вектор плотности потока тепла, $\mathbf{u}_\alpha$ — массовая скорость молекул сорта α, $\mathbf{v}_0$ — средняя массовая скорость смеси, ρ — плотность, p — давление смеси, c_α — концентрация частиц сорта α, n — полное число частиц в единице объема. Отметим, что комбинация

$$\mathbf{v}_0 + \frac{m_2 - m_1}{\rho}\frac{n_1 n_2}{n}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = \frac{1}{n}\sum_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha$$

составляет среднюю молярную скорость смеси.

3. Как известно, при построении моментов кинетического уравнения возникает вопрос о выборе полиномов скорости, которые следует использовать для этой цели. До настоящего времени этот вопрос не получил сколько-нибудь удовлетворительного освещения в литературе. Поэтому уместно предложить один из критериев такого выбора. Будем основываться на принципах термодинамики необратимых процессов.

Запишем уравнение баланса энтропии в газе в стационарном случае

$$\operatorname{div} \mathbf{J}^s = \Delta\sigma \tag{3.1}$$

Можно показать, что равенство (3.1) эквивалентно соотношению

$$\sum_\alpha \int d\mathbf{p}_\alpha \varphi_\alpha f_\alpha^\circ \left[v_{\alpha z} \frac{\partial \ln f_\alpha^\circ}{\partial z} + v_{\alpha x} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x} - I(\varphi_\alpha) \right] = 0 \tag{3.2}$$

Точное решение уравнения (1.4) удовлетворяет также и равенству (3.2). Потребуем, чтобы искомое приближенное решение также удовлетворяло (3.2). Рассмотрим простой газ. Равенство (3.2) перепишем в виде

$$\int d\mathbf{p} \varphi f^\circ \left[v_z \frac{\partial \ln f^\circ}{\partial z} + v_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] = \int d\mathbf{p} \varphi I(\varphi) \tag{3.3}$$

Будем искать решение уравнения (1.4) в виде ряда по некоторым полиномам скорости молекул $\mathbf{c}$

$$\varphi = \sum_i a_i(x) P_i(\mathbf{c}), \quad \mathbf{c} = \mathbf{v} \Big/ \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

Подставляя φ в левую часть равенства (3.3), имеем

$$\int d\mathbf{p} \sum_i a_i(x) f^\circ P_i(\mathbf{c}) \left[v_z \frac{\partial \ln f^\circ}{\partial z} + v_x \sum_k \frac{\partial a_k(x)}{\partial x} P_k(\mathbf{c}) \right] = \sum_i a_i J_i \tag{3.4}$$

$$J_i = \int d\mathbf{p} f^\circ P_i(\mathbf{c}) \left[v_z \frac{\partial \ln f^\circ}{\partial z} + v_x \sum_k \frac{\partial a_k(x)}{dx} P_k(\mathbf{c}) \right]$$

т. е. локальное производство энтропии также представляется в виде билинейной комбинации сил a_i и потоков J_i. Следовательно, и локальные термодинамические уравнения движения можно записать в форме

$$J_i = \sum_l L_{il} a_l \tag{3.5}$$

причем коэффициенты L_{il} удовлетворяют соотношению симметрии Онзагера. Сравнивая (3.4) и (3.5), можно установить, что уравнения (3.5) представляют собой моментные уравнения, полученные из уравнения (1.4) с помощью тех же полиномов, которыми аппроксимирована функция φ, а коэффициенты L_{il} равны

$$L_{il} = \int f^\circ P_i I(P_l) \, d\mathbf{p}$$

Такой способ построения моментных уравнений представляется предпочтительнее обычного формального, когда применяются произвольные полиномы скорости, ибо он заведомо обеспечивает выполнение условия баланса энтропии. Это позволяет, воспользовавшись равенством (3.3), повторить рассуждения п. 2 также и для приближенного решения $\varphi(x, \mathbf{c})$ и получить уравнения (2.5) и (2.6) с коэффициентами, удовлетворяющими принципу Онзагера.

