

**АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛЕ  
ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ИЗМЕНЕНИИ ПАРАМЕТРОВ  
СТАЦИОНАРНОГО ПОТОКА МЕЖДУ СЕЧЕНИЕМ ЗАМЫКАЮЩЕГО  
СКАЧКА И ВЫХОДОМ ИЗ КАНАЛА**

**В. Т. Гринь, А. Н. Крайко, Н. И. Тилляева,  
В. А. Широнос**

(Москва)

Разработан метод исследования устойчивости течения идеального газа в канале, в котором переход через скорость звука осуществляется в так называемом замыкающем скачке уплотнения. Используются линеаризованные уравнения, описывающие одномерное нестационарное течение в канале переменной площади, причем в отличие от подходов, развитых в [1-3], не делается дополнительного предположения о малом изменении параметров стационарного потока на участке между замыкающим скачком и выходом из канала. Предложенный метод представляет собой некоторую модификацию известного метода «*D*-разбиения» [4, 5], уже использовавшегося в [2, 3]. При этом в отличие от [2, 3] построение кривых Найквиста опирается на численное интегрирование уравнений, описывающих распространение гармонических возмущений по каналу, а также на асимптотическое представление решения этих уравнений для высоких частот. Наряду с этим для определения области устойчивости привлекаются результаты анализа асимптотического характеристического уравнения и соображения непрерывного перехода к случаям, рассмотренным в [1-3]. Возможности развитого метода иллюстрируются примерами определения границ области устойчивости течения в плоскости коэффициентов отражения акустической и энтропийной волн от сечения выхода из канала. Дается сравнение с аналогичными результатами «квазицилиндрического» [1, 2] и «околозвукового» [3] приближений, показывающее эффективность последних в условиях их применимости. Отметим, кстати, что дополнительное предположение о слабом изменении параметров стационарного потока [1-3] не только существенно упрощает анализ, но и позволяет найти основные определяющие параметры, влияющие на устойчивость. Так, например, в рамках квазицилиндрического приближения [1, 2] влияние формы канала сказывается только через угол его раскрытия (или сужения) в сечении замыкающего скачка. Кроме того, предложено и опробовано приближение «замороженных коэффициентов», в основу которого положена замена зависящих от продольной координаты коэффициентов в уравнениях, описывающих распространение возмущений по каналу, константами. Последние получают осреднением по длине канала.

1. Рассмотрим задачу об устойчивости одномерного стационарного течения идеального газа в канале переменного сечения в случае, когда поток на входе в канал сверхзвуковой, а на выходе — дозвуковой. Переход через скорость звука осуществляется в «замыкающем» скачке, с которым совместим сечение  $x = 0$ , где  $x$  — переменная, отсчитываемая вдоль оси канала в направлении потока. В сечении выхода из канала (при  $x = 1$ )

ставится условие отражения — линейная связь между параметрами, которые характеризуют волны, приходящие и уходящие от указанного сечения.

Согласно [2,3] исследование устойчивости подобного течения сводится к анализу эволюции при достаточно больших временах  $t$  решения следующей краевой задачи:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial t} + (U + A) \frac{\partial R}{\partial x} &= a_{11}R + a_{12}L + a_{13}S \\ \frac{\partial L}{\partial t} + (U - A) \frac{\partial L}{\partial x} &= a_{21}R + a_{22}L + a_{23}S, \quad \frac{\partial S}{\partial t} + U \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \\ R_+ &= \varphi L_+ - \psi Y x_s, \quad S_+ = \varphi' L_+ - \psi' Y x_s, \quad x_s' = \mu L_+ - \beta Y x_s \\ L_1 &= \chi R_1 + \chi' S_1 \quad (Y \equiv (\ln F)_{x=0} = 2(M_+^2 - 1)M_+' / [2 + \\ &+ (\kappa - 1)M_+^2]M_+) \end{aligned}$$

при достаточно произвольных начальных условиях для  $R$ ,  $L$ ,  $S$  и  $x_s$ . В (1.1)  $R$ ,  $L$ , и  $S$  — нестационарные возмущения соответственно правого и левого инвариантов Римана и энтропийной функции;  $U$  и  $A$  — стационарные значения скорости потока и скорости звука;  $M = U/A$  — число Маха стационарного течения;  $x = x_s(t)$  — уравнение траектории замыкающего скачка; коэффициенты  $a_{ij}$  — известные функции стационарных параметров, а следовательно, — координаты  $x$ ;  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\varphi'$ ,  $\psi'$ ,  $\mu$  и  $\beta$  — известные функции  $M_-$  и показателя адиабаты газа  $\kappa$ ; индексы «минус» и «плюс» приписываются параметрам при  $x = 0$  соответственно слева и справа от замыкающего скачка (газ течет слева направо), а индекс  $1$  — параметрам при  $x = 1$ ;  $\chi$  и  $\chi'$  — заданные константы (коэффициенты отражения);  $x_s' = dx_s(t)/dt$ ;  $F = F(x)$  — площадь поперечного сечения канала;  $F' = dF/dx$  и  $M' = dM/dx$ . Выражения для коэффициентов  $a_{ij}$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\varphi'$ ,  $\psi'$ ,  $\mu$  и  $\beta$  приведены в [2].

Система (1.1), будучи системой с коэффициентами, не зависящими от времени, допускает решения вида

$$(1.2) \quad \begin{aligned} R(x, t) &= R^\circ(x, \lambda) \exp \lambda t, \quad L(x, t) = L^\circ(x, \lambda) \exp \lambda t \\ S(x, t) &= S^\circ(x, \lambda) \exp \lambda t, \quad x_s(t) = x_s^\circ \exp \lambda t \end{aligned}$$

где  $\lambda$  — собственные числа соответствующей краевой задачи (в общем случае — комплексные величины), а  $R^\circ(x, \lambda), \dots$  — отвечающие им «собственные» функции и «амплитуда» колебаний скачка (величина последней в рассматриваемой линейной задаче несущественна).

