

**О ПОВЕДЕНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
ВБЛИЗИ ГРАНИЦ ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ  
ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ**

**М. И. Фейгин**

(Горький)

Рассматриваются нарушения условий существования устойчивых периодических движений многомерных систем, вызванные переходом через точку излома характеристики одного из нелинейных элементов системы. Показано, что движение, близкое к нарушаемому, в общем случае при увеличении излома теряет устойчивость, а соответствующая граница области существования становится опасной, если при этом не появляется участок скользящего режима. Бифуркации, связанной с возникновением не вполне упругих соударений, всегда соответствует опасная граница.

В окрестности опасной границы установлена возможность неограниченного усложнения структуры пространства параметров, названного эффектом «расплывания» границы. Приведен пример исследования структуры и оценки ширины полосы расплывания границы.

**1. Случай перехода через излом характеристики.** Рассмотрим кусочно-непрерывную динамическую систему, у которой характеристика одного из нелинейных элементов, пусть  $\varphi(x_1)$ , претерпевает излом вида

$$(1.1) \quad \varphi(x_1) = \begin{cases} \psi(x_1) & (D \leq 0) \\ \psi(x_{10}) + (x_1 - x_{10})(\psi'(x_{10}) + q) & (D \geq 0) \end{cases}$$

при прохождении фазовой траектории через некоторую поверхность

$$(1.2) \quad D(x_1, x_2, \dots, x_n, t, \mu) = 0$$

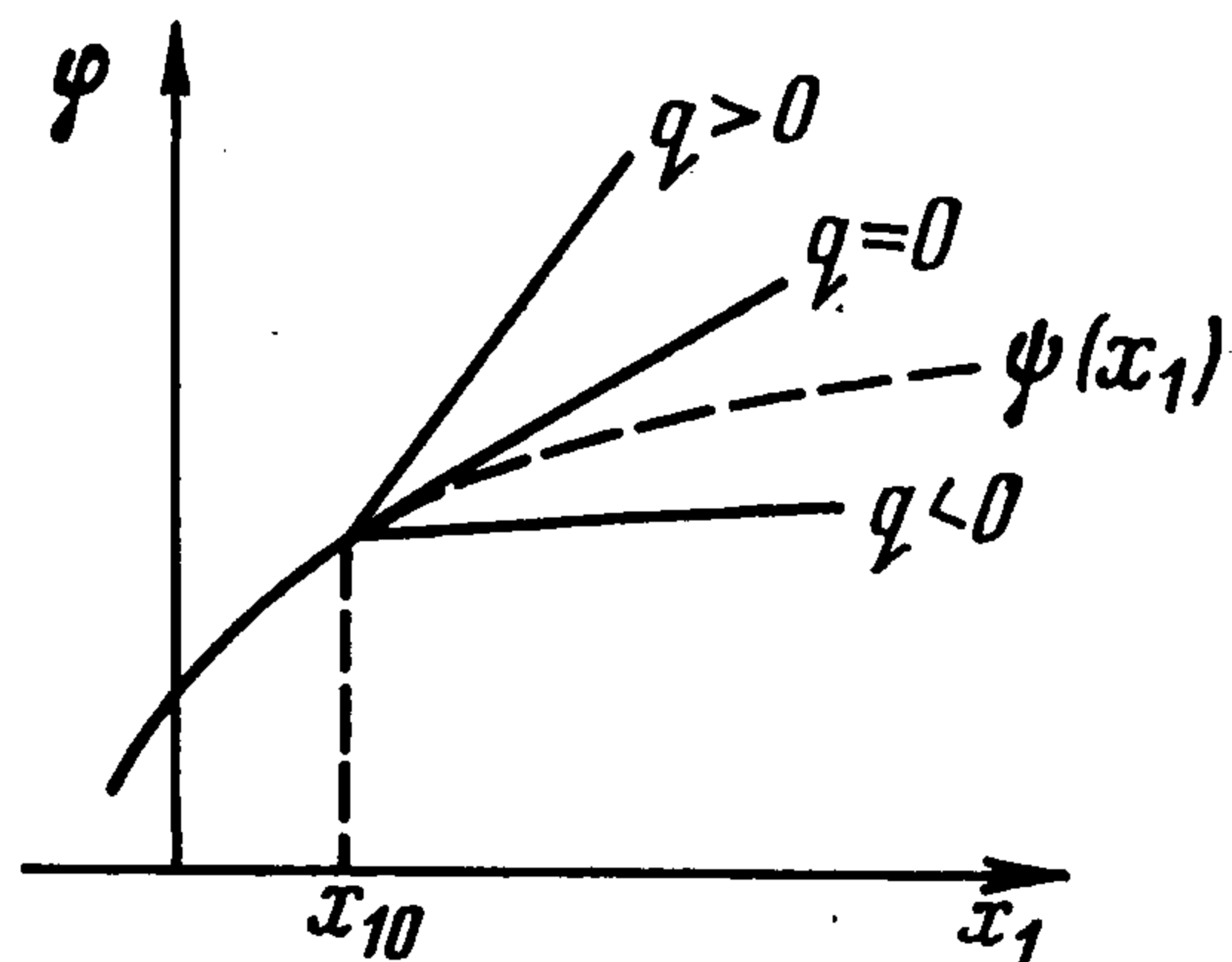
Здесь  $x_1, x_2, \dots, t$  — фазовые координаты системы,  $x_{10}$  — координата точки излома,  $q$  и  $\mu$  — независимые параметры (фиг. 1).