4. Применим указанный способ для нахождения функции $\varphi(x, \mathbf{c})$ и макрохарактеристик течения газа в плоском канале, где поддерживаются малые независимые продольные градиенты давления и температуры. Воспользуемся методом полупространственных разложений [3, 4]. Следуя

Максвеллу, будем считать, что функция распределения молекул вблизи поверхности стенок канала терпит разрыв при $v_x = 0$. Потребуем, однако, чтобы в объеме газа она была непрерывна и переходила в известное решение Чепмена — Энскога. Этим определяется вид аппроксимации функции $\varphi(x, \mathbf{c})$

$$\varphi^{\pm} = c_z\,[a_0^{\pm}(x) + c_x a_1^{\pm}(x) + (c^2 - {}^5/_2)\,a_2^{\pm}(x) + (c_x^2 - {}^1/_2)\,a_3^{\pm}(x)]$$

В качестве граничных условий примем максвелловские: доля ε молекул отражается от поверхности стенок диффузно, доля $1-\varepsilon$ — зеркально. Опуская детали решения (см. п. 5), приведем полученные выражения для средней скорости, плотности потока импульса и плотности потока тепла

$$u_z(x) = \frac{1}{2\eta}\left[(x^2 - L^2) - \frac{5\pi}{8}\lambda L\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}F_1(x,\varepsilon)\right]\nabla_z p - \frac{15}{18}\frac{\eta}{\rho}F_2(x,\varepsilon)\nabla_z \ln p + \frac{3}{4}\frac{\eta}{\rho}F_3(x,\varepsilon)\nabla_z \ln T \tag{4.1}$$

$$\sigma_{xz} = -m\int d\mathbf{p}\,v_x v_z \varphi(x) f^\circ = x\nabla_z p \tag{4.2}$$

$$q_z(x) = \frac{3}{2}\frac{\eta}{\rho}\left[1 + \frac{1}{2}\Phi_1(x,\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\,\mathrm{Kn}_2\Phi_2(x,\varepsilon)\right]\nabla_z p - \varkappa\left[1 + \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\,\mathrm{Kn}_2\,\Phi_3(x,\varepsilon)\right]\nabla_z T \tag{4.3}$$

где $\varkappa$ и η — коэффициент теплопроводности и динамической вязкости газа. При выводе этих соотношений газ предполагался одноатомным, молекулы моделировались непроницаемыми шарами, функции $F_i(x, \varepsilon)$ и $\Phi_i(x, \varepsilon)$ приведены в п. 5.

Рассмотрим равенство (4.1). Первые два слагаемых достаточно подробно проанализированы в [1], где аналогичное выражение получено методом элементарных решений в рамках модели Батнагара — Гросса — Крука. Третье слагаемое описывает явление теплового скольжения и состоит из трех составляющих:

1) величины, формально (при $\varepsilon \neq 0$) не зависящей от закона взаимодействия молекул газа со стенкой. Эта часть теплового скольжения была вычислена в известной работе Максвелла;

2) не учтенного Максвеллом скольжения, которое возникает из-за искажения функции распределения падающих на стенку молекул в результате их взаимодействия с отраженными от стенки;

3) связанного в этим эффекта появления локализованного в слое Кнудсена профиля скорости теплового скольжения. В результате микроскопическое и макроскопическое значения скорости теплового скольжения оказываются различными.

Сходство структуры второго и третьего членов правой части равенства (4.1) приводит к мысли о возможности интерпретации первого из них как скольжения, вызванного градиентом давления. Назовем его «бароскольжением» (в книге [1] этот эффект назван скольжением второго порядка).

Согласно принципу взаимности тепловому скольжению соответствует изотермический поток тепла, представленный выражением в первых квадратных скобках в правой части равенства (4.3). Составляющая его, не зависящая от координаты,— результат, приведенный в книге Чепмена и Каулинга,— так называемое объемное изотермическое тепло переноса. Другая часть изотермического тепла переноса локализована в слое Кнудсена. Она также зависит от закона взаимодействия молекул газа со стенкой. Аналогичную природу имеет и теплопроводность: ее объемная слагающая выражается обычным коэффициентом теплопроводности, поправка описывает теплопередачу в кинетическом пограничном слое.