Для задач исследуемого типа собственные числа образуют бесконечную дискретную последовательность, причем система отвечающих им собственных функций обязательно является полной, что, вообще говоря, не позволяет использовать разложения по функциям (1.2) для решения соответствующей смешанной задачи при произвольных начальных условиях. Примеры задач с уравнениями гиперболического типа, для которых системы собственных функций полны и наоборот неполны, приведены в [6]. Там же показано, что даже в случаях, когда не имеет места полнота соответствующей системы, рост решения определяется самым правым (в комплексной плоскости  $\lambda$ ) собственным значением. Это обстоятельство служит обоснованием использования решений (1.2) при исследовании устойчивости.

Уравнения и условия, определяющие функции с индексом градус из (1.2), получаются подстановкой соответствующих представлений в (1.1) и сокращением на  $e^{\mu t}$ . В результате приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений и граничных условий (здесь и далее индекс градус у «комплексных амплитуд» опускается):

$$(1.3) \quad \begin{aligned} dR / dx &= [(a_{11} - \lambda) R + a_{12} L + a_{13} S] / (U + A) \\ dL / dx &= [a_{21} R + (a_{22} - \lambda) L + a_{23} S] / (U - A) \\ dS / dx &= -\lambda S / U \\ R_+ &= \varphi L_+ - \psi Y x_s, \quad S_+ = \varphi' L_+ - \psi' Y x_s \\ \lambda x_s &= \mu L_+ - \beta Y x_s, \quad L_1 = \chi R_1 + \chi' S_1 \end{aligned}$$

Собственными числами рассматриваемой задачи являются те комплексные  $\lambda$ , для которых задача (1.3) допускает нетривиальные решения. Расположение собственных чисел определяется значениями коэффициентов, входящих в уравнения и условия (1.3), которые, в свою очередь, однозначно связаны с формой канала, с числом Маха перед замыкающим скачком и с показателем адиабаты. Если все собственные числа  $\lambda$  располагаются в левой полуплоскости, то течение устойчиво. Если же самое правое собственное число имеет положительную действительную часть, то течение неустойчиво. Для выяснения вопроса о расположении собственных чисел в комплексной плоскости применим следующий прием, являющийся, как уже указывалось, модификацией известного метода  $D$ -разбиения [4, 5].

Пусть форма канала, число Маха  $M_-$  перед замыкающим скачком (или скорость  $U_-$ ) и показатель адиабаты  $\kappa$  фиксированы. В этом случае расположение собственных чисел полностью определяется значениями коэффициентов отражения  $\chi$  и  $\chi'$ . Определим  $D(n)$  как область плоскости  $\chi\chi'$ , в которой  $n$  собственных чисел имеют положительные действительные части. Тогда течение устойчиво при значениях  $\chi$  и  $\chi'$ , принадлежащих  $D(0)$ . Так как границами областей  $D(n)$  и  $D(n-1)$  являются кривые («кривые Найквиста»), отвечающие чисто мнимым значениям  $\lambda$ , т. е.  $\lambda = i\omega$ , где  $\omega$  — действительное число, то исследование устойчивости выполняется в два этапа. Сначала тем или иным способом (например, на основе соображений о непрерывном переходе к случаям, исследованным в [1-3]) определяется некоторая точка  $O$  плоскости  $\chi\chi'$ , отвечающая устойчивому течению, т. е. принадлежащая области  $D(0)$ . Затем для всех  $-\infty < \omega < +\infty$  строятся кривые Найквиста и находится минимальная окрестность точки  $O$ , в которую эти кривые не попадают. Поскольку кривым Найквиста отвечают такие значения  $\chi$  и  $\chi'$ , для которых система (1.3) допускает нетривиальные решения, то построение указанных кривых можно проводить описанным ниже способом.

Для любого  $\omega$  три условия из (1.1), выполняющиеся при  $x = 0$ , позволяют выразить значения  $R_+$ ,  $L_+$  и  $S_+$ , или их действительных и мнимых частей  $R_{r+}$ ,  $R_{i+}$  и т. д., через  $x_s$ . Здесь представляют интерес нетривиальные решения. Следовательно, в качестве  $x_s$  можно взять произвольную отличную от нуля константу. Положим  $x_s = \mu$ . В силу линейности задачи замена данного значения  $x_s$  любой другой комплексной константой  $x_{s0}$  ведет к умножению всех результатов на отношение  $x_{s0} / \mu$ , что, как можно показать, для дальнейшего несущественно. Подставив в соответ-

ствующие условия из (1.3)  $\lambda = i\omega$  и  $x_s = \mu$  и отделив в получившихся при этом равенствах действительные и мнимые части, найдем, что при  $x = 0$

$$(1.4) \quad \begin{aligned} R_{r+} &= (\beta\varphi - \mu\psi) Y, & R_{i+} &= \omega\varphi, & L_{r+} &= \beta Y \\ L_{i+} &= \omega, & S_{r+} &= (\beta\varphi' - \mu\psi') Y, & S_{i+} &= \omega\varphi' \end{aligned}$$