Предполагаем, что при  $\mu \leq 0$  рассматриваемая система имеет устойчивое периодическое решение и нарушение его условий существования (С-бифуркация) состоит в том, что некоторый участок фазовой траектории, расположенный в подпространстве  $D < 0$ , при  $\mu = 0$  касается поверхности (1.2).

Будем исследовать влияние количественного показателя излома характеристики  $q$  на поведение системы при изменении параметра  $\mu$ . В указанной постановке это задача о грубости системы по отношению к нелинейным характеристикам рассматриваемого класса [1]. Наиболее важно при этом установить опасные границы области существования периодического решения, малейшее нарушение которых приводит к неконтролируемому

(путем выбора достаточно малого нарушения) нарастанию отклонения режима движения от рассматриваемого [2].

Вводим в рассмотрение точечное преобразование  $\Pi$  некоторой достаточно гладкой поверхности  $F$ , порождаемое фазовыми траекториями системы в окрестности траектории устойчивого периодического решения. На поверхности  $F$  через неподвижную точку  $M^*$ , соответствующую  $\mu = 0$ , можно провести некоторую кривую  $s$ , характеризуемую тем, что проходящие через нее фазовые траектории касаются поверхности  $D = 0$ . Эта кривая делит  $F$  на две полукрестности  $F^+$  и  $F^-$ , соответствующие разным уравнениям точечных преобразований, пусть  $\Pi^+$  и  $\Pi^-$ . В окрестности  $M^*$  преобразование  $\Pi$  предполагается непрерывным, а зависимость его от фазовых координат и параметров в каждой из полукрестностей — достаточно гладкой.



Фиг. 1

Выбираем систему координат на  $F$  так, чтобы  $\mu = 0$  соответствовали значения  $u_1 = u_2 = \dots = u_n = 0$ . Ось  $u_n$  при этом направляем перпендикулярно границе  $s$ , чтобы областям  $F^+$  и  $F^-$  отвечали разные знаки  $u_n$ . В указанных координатах линеаризованные по  $u_1, \dots, u_n$  и  $\mu$  уравнения точечных преобразований записываются следующим образом [3].

