

ТЕЧЕНИЕ ГАЗА В КАНАЛЕ С ГИБКИМ ОГРАЖДЕНИЕМ

И. Л. Галина

(Москва)

Рассматривается течение идеальной несжимаемой жидкости в канале, ограниченное при выходе из него гибкой надувной оболочкой. Материал оболочки считается абсолютно гибким, нерастяжимым и невесомым, предполагается равенство давления, действующего изнутри на ее стенки, давлению в канале. Предположение об одномерности течения вблизи минимального зазора истечения позволяет исключить давление при совместном решении уравнений движения жидкости и равновесия оболочки. Выведенное дифференциальное уравнение для ординаты оболочки решается численно, а для пологих оболочек результат получен в замкнутой форме с помощью эллиптических интегралов. Найден диапазон применимости приближения пологой оболочки из сравнения численного решения с приближенным. Характер распределения давления вдоль оболочки согласуется с экспериментальными данными [1].

В современных аппаратах на воздушной подушке широко применяются эластичные гибкие ограждения по периметру аппарата, позволяющие удерживать большой объем воздуха в камере и свободно деформироваться при преодолении препятствий на пути движения. К таким конструкциям можно отнести эластичные ограждения, представляющие собой надувной мешок, прикрепляемый к днищу аппарата и сообщающийся воздухопроводом с воздушной подушкой¹.

Цель данной работы — определение величины зазора истечения, геометрии оболочки и распределения давления вдоль ее контура в зависимости от параметров течения.

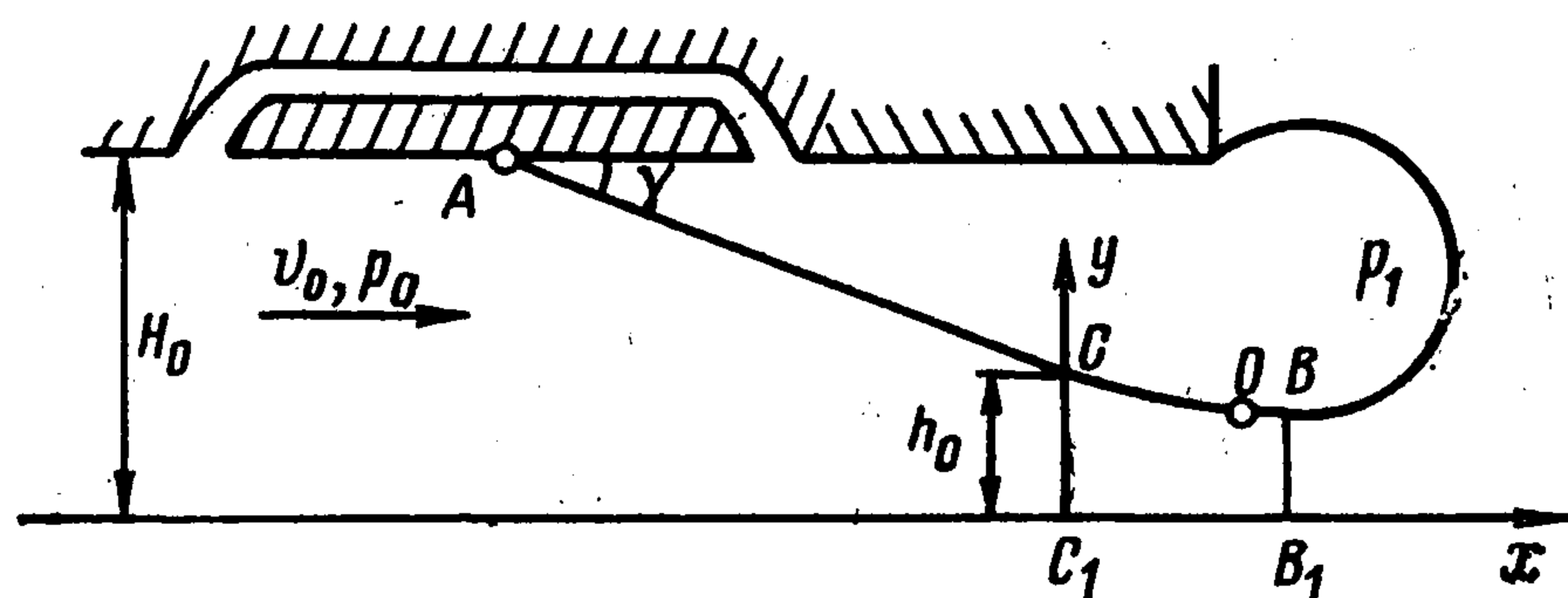
Обычно при расчете формы оболочки в рабочем состоянии делаются следующие предположения [2]: материал ограждения считается абсолютно гибким, не учитывается вес оболочки и растяжимость ее материала; давление, действующее изнутри на стенки оболочки, постоянно и равно давлению в подушке, если оболочка связана с ней воздухопроводом; рассматривается плоское течение идеальной несжимаемой жидкости, т. е. оболочка представляется в виде цилиндра с осью, перпендикулярной направлению потока на бесконечности. Эти предположения позволяют свести задачу к рассмотрению равновесия гибкой нерастяжимой оболочки в потоке газа