Аналогичным образом систему дифференциальных уравнений из (1.3) при  $\lambda = i\omega$  можно переписать в виде

$$(1.5) \quad \begin{aligned} dR_r / dx &= (a_{11}R_r + a_{12}L_r + a_{13}S_r + \omega R_i) / (U + A) \\ dR_i / dx &= (a_{11}R_i + a_{12}L_i + a_{13}S_i - \omega R_r) / (U + A) \\ dL_r / dx &= (a_{21}R_r + a_{22}L_r + v_{23}S_r + \omega L_i) / (U - A) \\ dL_i / dx &= (a_{21}R_i + a_{22}L_i + a_{23}S_i - \omega L_r) / (U - A) \\ dS_r / dx &= \omega S_i / U, & dS_i / dx &= -\omega S_r / U \end{aligned}$$

Интегрируя при фиксированном  $\omega$  систему (1.5) от  $x = 0$ , где искомые функции даются условиями (1.4), до сечения  $x = 1$ , получим в указанном сечении  $R_{r1}, R_{i1}, \dots$ , которые будут функциями  $\omega$ . Подстановка этих функций в условие отражения — последнее равенство из (1.3) — дает два уравнения

$$(1.6) \quad \begin{aligned} L_{r1}(\omega) &= \chi R_{r1}(\omega) + \chi' S_{r1}(\omega), & L_{i1}(\omega) &= \chi R_{i1}(\omega) + \\ &+ \chi' S_{i1}(\omega) \end{aligned}$$

Эти уравнения после разрешения относительно  $\chi$  и  $\chi'$  приводят к зависимостям  $\chi = \chi(\omega)$  и  $\chi' = \chi'(\omega)$ , которые дают параметрическую запись кривой Найквиста. Нетрудно видеть, что изложенный выше способ построения указанных зависимостей есть некоторая модификация метода, развитого в [7] для определения частотных характеристик канала воздухозаборника.

Заметим, что частоте  $\omega = 0$  в данном случае, как и в [1-3], отвечает особая прямая [4,5]. Действительно, при  $\omega = 0$  из (1.4) имеем, что  $R_{i+} = L_{i+} = S_{i+} = 0$ . Отсюда в согласии с (1.5) следуют тождества  $R_i(x) \equiv L_i(x) = S_i(x) \equiv 0$  при  $0 \leq x \leq 1$ . Поэтому второе уравнение из (1.5) при  $\omega = 0$  выполняется тождественно, а первое дает уравнение особой прямой:  $L_{r1}(0) = \chi R_{r1}(0) + \chi' S_{r1}(0)$ , где, как и ранее,  $L_{r1}(0)$ ,  $R_{r1}(0)$  и  $S_{r1}(0)$  — величины, получающиеся при  $\omega = 0$  в результате интегрирования (1.5), вернее, — подсистемы для  $R_r, L_r$  и  $S_r$  из (1.5) при соответствующих начальных условиях из (1.4).

Описанный выше способ построения кривых Найквиста опирается на интегрирование системы линейных уравнений с переменными коэффициентами (1.5), которое в общем случае может быть выполнено только численно и при умеренных  $\omega$  не сопряжено с какими-либо трудностями (как показывает анализ, достаточно ограничиться только  $\omega \geq 0$ ). Однако с ростом  $\omega$  численное интегрирование (1.5) требует все больших затрат машинного времени. Дело в том, что решение (1.5) носит колебательный характер с периодом колебаний (по  $x$ ), который имеет порядок  $\omega^{-1}$ . Вследствие этого шаг интегрирования приходится уменьшать, как  $\omega^{-1}$ , что и является причиной роста времени счета. Данное обстоятельство, а также потребность в асимптотическом анализе поведения кривых Найквиста для  $\omega \gg 1$  делает необходимым аналитическое представление решения систе-

мы (1.5), которое было бы справедливо для достаточно больших  $\omega$ . Последнее оказывается возможным также благодаря малости величины  $\omega^{-1}$ . Один из возможных путей получения соответствующих формул [8] использован в [9], где, однако, на первом этапе не учитывались упрощения, обусловленные тем, что линеаризованные уравнения одномерного нестационарного течения могут быть записаны в характеристической форме (1.1). Учет указанного обстоятельства и как следствие этого — использование уравнений (1.3) существенно упрощает построение решения. Так, третье уравнение из (1.3) можно проинтегрировать независимо от первых двух, в результате чего получим

$$(1.7) \quad S(x, \lambda) = S_+(\lambda) \exp\left(-\lambda \int_0^x \frac{dx}{U}\right)$$

Здесь и далее  $S_+(\lambda)$ , а также  $R_+(\lambda)$  и  $L_+(\lambda)$  согласно (1.3) равны ( $x_s = \mu$ )

$$(1.8) \quad \begin{aligned} R_+(\lambda) &= L(\lambda + \beta Y) - \psi Y \mu, & L_+(\lambda) &= \lambda + \beta Y \\ S_+(\lambda) &= \varphi'(\lambda + \beta Y) - \psi' Y \mu \end{aligned}$$

Чтобы получить требуемые формулы для  $R(x, \lambda)$  и  $L(x, \lambda)$ , которые были бы справедливы в случае  $|\lambda| \gg 1$  и  $|\operatorname{Re} \lambda| \sim 1$ , рассмотрим вместо первых двух уравнений (1.3) более общую систему

$$(1.9) \quad \begin{aligned} dR / dx &= [(a_{11} - \lambda) R + \varepsilon \lambda a_{12} L + a_{13} S] / (U + A) \\ dL / dx &= [\varepsilon \lambda a_{21} R + (a_{22} - \lambda) L + a_{23} S] / (U - A) \end{aligned}$$

в которой  $\varepsilon$  — малый параметр. При  $\varepsilon = 1 / \lambda$  система (1.9) сводится к соответствующим уравнениям из (1.3).