Преобразование  $\Pi^+$ :

$$(1.3) \quad u_k' = \sum_{i=1}^n a_{ki} u_i + b_k \mu + \dots \quad (u_n \geq 0)$$

Преобразование  $\Pi^-$ :

$$(1.4) \quad u_k' = \sum_{i=1}^n a_{ki} u_i + q a_k(q) u_n + b_k \mu + \dots \quad (u_n \leq 0) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Из вида этих уравнений следует, что система (1.3) может быть формально получена из уравнений (1.4), если полагать в последних  $q = 0$ . Следовательно, характеристический полином преобразования (1.4) имеет вид

$$(1.5) \quad \chi(\lambda, q) = \lambda^n + \gamma_1(q) \lambda^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1}(q) \lambda + \gamma_n(q) \\ \gamma_i = \alpha_i + q \beta_i(q), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

где  $\alpha_i$  — коэффициенты характеристического полинома преобразования (1.3).

В силу сделанных предположений при  $\mu < 0$  существует устойчивая неподвижная точка преобразования (1.3)

$$(1.6) \quad u_k^* = \frac{B_k^+}{\chi(1, 0)} \mu + \dots, \quad u_n^* = \frac{B_n}{\chi(1, 0)} \mu + \dots \geq 0$$

Здесь через  $B_k^+, B_n$  обозначены соответствующие определители.

Простейшее периодическое решение, близкое к нарушаемому, определяется неподвижной точкой преобразования (1.4)

$$(1.7) \quad u_k^{**} = \frac{B_k^-}{\chi(1, q)} \mu + \dots, \quad u_n^{**} = \frac{B_n}{\chi(1, q)} \mu + \dots \leq 0$$

Решение (1.7) существует, если собственные значения матрицы преобразования (1.4) отличны от единицы, и устойчив, если все корни  $\chi(\lambda, q) = 0$  расположены в единичном круге.

Из исходного предположения об устойчивости для случая  $q = 0$  и непрерывной зависимости  $\chi(\lambda, q)$  от параметра следует существование достаточно малого  $q^* > 0$ , для которого все корни также расположены в единичном круге и выполняется условие

$$(1.8) \quad \chi(1, 0) \chi(1, q) > 0, \quad |q| < q^*$$

Из выражений (1.6), (1.7) и условия (1.8) получаем, что при изменении знака параметра  $\mu$  координата  $u_n$  неподвижной точки также меняет знак, и, следовательно, устойчивый периодический режим (1.6) переходит в устойчивый режим (1.7). Таким образом,  $S$ -бифуркация, порождаемая достаточно малым изломом характеристики, не приводит к качественным изменениям в поведении системы и является безопасной.

Покажем далее, что с ростом  $|q|$  периодическое решение (1.7) становится неустойчивым, если при этом хотя бы одно из значений  $\varepsilon_i = \lim_{|q| \rightarrow \infty} \beta_i(q) \neq 0$  и на поверхности  $D = 0$  не возникает так называемый скользящий режим, для которого уравнения преобразования требуют отличной от (1.4) формы записи.

Воспользуемся условиями устойчивости Шура. Пусть  $\varepsilon_n \neq 0$ . Тогда при  $|q| \rightarrow \infty$  будет нарушено первое неравенство Шура

$$(1.9) \quad |\gamma_n| = |\alpha_n + q\beta_n(q)| < 1$$

Предположим теперь, что  $\varepsilon_n = 0$  и условие (1.9) не нарушается. Следуя процедуре получения неравенств Шура, вводим полином  $\chi^*(\lambda, q)$  и образуем полином степени  $n - 1$  по правилу

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \chi_1(\lambda, q) &= \lambda^{-1}(\chi - \gamma_n \chi^*) = (1 - \gamma_n^2) \lambda^{n-1} + \dots + (\gamma_{n-1} - \gamma_1 \gamma_n) \\ \chi^*(\lambda, q) &= \gamma_n \lambda^n + \gamma_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \gamma_1 \lambda + 1 \end{aligned}$$

Очередное неравенство Шура принимает вид

$$(1.11) \quad |\alpha_{n-1} - \alpha_1 \gamma_n + q(\beta_{n-1} - \beta_1 \gamma_n)| < 1 - \gamma_n^2$$