$$(1) \quad p_1 - p(x) = T_0 K$$

где K — кривизна контура, T_0 — постоянное натяжение оболочки, p_1 — давление внутри оболочки, $p(x)$ — продольное распределение давления в зазоре.

¹ Патент США № 3291237, класс 180-7, 13/XII — 1966.

Схема течения приведена на фиг. 1. В точке A оболочка прикрепляется к корпусу аппарата. Поскольку зазор истечения мал и оболочка сообщается воздухопроводом с воздушной подушкой, на большей части длины оболочки AC , примыкающей к точке крепления A , давление внутри оболочки p_1 и воздушной подушки p_0 уравнивается, и эта часть оболочки AC представляет собой прямую линию, наклоненную к горизонтали под углом γ . На искривленном участке оболочки, форма которого определяется ниже, в конечной точке B происходит отрыв потока. При этом точку B считаем достаточно удаленной от точки C по сравнению с высотой



Фиг. 1

зазора истечения и поэтому в каждом сечении канала, ограниченного твердой поверхностью и кривой CB , течение газа полагаем одномерным.

Правее точки отрыва B постоянен перепад давления $\Delta p = p_1 - p_a$, где p_a — атмосферное давление, и, как следует из уравнения (1), часть оболочки правее точки B представляет собой окружность. Эту часть оболочки будем называть пассивной, в отличие от активной части ACB , которая обтекается потоком.

По радиусу пассивной части, обратному кривизне, определяется натяжение оболочки

$$(2) \quad T_0 = R\Delta p$$

Если $v(x)$, $p(x)$, $h(x)$ — скорость, давление и высота зазора в произвольном сечении канала между сечениями CC_1 и BB_1 , то из уравнения Бернулли и условия неразрывности

$$\frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} = \frac{v^2}{2} + \frac{p(x)}{\rho}, \quad Q = v_0 H_0 = v h(x)$$

получаем уравнение

$$(3) \quad p_1 - p(x) = -\beta \left[\frac{1}{H_0^2} - \frac{1}{h^2(x)} \right] \quad \left(\beta = \frac{1}{2} \rho, \quad Q^2 = \text{const} \right)$$

Вводя систему координат, как показано на фиг. 1, б, и используя выражение для кривизны через координаты h и x , из уравнений (1), (3) получаем

$$(4) \quad T_0 \frac{d^2 h}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right]^{-3/2} = -\beta \left[\frac{1}{H_0^2} - \frac{1}{h^2(x)} \right]$$

Умножая обе части уравнения (4) на dh/dx и интегрируя, имеем

$$(5) \quad -T_0 \left[1 + \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right]^{-1/2} = -\beta \left[\frac{h(x)}{H_0^2} + \frac{1}{h(x)} \right] + C$$

Произвольная постоянная C определяется из граничного условия

$$(6) \quad x = 0, \quad h = h_0, \quad dh/dx = -\operatorname{tg} \gamma$$

Из (5), (6) получаем уравнение для численного решения

$$(7) \quad \frac{dh}{dx} = \pm \left\{ \left[-\beta \left(\frac{h(x)}{H_0^2} + \frac{1}{h(x)} \right) - \frac{T_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}} + \beta \left(\frac{h_0}{H_0^2} + \frac{1}{h_0} \right) \right]^{-2} T_0^2 - 1 \right\}^{1/2}$$

Знак минус перед радикалом берется на участке CO , где угол наклона касательной к контуру отрицателен, а знак плюс — на участке OB ;

Уравнение (7) решаем методом Рунге — Кутты с граничным условием $h = h_0$ при $x = 0$. Перед радикалом в (7) берется знак минус до тех пор, пока подкоренное выражение в уравнении (7) продолжает оставаться положительным, затем меняем знак на плюс. Это означает, что форма оболочки определяется вначале на участке CO вплоть до точки O , где зазор минимален, т. е. $dh/dx = 0$, а затем определяется форма участка OB , где $dh/dx > 0$.