Если решение (1.9) при функции  $S(x, \lambda)$ , определяемой формулой (1.7), искать в виде разложений по степеням  $\varepsilon$ , то для коэффициентов соответствующих разложений получится система «разделяющихся» линейных дифференциальных уравнений, допускающих последовательное решение. Проводя необходимые выкладки и подставляя в полученные выражения  $\varepsilon = 1 / \lambda$  и  $x = 1$ , найдем, что с точностью до членов более высокого порядка малости

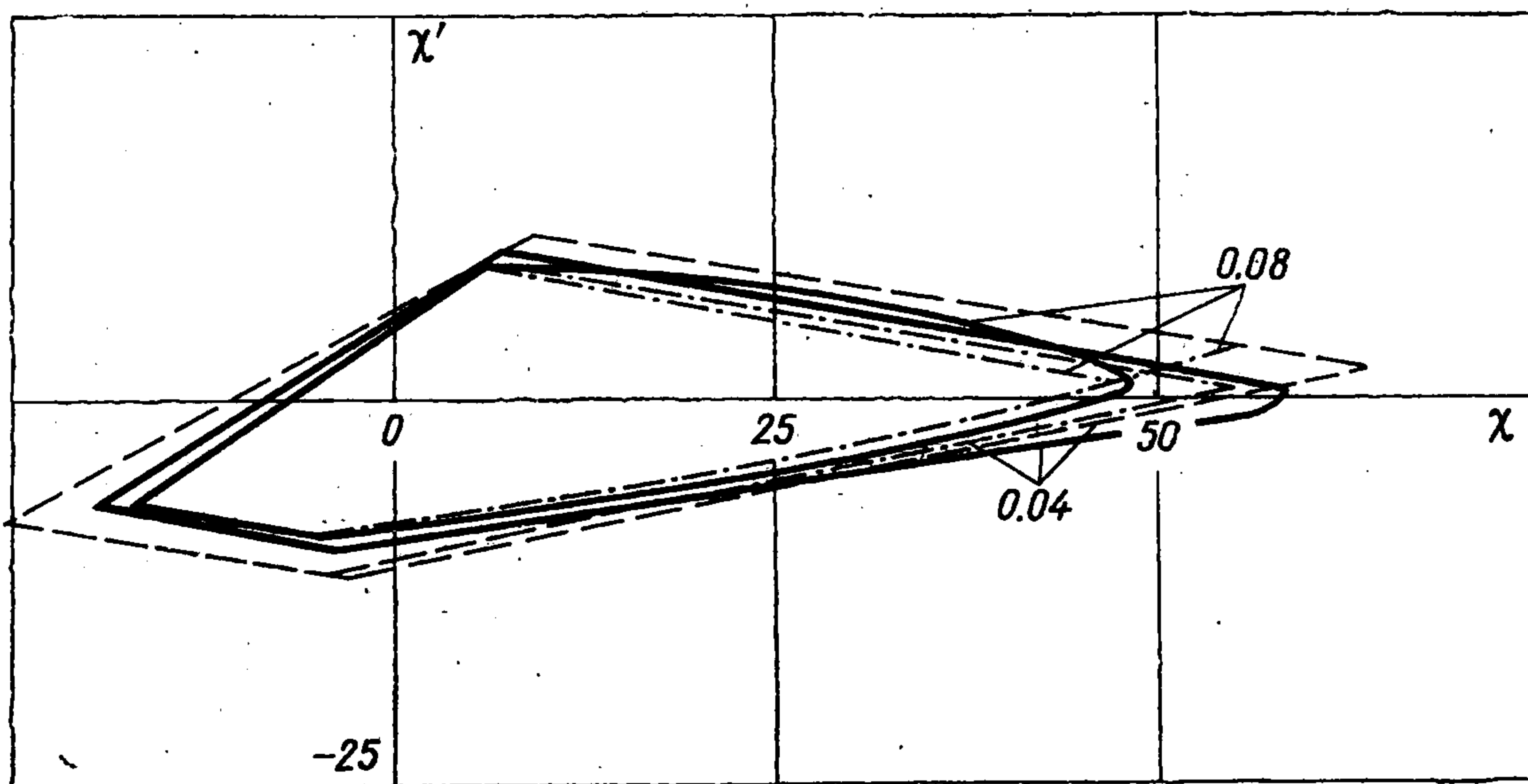
$$(1.10) \quad \begin{aligned} R_1(\lambda) &\equiv R(1, \lambda) = r_0 \exp(-\lambda \tau_r) \{R_+(\lambda) + \lambda^{-1} S_+(\lambda) [r_1 - \\ &\quad - r_2 \exp(-\lambda \tau_r')] - \lambda^{-1} L_+(\lambda) (r_3 - r_4 \exp \lambda \tau_{rl})\} \\ L_1(\lambda) &\equiv L(1, \lambda) = l_0 \exp \lambda \tau_l \{L_+(\lambda) + \lambda^{-1} S_+(\lambda) [l_1 - \\ &\quad - l_2 \exp(-\lambda \tau_l')] - \lambda^{-1} L_+(\lambda) [l_3 - l_4 \exp(-\lambda \tau_{rl})]\} \\ \tau_r &= \int_0^1 \frac{dx}{A+U}, \quad \tau_l = \int_0^1 \frac{dx}{A-U}, \quad \tau_r' = \int_0^1 \frac{dx}{(A+U)M} \\ \tau_l' &= \int_0^1 \frac{dx}{(A-U)M} \\ \tau_{rl} &= \tau_r + \tau_l, \quad r_0 = \exp \int_0^1 \frac{a_{11} dx}{A+U}, \quad l_0 = \exp \int_0^1 \frac{a_{22} dx}{U-A} \\ r_1 &= (M a_{13})_+, \quad r_2 = (M a_{13})_1 / r_0, \quad r_3 = [(M - 1) a_{12} / 2]_+ \end{aligned}$$

$$r_4 = [(M - 1) a_{12}]_1 l_0 / 2r_0, \quad l_1 = (Ma_{23})_+, \quad l_2 = (Ma_{23})_1 / l_0 \\ l_3 = [(M + 1) a_{21} / 2]_+, \quad l_4 = [(M + 1) a_{21}]_1 r_0 / 2l_0$$