При выполнении (1.9) необходимыми условиями выполнения неравенства (1.11) при  $|q| \rightarrow \infty$  будут  $\beta_{n-1}(q) \rightarrow 0$ ,  $\beta_1(q) \rightarrow 0$  или

$$(1.12) \quad \beta_{n-1} - \beta_1 \gamma_n \equiv 0$$

Рассматривая аналогичным образом очередные неравенства Шура, приходим к выводу, что при сделанных предположениях они могут выполняться лишь в вырожденном случае, когда  $\beta_n(q) \rightarrow 0$ , а остальные коэффициенты  $\beta_i(q)$  ( $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ) удовлетворяют  $n - 1$  уравнениям типа (1.12). Следовательно, в общем случае увеличение излома нелинейной характеристики приводит к потере устойчивости периодического движения,

возникающего при порождаемой этим изломом  $C$ -бифуркации и близкого к нарушаемому движению. Соответствующая граница области существования периодического движения становится опасной.

2. **Случай возникновения соударений.** Частный случай рассмотренной задачи, когда  $q \rightarrow \infty$ , а  $\varphi(x_1)$  — упругая характеристика некоторого соединения, соответствует абсолютно упругому соударению при  $x_1 = x_{10}$ . Естественно поэтому ожидать, что граница области существования периодического движения, связанная с возникновением и не вполне упругих ударов в каком-либо элементе колеблющейся конструкции, может оказаться опасной. Этот результат, однако, не следует непосредственно из п. 1 и требует отдельного рассмотрения.

Пусть фазовые координаты системы выбраны таким образом, что  $x_1$  означает относительное смещение соударяющихся масс,  $x_2 = \dot{x}_1$ ,  $x_3$  — смещение одной из этих масс,  $x_4 = \dot{x}_3$ . При этом начало отсчета выбрано так, что удар происходит при  $x_1 = 0$ , а безударному движению соответствует  $x_1 < 0$ .

Вводим в рассмотрение точечное преобразование  $M_1 = \Pi(M_0)$  полуплоскости  $x_1 = 0, x_2 > 0$ , порождаемое уравнениями безударного движения системы в окрестности траектории исходного устойчивого периодического решения. При таком выборе преобразования неподвижная точка  $M^* = \Pi(M^*)$  в  $C$ -бифуркационном случае  $\mu = 0$  становится точкой контакта указанной полуплоскости, а в случае  $\mu > 0$  соответствует хотя и устойчивому, но неосуществимому в реальной системе движению из-за пренебрежения ударным взаимодействием при  $x_1 = 0$  (фиг. 2, а).

Полагаем, что уравнения преобразования могут быть записаны в форме

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x_{11} &= 0 = f_1(0, x_{20}, x_{30}, \dots, x_{n0}, t_0, t_1) \\ x_{i1} &= f_i(0, x_{20}, x_{30}, \dots, x_{n0}, t_0, t_1) \quad (i = 2, 3, \dots, n) \end{aligned}$$

Получаемое из (2.1) обычным образом характеристическое уравнение имеет вид

$$(2.2) \quad \chi(\lambda) = \begin{vmatrix} \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{k0}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial t_0} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial t_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \frac{\partial f_i}{\partial x_{k0}} - \delta_{ik}\lambda & \dots & \frac{\partial f_i}{\partial t_0} + \lambda \frac{\partial f_i}{\partial t_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \sum_{m=0}^n c_m \lambda^{n-m} = 0$$

( $i, k = 2, 3, \dots, n$ )