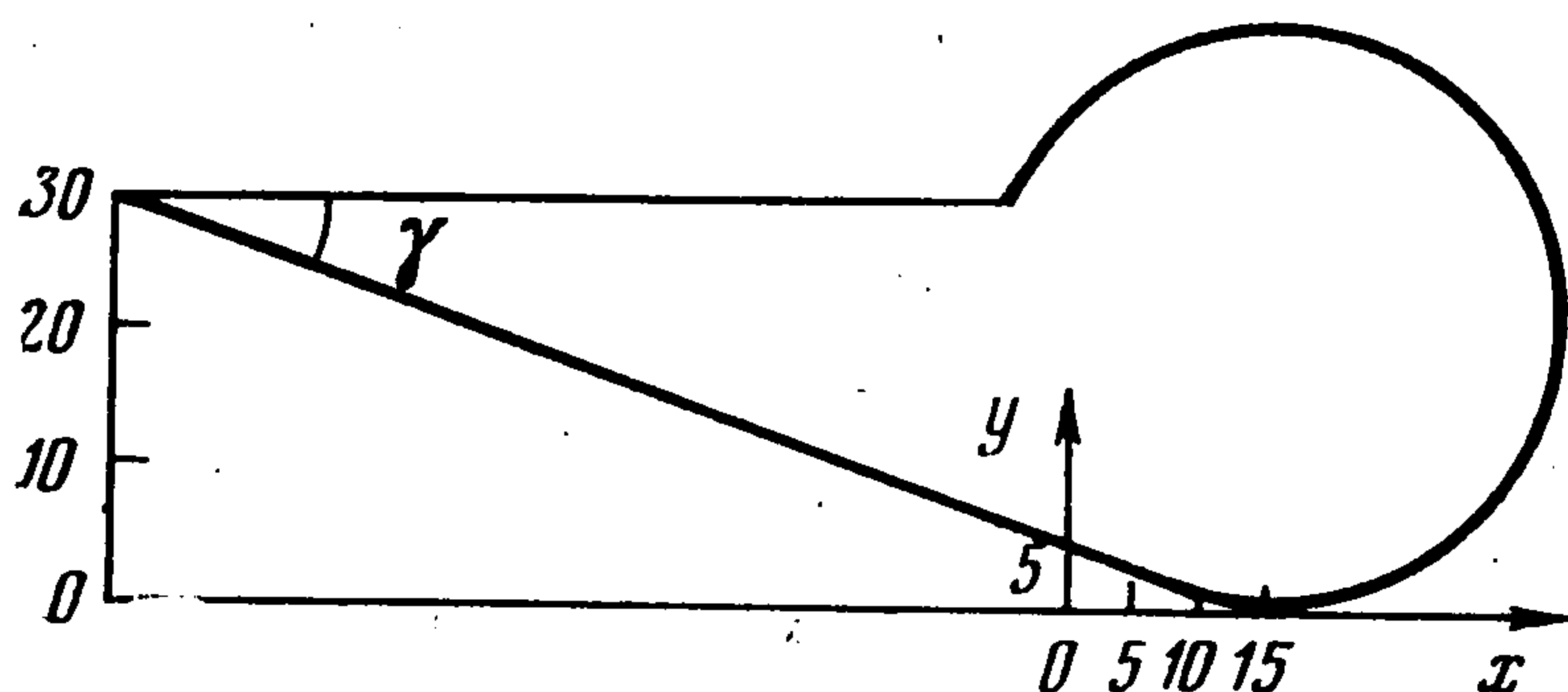
Совместно с решением уравнения (7) в каждой точке с координатами $x, h(x)$ определяем по уравнению (3) разность

$$(8) \quad p - p_a = \Delta p + \frac{\beta}{H_0^2} \left[1 - \frac{H_0^2}{h^2(x)} \right] \quad (\Delta p = p_1 - p_a)$$