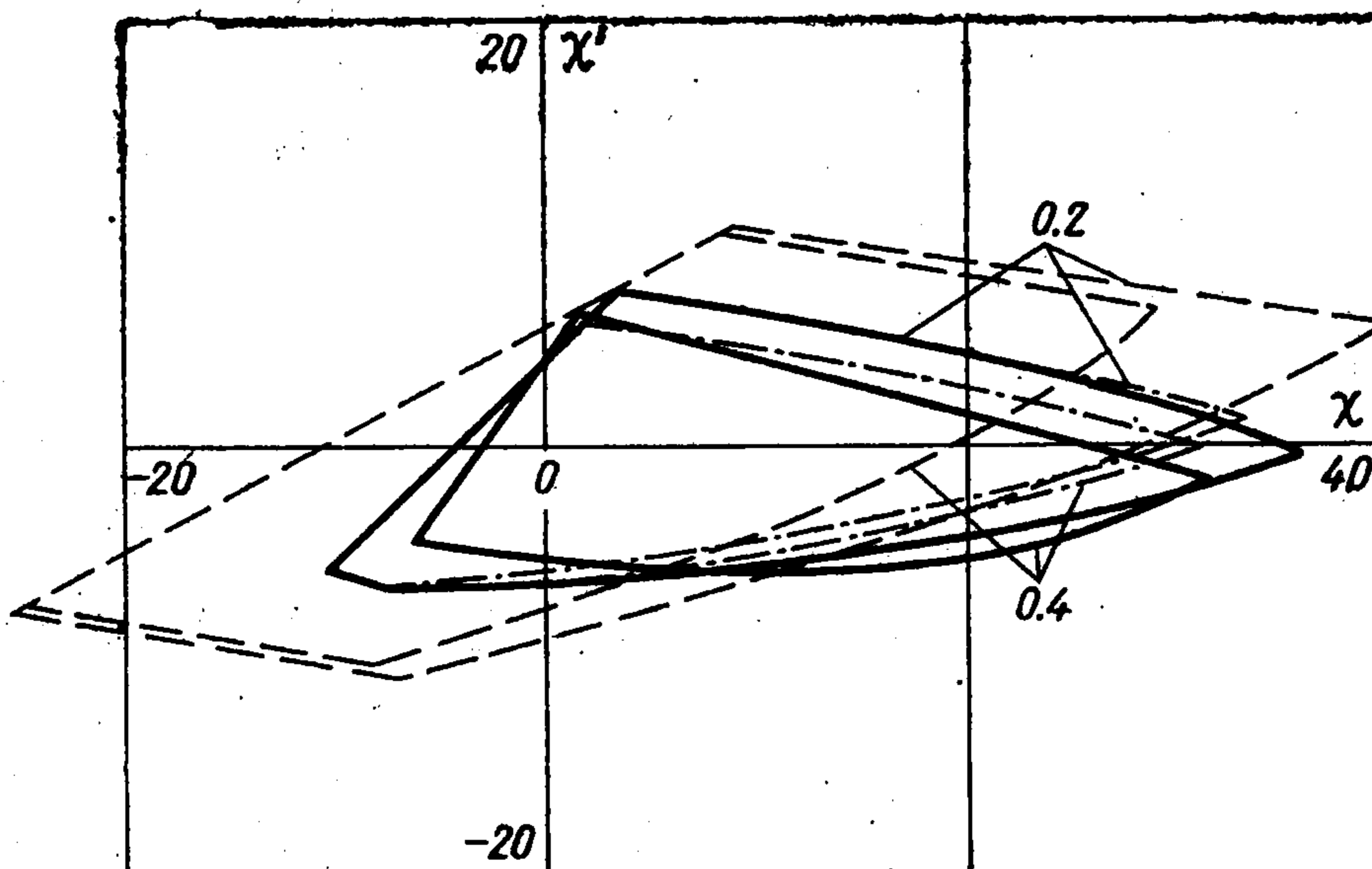
Здесь, как и ранее, индексы «плюс» и «единица» приписаны параметрам при  $x = +0$  и при  $x = 1$  соответственно. Сформулированное выше условие на  $\operatorname{Re} \lambda$  обеспечивает ограниченность множителей при  $\lambda^{-1}$  для  $|\lambda| \gg 1$  в правых частях (1.10). В дополнение к этим формулам в согласии с (1.7)

$$(1.11) \quad S_1(\lambda) \equiv S(1, \lambda) = S_+(\lambda) \exp(-\tau_s \lambda) \quad \left( \tau_s = \int_0^1 \frac{dx}{U} \right)$$

При построении кривых Найквиста переход от численного интегрирования (1.5) к формулам (1.10) и (1.11) осуществляется, начиная с такого значения  $\omega = \omega_* \gg 1$ ,