Усредним (4.1) и (4.3) по сечению канала. Сравнение с уравнениями (2.5) позволяет записать для кинетических коэффициентов L_{ik} выражения

$$L_{11} = -\varkappa T^2\left[1 + \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\mathrm{Kn}_2\,\overline{\Phi}_3(\varepsilon, \mathrm{Kn}_2)\right]$$

$$L_{12} = \frac{3}{2}\frac{\eta}{\rho}T\left[1 + \frac{1}{2}\overline{\Phi}_1(\varepsilon, \mathrm{Kn}_2) + \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\mathrm{Kn}_2\,\overline{\Phi}_2(\varepsilon, \mathrm{Kn}_2)\right]$$

$$L_{21} = \frac{3}{4}\frac{\eta}{\rho}T\overline{F}_3(\varepsilon, \mathrm{Kn}_2)$$

$$L_{22} = -\frac{T}{2\eta}\left[\frac{2}{3}L^2 + \frac{5\pi}{8}L^2\mathrm{Kn}_2\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\overline{F}_1(\varepsilon, \mathrm{Kn}_2) + \frac{5}{9p}\frac{\eta}{\rho}\overline{F}_2(\varepsilon, \mathrm{Kn}_2)\right]$$

где чертой сверху обозначены средние по сечению канала значения соответствующих функций. Согласно принципу Онзагера $L_{12} = L_{21}$, т. е. должно выполняться равенство

$$\frac{\overline{F}_3}{2} = 1 + \frac{\overline{\Phi}_1}{2} + \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\mathrm{Kn}_2\overline{\Phi}_2 \tag{4.4}$$

Проведенный расчет (см. п. 5) подтвердил его выполнение для найденного приближенного решения (в предельном случае $\mathrm{Kn}_2 \gg 1$ этот результат получается аналитически, в общем же случае для подсчета коэффициентов использовалась вычислительная техника).

5. *Приложение.* В работе [4] подробно изложена процедура нахождения коэффициентов разложения функции $\varphi(x, c)$, аппроксимированной тремя полиномами скорости. Метод, примененный в данной работе, не отличается от упомянутого, за исключением количества полиномов, используемых для аппроксимации. Обозначим

$$x_{1,2} = a_0^+ \pm a_0^-, \quad x_{3,4} = a_1^+ \pm a_1^-, \quad x_{5,6} = a_2^+ \pm a_2^-, \quad x_{7,8} = a_3^+ \pm a_3^-$$

Для построения моментов кинетического уравнения используются полиномы

$$c_z, \quad c_xc_z, \quad c_z\left(c^2 - \frac{5}{2}\right), \quad c_z\left(c_x^2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$c_z\frac{c_x}{|c_x|}, \quad c_z\frac{c_x^2}{|c_x|}, \quad c_z\left(c^2 - \frac{5}{2}\right)\frac{c_x}{|c_x|}, \quad c_z\left(c_x^2 - \frac{1}{2}\right)\frac{c_x}{|c_x|}$$

В результате решения системы линейных дифференциальных уравнений получены выражения для $x_i(x)$

$$x_i(x) = 2\sum_{m,\,j=1}^{3}\frac{1}{|B_{ij}|}\gamma_{ij}(-1)^{j+m}A_mC_{mj}\times\begin{cases}\operatorname{sh}\alpha_jx, & i = 3, 6, 8\\ \operatorname{ch}\alpha_jx & i = 4, 5, 7\end{cases}$$

Здесь $|B_{ij}|$ — определитель, составленный из элементов B_{ij}

$$B_{1j} = \gamma_{3j}\operatorname{sh}\alpha_jL - \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\gamma_{4j}\operatorname{ch}\alpha_jL$$

$$B_{2j}=\gamma_{6j}\operatorname{sh}\alpha_jL-\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\gamma_{5j}\operatorname{ch}\alpha_jL$$

$$B_{3j}=\gamma_{8j}\operatorname{sh}\alpha_jL-\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\gamma_{7j}\operatorname{ch}\alpha_jL,\quad j=1,2,3$$

C_{mj} — минор определителя $|B_{ij}|$, полученный вычеркиванием m-й строки и j-го столбца.