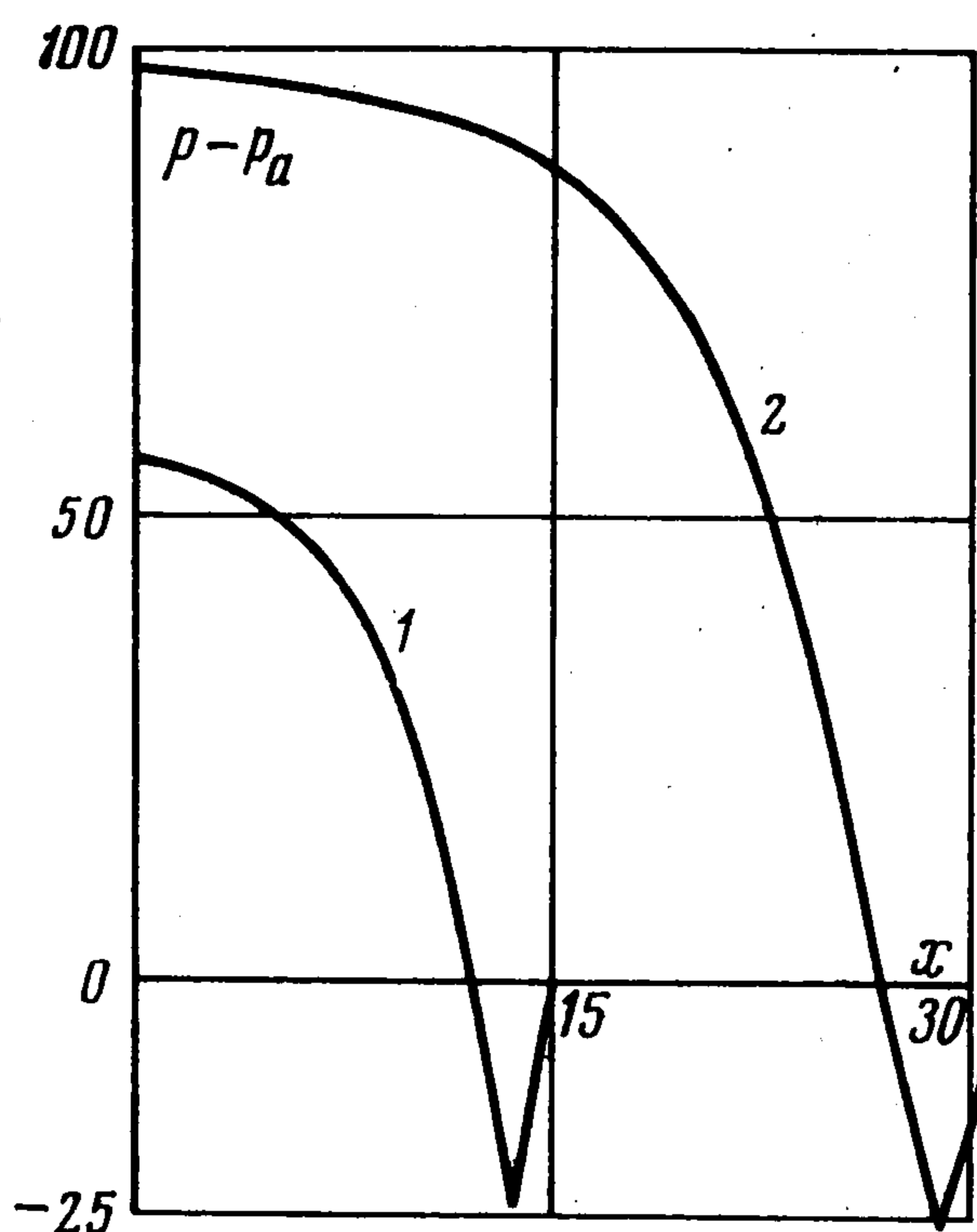
Уравнение (7) решаем до тех пор, пока перепад давления $p(x) - p_a$, ставший отрицательным вблизи точки O , где зазор минимален, не станет равным нулю в точке B , где происходит отрыв потока.

Натяжение T_0 в уравнении (7) определяем по формуле (2).

Как видно из формул (2), (7), (8), решение уравнения (7) зависит от большого числа исходных величин: расхода Q , перепада давления Δp и параметров, опреде-



Фиг. 2



Фиг. 3

ляющих форму оболочки: γ — угла наклона оболочки в точке C , H_0 — расстояния между корпусом аппарата и горизонтальной поверхностью, h_0 — высоты, начиная с которой происходит искривление оболочки, и R — радиуса закругления пассивной части оболочки. Все параметры [выбирались таким образом, чтобы давление $p(x)$ не становилось отрицательным на искривленном участке CB .