Фиг. 1



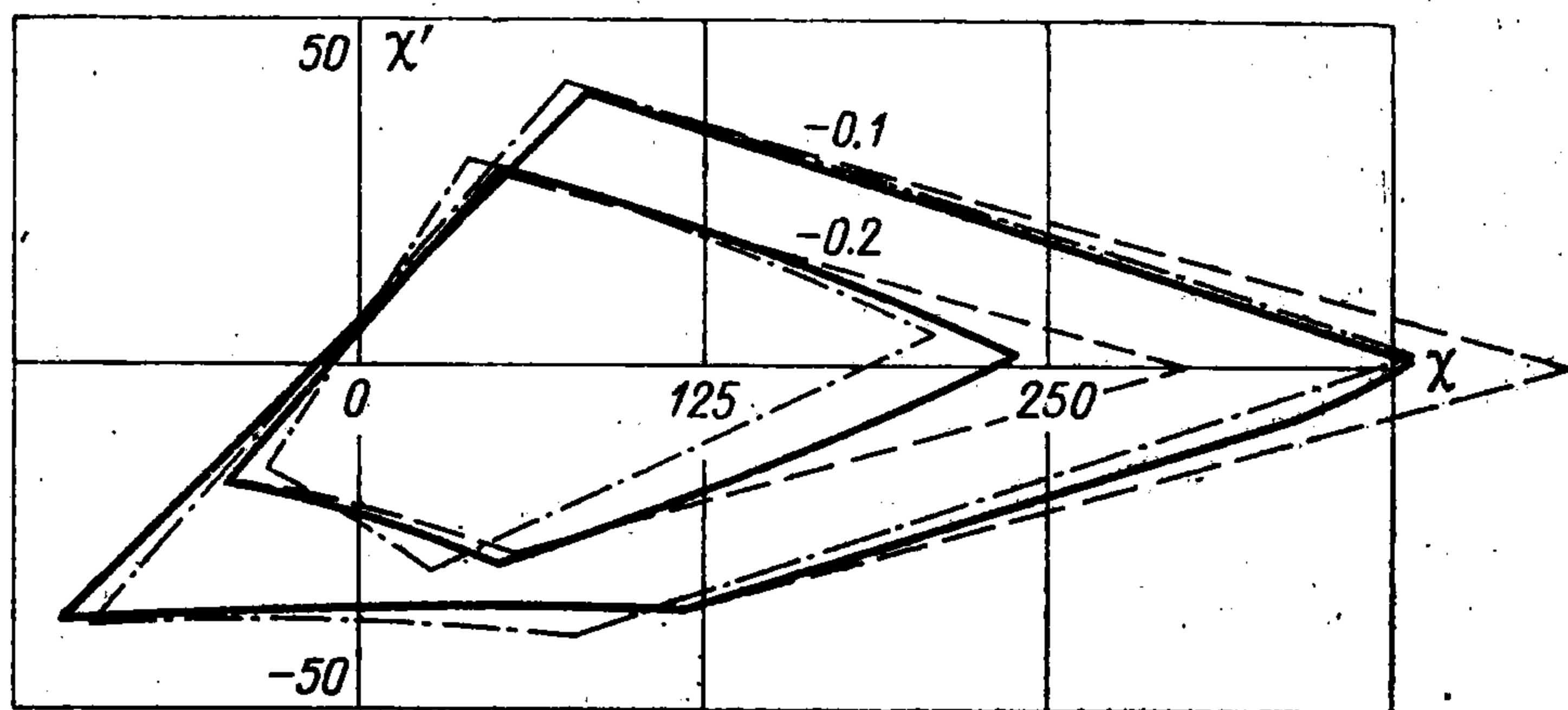
Фиг. 2

для которого относительная погрешность соответствующих формул по сравнению с результатами численного интегрирования становится ниже некоторого заранее установленного уровня. Заметим, кстати, что подстановка (1.10) и (1.11) с  $R_+(\lambda)$ , ... из (1.8) в последнее равенство из (1.3) приводит к характеристическому уравнению рассматриваемой задачи, справедливому для тех собственных чисел  $\lambda$ , для которых  $|\lambda| \gg 1$  при  $|\operatorname{Re} \lambda| \sim 1$ . Как и в [2, 3], анализ расположения корней такого «асим-

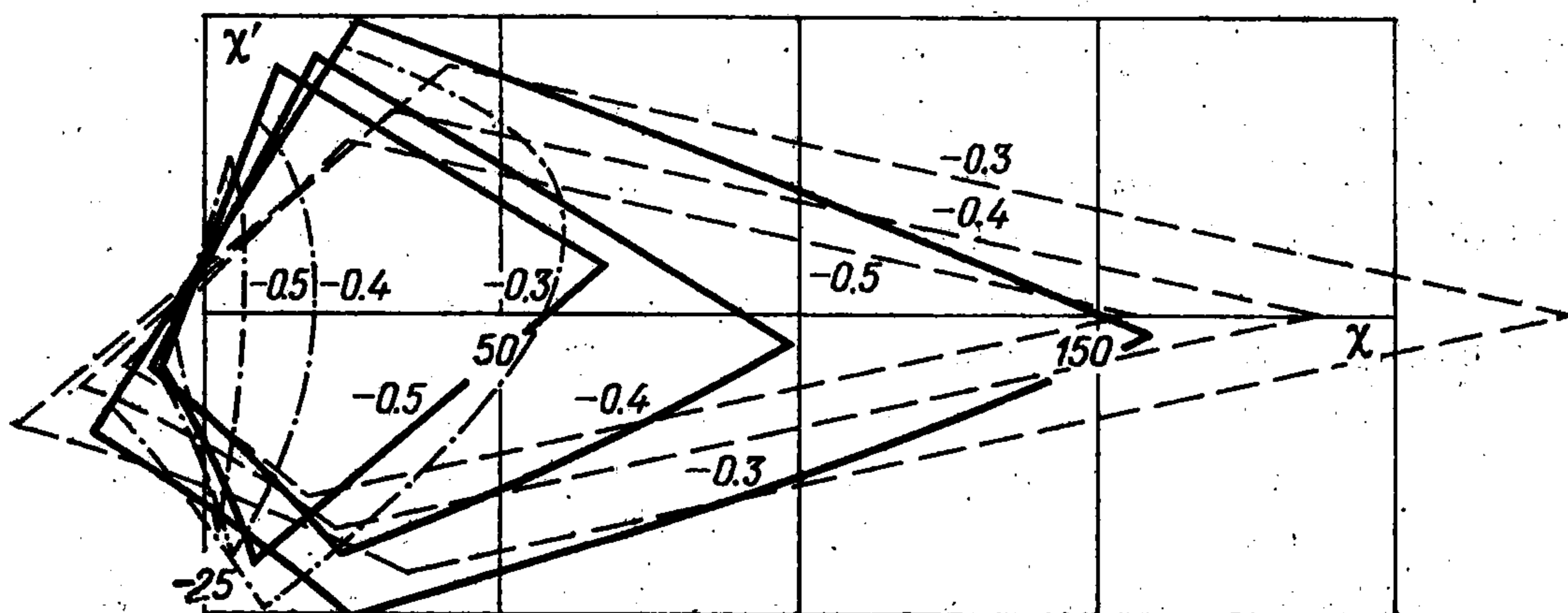
«плотического» характеристического уравнения составляет обязательный элемент исследования устойчивости. При этом, поступая так же, как в [2], можно показать, что в плоскости  $\chi\chi'$  областью устойчивости указанного уравнения является ромб