Приведем для справок значения постоянных γ_{ij} $(\gamma_{5j}=1)$

$$\begin{aligned}
&\gamma_{31}=11.751,\quad \gamma_{41}=-19.4759,\quad \gamma_{61}=-0.4344,\quad \gamma_{71}=13.779\\
&\gamma_{81}=-9{,}0647\\
&\gamma_{32}=-3.1047,\quad \gamma_{42}=3{,}5278,\quad \gamma_{62}=-0{,}7640,\quad \gamma_{72}=2.5864\\
&\gamma_{82}=2.1941\\
&\gamma_{33}=19.5218,\quad \gamma_{43}=-25.7145,\quad \gamma_{63}=-0.6748,\quad \gamma_{73}=8.7753\\
&\gamma_{83}=-6.5084
\end{aligned}$$

Собственные значения равны

$$\alpha_1=0.80307/\lambda,\quad \alpha_2=1.5967/\lambda,\quad \alpha_3=3.7789/\lambda$$

Символом A_m обозначены комбинации

$$A_1=2L\,\nabla_z\ln p$$

$$A_2=\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\cdot\frac{3}{4}\frac{\eta}{\rho}\cdot\frac{8}{\sqrt{\pi}\,v}\left(\frac{2}{9}\nabla_z\ln p-\nabla_z\ln T\right)$$

$$A_3=-\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\cdot\frac{3}{4}\frac{\eta}{\rho}\cdot\frac{8}{\sqrt{\pi}\,v}\cdot\frac{8}{9}\nabla_z\ln p$$

Скорость газа и поток тепла

$$u_z(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{8}\bar v\left[x_1(x)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}x_4(x)\right]$$

$$q_z(x)=\frac{p}{8}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}\left[5x_5(x)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}x_4(x)+x_7(x)\right]$$

Подстановка значений $x_i(x)$ дает

$$\begin{aligned}
u_z(x)={}&\frac{\sqrt{\pi}}{8}\bar v\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\rho\bar v}{\eta}(x^2-L^2)\nabla_z\ln p-\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}(\sqrt{\pi}A_1+A_2+A_3)+\right.\\
&+\frac{1}{|B_{ij}|}\sum_{m,j=1}^{3}(-1)^{j+m}A_mC_{mj}\left[\left(\frac{4-\pi}{\sqrt{\pi}}\gamma_{4j}+1+\gamma_{7j}\right)\operatorname{ch}\alpha_jL-\right.\\
&\left.\left.-2\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\gamma_{4j}+1+\gamma_{7j}\right)\operatorname{ch}\alpha_jx\right]\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_z(x)={}&\frac{p}{4}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}\left\{\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}(5A_2+A_3)+\right.\\
&\left.+\frac{1}{|B_{ij}|}\sum_{m,j=1}^{3}(-1)^{m+j}A_mC_{mj}\left(5+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\gamma_{4j}+\gamma_{7j}\right)\operatorname{ch}\alpha_jx\right\}
\end{aligned}$$

Введя обозначения

$$D_{1j}=C_{1j},\quad D_{2j}=-{}^1/_5(C_{2j}-4C_{3j}),\quad D_{3j}=-C_{2j}$$

$$G_{1j}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}C_{1j},\quad G_{2j}=-\frac{5}{48}(C_{2j}-4C_{3j}),\quad G_{3j}=-\frac{3}{16}C_{2j}$$

$$M_j=-2\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\gamma_{4j}+1+\gamma_{7j}\right)\left(\frac{4-\pi}{\sqrt{\pi}}\gamma_{4j}+1+\gamma_{7j}\right)^{-1}$$

$$F_i = 1 + \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} \sum_j (-1)^j \frac{D_{ij}}{|B_{ij}|} \left(\frac{4-\pi}{\sqrt{\pi}} \gamma_{4j} + 1 + \gamma_{7j} \right) \times$$

$$\times \operatorname{ch} \alpha_j L \left(1 + M_j \frac{\operatorname{ch} \alpha_j x}{\operatorname{ch} \alpha_j L} \right)$$

$$\Phi_i = L \sum_j (-1)^j \frac{G_{ij}}{|B_{ij}|} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \gamma_{3j} + 6\gamma_{6j} + 2\gamma_{8j} \right) \alpha_j \operatorname{ch} \alpha_j x$$

приходим к соотношениям (4.1) и (4.3).

Авторы благодарят Б. В. Дерягина за плодотворные дискуссии при подготовке работы к печати.

Поступила 11 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черчиньяни К.* Математические методы в кинетической теории газов. М., «Мир», 1973.
2. *Де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М., «Мир», 1964.
3. *Gross E. P., Ziering S.* Kinetic theory of linear shear flow. Phis. Fluids 1958, vol. 1, No. 3.
4. *Баканов С. П., Мержанов К. М., Ролдугин В. И.* К решению задачи Куэтта методом полупространственных разложений. Ж. техн. физ. 1976, т. 46, вып. 7.