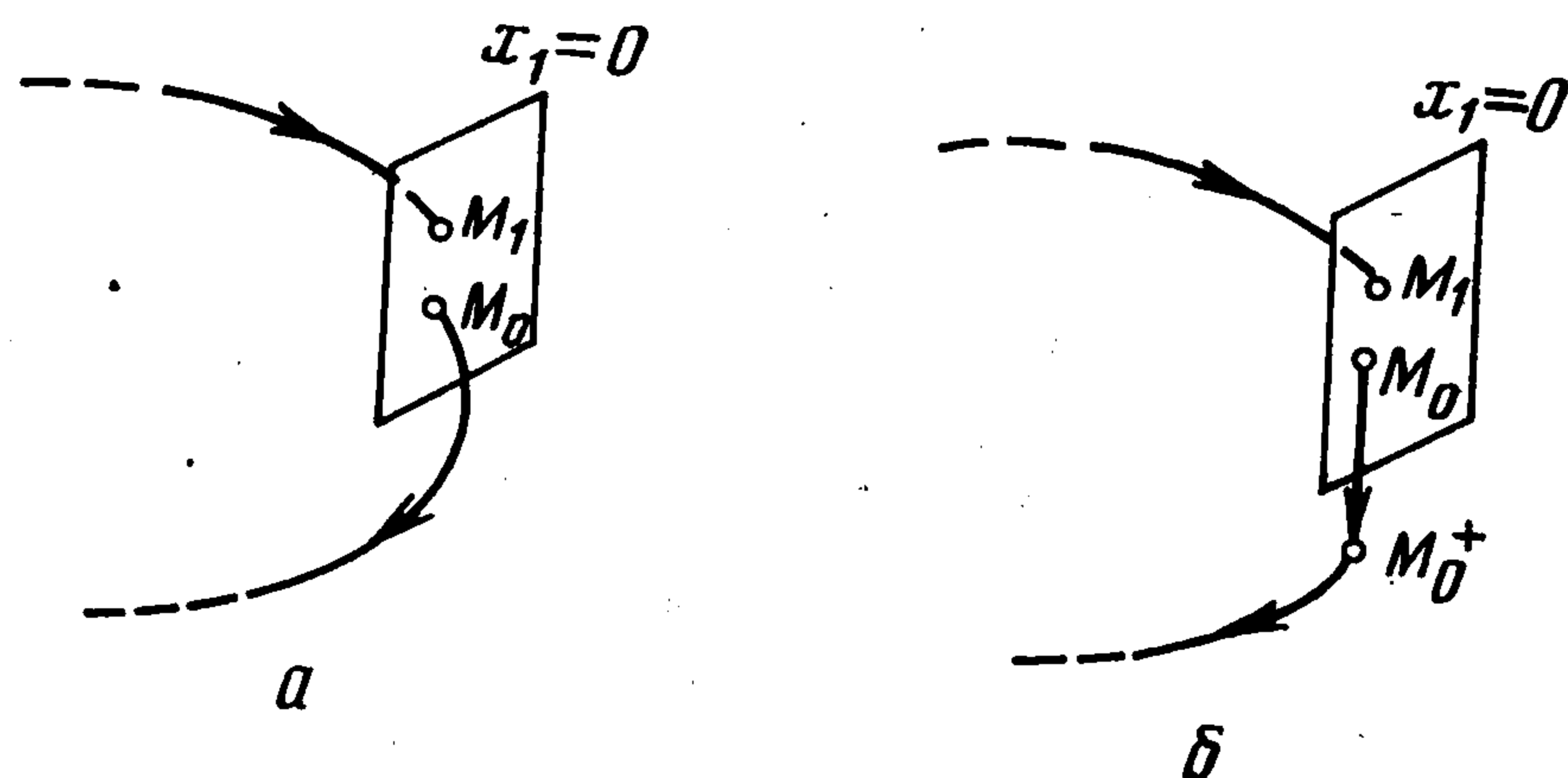
Здесь  $\delta_{ik}$  — символ Кронекера, а значения частных производных определяются координатами неподвижной точки  $x_{i1} = x_{i0} = x_i^*$ ,  $t_0 = t^*$ ,  $t_1 = t^* + T$ , где  $T$  — период движения.