$$(1.12) \quad |\chi\varphi_0 \pm \chi'\varphi'| < l_0$$

Изложенное выше составляет основу для построения (в плоскости  $\chi\chi'$ ) области устойчивости произвольного стационарного течения в канале с замыкающим скачком уплотнения. Как уже отмечалось, положение некоторой точки  $O$  области  $D(0)$  находится при помощи непрерывного перехода к результатам [1-3], а область устойчивости определяется как пересечение ромба (1.12) и минимальной окрестности точки  $O$ , в которую не попадают кривые Найквиста, построенные описанным выше способом. В рассмотренных ниже примерах для  $Y > 0$  точка  $O$  всегда совпадала с началом координат ( $\chi = \chi' = 0$ ).



Фиг. 3



Фиг. 4

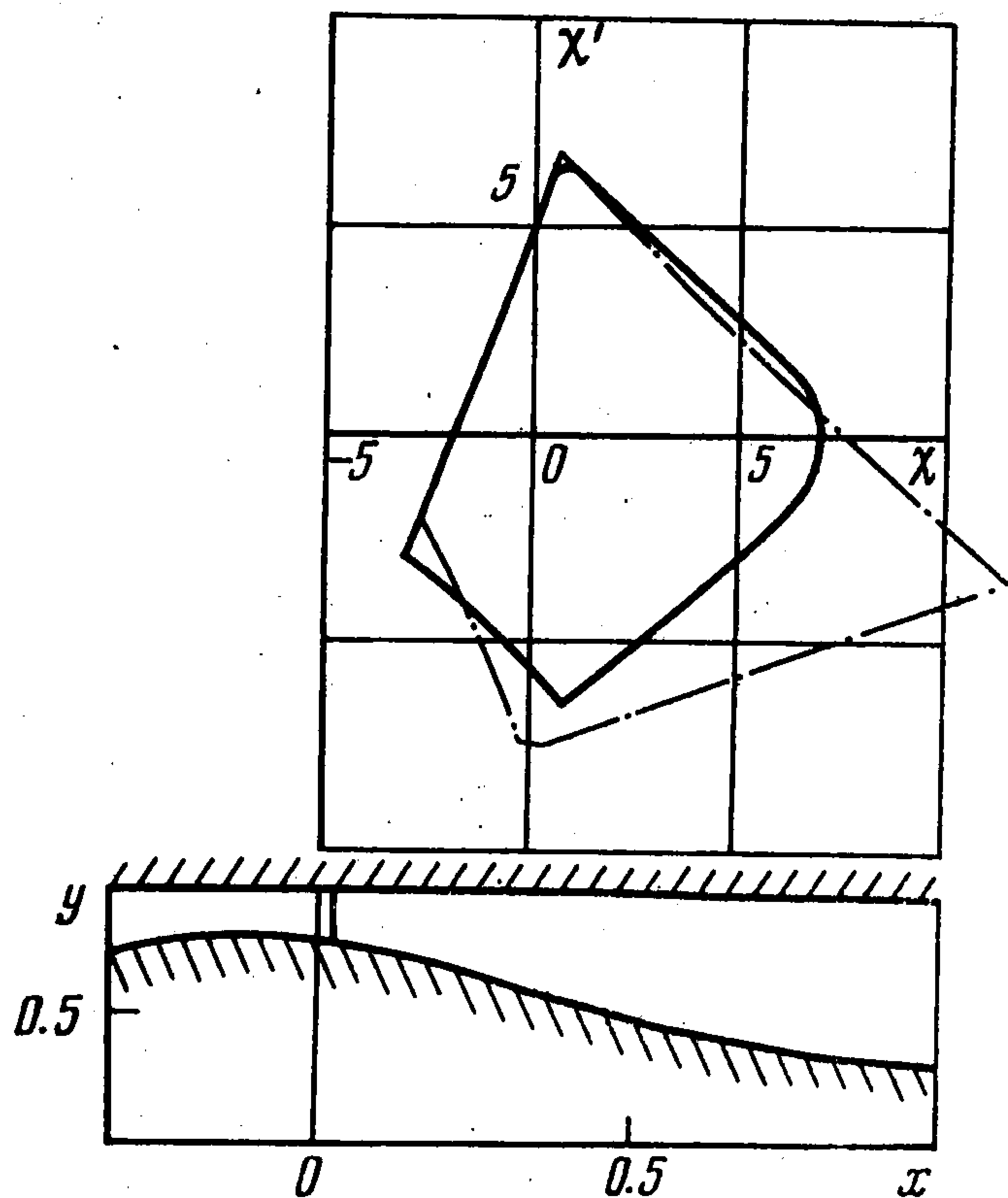
2. Границы области устойчивости, рассчитанные при помощи развитого выше подхода, построены (в плоскости  $\chi\chi'$ ) на фиг. 1—5 сплошными линиями. Расчеты проводились для  $\kappa = 1.4$ .