Результаты расчета приведены на фиг. 2, 3. На фиг. 2 показана форма оболочки при следующих значениях параметров: $\Delta p = 60 \text{ кг/м}^2$, $Q = 0.4 \text{ м}^3/\text{сек}$, $R = 21 \text{ см}$, $H_0 = 30 \text{ см}$, $h = 5 \text{ см}$, $\gamma = -20^\circ$, величина минимального зазора $h_{\min} = 1.08 \text{ см}$. Значения координат x и y на фиг. 2—4 даны в см. На фиг. 3 показано изменение вдоль длины оболочки давления $p(x) - p_a$, измеренного в кг/м^2 . Кривая 1 на фиг. 3 соответствует тем же значениям параметров, что на фиг. 2; кривая 2 соответствует значениям параметров: $\Delta p = 100 \text{ кг/м}^2$, $Q = 0.7 \text{ м}^3/\text{сек}$, $R = 28 \text{ см}$, $H_0 = 50 \text{ см}$, $h = 10 \text{ см}$, $\gamma = -20^\circ$, величина минимального зазора $h_{\min} = 1.53 \text{ см}$.

Видно, что вблизи точки O , где зазор минимален, наблюдается дополнительное разрежение потока. На небольшом интервале давление $p(x)$ становится меньше атмосферного, затем возрастает и в точке отрыва потока принимает значение атмосферного давления. Эти результаты качественно совпадают с приведенными в экспериментальной работе [1].

Для малых углов γ можно получить решение задачи (4), (6) в виде эллиптических интегралов. Действительно, записывая второй сомножитель в уравнении (5) в приближенной форме, как $1 - \frac{1}{2} (dh/dx)^2$, с учетом граничного условия (6), получим вместо (7) следующее уравнение:

$$(9) \quad \frac{dn}{dx} = -\frac{1}{H_0} \sqrt{\frac{2\beta}{T_0} \left[-h(x) - \frac{H_0^2}{h(x)} + F \right]^{1/2}}$$

$$F = \frac{H_0^2 T_0}{2\beta} \operatorname{tg}^2 \gamma + h_0 + \frac{H_0^2}{h_0}$$

Знак минус перед радикалом в уравнении (9) показывает, что оно определяет форму гибкого контура вплоть до точки O на участке CO (фиг. 1), где угол касательной к контуру возрастает от начального значения $-\gamma$ до нуля.

Делая замену переменного $\tau = \sqrt{h}$ и интегрируя уравнения (9) с граничным условием $h = h_0$ при $x = 0$, получаем

$$(10) \quad x = H_0 \sqrt{\frac{2T_0}{\beta}} \int_{\sqrt{h}}^{\sqrt{h_0}} \frac{\tau^2 d\tau}{\sqrt{(a^2 - \tau^2)(\tau^2 - c^2)}}$$

$$a = \sqrt{\frac{F}{2} + \sqrt{\left(\frac{F}{2}\right)^2 - H_0^2}}, \quad c = \sqrt{\frac{F}{2} - \sqrt{\left(\frac{F}{2}\right)^2 - H_0^2}}$$

($0 < c < a$)

Подстановкой $x^2 = (a^2 - \tau^2)/(a^2 - c^2)$ можно проверить равенство

$$\int_{\sqrt{h}}^a \frac{\tau^2 d\tau}{\sqrt{(a^2 - \tau^2)(\tau^2 - c^2)}} = aE(\lambda, q) \quad (0 < c < \sqrt{h} < a)$$