На фиг. 1 и 2 указанные границы нанесены для  $U_- = 1.34$ , где скорость отнесена к критической скорости стационарного потока, в случае течения в канале, форма которого такова, что

$$d \ln F(x) / dx = [d \ln F(x) / dx]_{x=0} = Y$$

Значения  $Y$  даны цифрами около соответствующих кривых. Штрихами для тех же  $Y$  на фиг. 1 и 2 построены аналогичные границы, найденные из квазицилиндрического

приближения [2]. Сплошные и штриховые границы, будучи весьма близкими для малых  $Y$ , с ростом  $Y$  различаются все больше и больше, как этого и следует ожидать, так как для справедливости квазицилиндрического приближения необходимо выполнение условия:  $|Y| \ll 1$ . Такая же тенденция наблюдается и в случае, изображенном на фиг. 3 и 4, где штриховые границы построены в рамках околосвукового приближения. Представленные результаты относятся к каналу, спрофилированному так, что  $M(x) =$



Фиг. 5

$= M_+ + M_+'x$ , т. е. распределение числа Маха стационарного потока по длине канала линейно. В данных примерах  $U_- = 1.1$ , а  $M_+'$  изменяется от  $-0.1$  до  $-0.5$ . Значения  $M_+'$  указаны около кривых.

Последний пример относится к течению в кольцевом канале, сечение которого в меридиональной плоскости  $xu$  цилиндрической системы координат изображено в нижней части фиг. 5 (ранее динамика потока в таком канале численно изучалась в [10]). Площадь поперечного сечения канала от скачка ( $x = 0$ ) до выхода возрастает в 2.33 раза, а  $U_- = 1.34$ . Так как замыкающий скачок (двойная линия на фиг. 4) располагается вблизи от сечения минимальной площади, то угол раскрытия канала при  $x = 0$  весьма мал ( $Y = 0.04$ ). Тем не менее, данный канал отнюдь не является квазицилиндрическим, поскольку «средняя» по длине величина  $d \ln F / dx$

равна 0.86. О том же свидетельствует и весьма сильное отличие области устойчивости, изображенной на фиг. 5, от соответствующей области ( $Y = 0.04$ ) фиг. 1.

Заканчивая изложение, приведем некоторые результаты еще одного приближенного подхода, который назовем методом «замороженных коэффициентов». В основе этого метода лежит замена зависящих от  $x$  коэффициентов первых двух уравнений из (1.3) константами. Так как получающаяся при этом система с постоянными коэффициентами решается аналитически, подобный подход представляется весьма привлекательным. Несмотря на это, сразу оговоримся, что формулировка условий его применимости затруднительна. Так, например, замораживание коэффициентов при  $M_- \rightarrow 1$  в случае, когда работает околосвуковое приближение, по-видимому, будет давать менее точные результаты, чем теория, развитая в [3]. Поэтому для оценки точности указанного подхода были выполнены специальные расчеты, в которых соответствующие коэффициенты брались как средние по длине канала. Результаты этих расчетов даны на фиг. 1—5 штрихпунктиром.

В заключение авторы благодарят К. В. Брушлинского за полезную консультацию и В. А. Панину — за помощь в работе.

Поступила 2 IV 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гринь В. Т., Крйко А. Н., Тилляева Н. И. Исследование устойчивости течения идеального газа в квазицилиндрическом канале. ПММ, 1975, т. 39, вып. 3.
2. Гринь В. Т., Крайко А. Н., Тилляева Н. И. Об устойчивости течения идеального газа в канале с замыкающим скачком уплотнения при одновременном отражении от сечения выхода акустических и энтропийных волн. ПММ, 1976, т. 40, вып. 3.

3. Крайко А. Н., Широнос В. А., Исследование устойчивости течения в канале с замыкающим скачком уплотнения при околосвуковой скорости потока. ПММ, 1976, т. 40, вып. 4.
  4. Чеботарев Н. Г., Мейман Н. Н. Проблема Раусса — Гурвица для полиномов и целых функций. Тр. Матем. ин-та АН СССР. М., Изд-во АН СССР, 1949.
  5. Айзерман М. А. Лекции по теории автоматического регулирования. М., Гостехиздат, 1956.
  6. Брушлинский К. В. О росте решения смешанной задачи в случае неполноты собственных функций. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1959, т. 23, № 6.
  7. Важенина Т. Д., Гринь В. Т., Крайко А. Н. К определению частотных характеристик канала воздухозаборника. Уч. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 6.
  8. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов. М., «Мир», 1965.
  9. Слободкина Ф. А. Устойчивость квазиодномерных магнитогидродинамических течений. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
  10. Гринь В. Т., Иванов М. Я., Крайко А. Н. Исследование динамики течения торможения идеального газа в канале с замыкающим скачком уплотнения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 4.
-