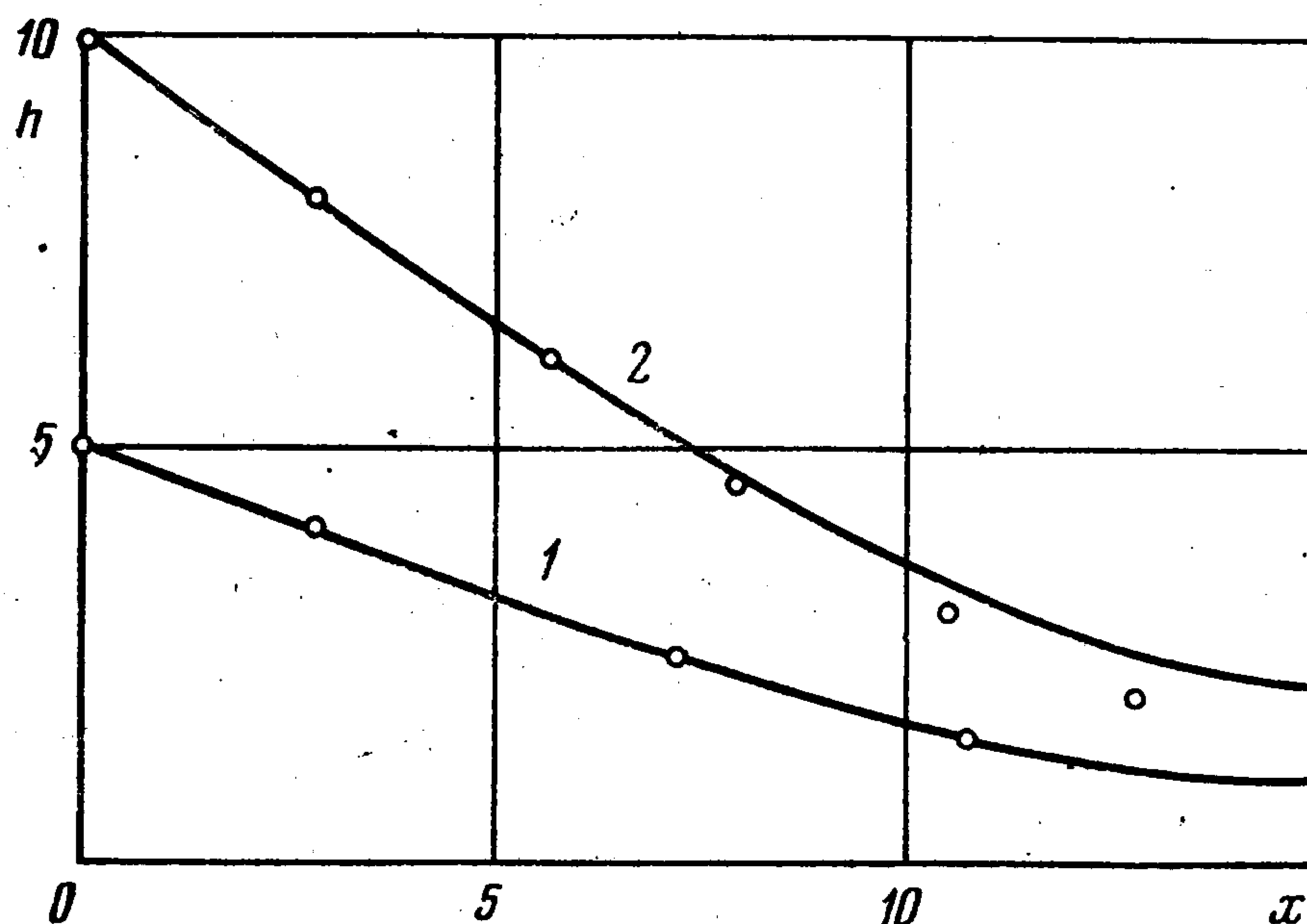
$$\lambda = \lambda(h) = \arcsin \sqrt{\frac{a^2 - h}{a^2 - c^2}}, \quad q = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}$$

которое используется для вычисления интеграла (10). Здесь $E(\lambda, q)$ — эллиптический интеграл второго рода.

Если величина зазора h и его граничное значение h_0 удовлетворяют условию, $0 < c < \sqrt{h} < \sqrt{h_0} < a$, то можно представить выражение (10) в виде

$$x = H_0 a \sqrt{\frac{2T_0}{\beta}} [E(\lambda(h), q) - E(\lambda(h_0), q)]$$

На фиг. 4 в виде кривых 1, 2 представлена форма оболочки вблизи минимального зазора истечения, вычисленная с помощью численного решения уравнения (7). Точками показано приближенное решение с помощью эллиптических интегралов.



Фиг. 4

Кривая 1 на фиг. 4 соответствует тем же значениям параметров, что и на фиг. 2 ($\gamma = -20^\circ$); кривая 2 соответствует значениям параметров: $\Delta p = 60 \text{ кг / м}^2$, $Q = 0.9 \text{ м}^3 / \text{сек}$, $R = 15 \text{ см}$, $H_0 = 30 \text{ см}$, $h = 10 \text{ см}$, $\gamma = -36^\circ$, величина минимального зазора $h_{\min} = 2.2 \text{ см}$. Видно, что при $\gamma = -20^\circ$ численное и приближенное решения совпадают, а при $\gamma = -36^\circ$ результаты различаются.

Поступила 9 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Сузов Е. П., Падуков Ю. В. Экспериментальное исследование геометрических параметров эластичного уплотнения. Изв. вузов. Машиностроение, 1972, № 2.
2. Егоров И. Т., Соколов В. Г. Гидродинамика быстроходных судов. Л., «Судостроение», 1974.