Отметим особенность этого полинома, связанную с выбором точечного преобразования. При  $\mu \rightarrow 0$  гиперплоскость  $x_1 = 0$  становится поверхностью с контактом и относительная скорость  $x_2^* = \partial f_1 / \partial t_1 \rightarrow 0$ . Отсюда следует, что коэффициент

$$(2.3) \quad c_0 = (-1)^{2n} x_2^* \rightarrow 0$$

Условие (2.3) для заведомо устойчивого периодического движения приводит к тому, что и все остальные коэффициенты  $c_m$  уравнения (2.2) в случае  $C$ -бифуркации обращаются в нуль, т. е. к появлению у уравнения общего множителя, который обращается в нуль при  $\mu \rightarrow 0$ .

Обратимся теперь к рассмотрению близкого периодического движения, но включающего соударение масс при  $x_1 = 0$  (фиг. 2, б). (При  $C$ -бифуркации периодического движения, вызванной появлением дополнительных соударений, возможно в некоторых случаях возникновение



Фиг. 2

специфического скользящего режима [4].) Идеализируя удар, как мгновенный с коэффициентом восстановления скорости  $R$ , имеем известные соотношения между послеударными  $x_{20}^+$ ,  $x_{40}^+$  и доударными  $x_{20}$ ,  $x_{40}$  значениями скоростей в виде

$$(2.4) \quad x_{20}^+ = -Rx_{20}, \quad x_{40}^+ = x_{40} + \rho x_{20}, \quad \rho = \frac{1+R}{1+\kappa}$$

где через  $\kappa$  обозначено отношение соударяющихся масс. Периодическому решению будет соответствовать неподвижная точка преобразования

$$(2.5) \quad \begin{aligned} 0 &= f_1(0, -Rx_{20}, x_{30}, x_{40} + \rho x_{20}, \dots, x_{n0}, t_0, t_1) \\ x_{i1} &= f_i(0, -Rx_{20}, x_{30}, x_{40} + \rho x_{20}, \dots, x_{n0}, t_0, t_1) \\ (i &= 2, 3, \dots, n) \end{aligned}$$

Характеристическая матрица уравнений (2.5) будет формально отличаться от (2.2) лишь элементами первого столбца

$$(2.6) \quad -R \frac{\partial f_i}{\partial x_{20}} - \delta_{i2} \lambda + \rho \frac{\partial f_i}{\partial x_{40}} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Так как при  $C$ -бифуркации происходит слияние рассматриваемых периодических движений, то значения частных производных в обоих характеристических уравнениях совпадут. Отсюда и непосредственно из (2.2) и (2.6) получаем, что для характеристического полинома

$$\chi(\lambda, R) = \sum_{m=0}^n C_m(R) \lambda^{n-m}$$

преобразования (2.5)  $C_0(R) = c_0 \rightarrow 0$  и  $C_n(R) = -Rc_n \rightarrow 0$  при  $\mu \rightarrow 0$ . Однако теперь хотя бы один из остальных коэффициентов  $C_m(R)$  ( $m = 1, \dots, n-1$ ) не обратится в нуль при любом значении

$R \in (0,1)$ , если только не все  $\partial f_i / \partial x_{20} \rightarrow 0$ . Но тогда для рождающегося при  $C$ -бифуркации движения с дополнительным соударением будет нарушено хотя бы одно условие устойчивости.

Заметим, что отсюда следует, в частности, неустойчивость периодических движений с соударениями, близких к гармоническим (а значит, безударным). Это указывает на необходимость более строгого обоснования применения метода гармонической линеаризации к изучению периодических колебаний систем с соударениями.

**3. Структура окрестности и эффект расплывания границы существования.** После обнаружения участков границы существования с потерей устойчивости возникает задача определения типа движения, устанавливающегося при переходе через эти участки, и характеристик движения. Воспользуемся установленными в работе [3] критериями, которые характеризуют  $C$ -бифуркацию. Если известен характеристический полином  $\chi(\lambda, q, \mu)$  рассматриваемых преобразований, то условие безопасного перехода при изменении знака параметра  $\mu$  примет вид

$$(3.1) \quad \chi(1, 0, 0) \chi(1, q, 0) > 0, \quad |q| < q_+, \quad \chi(1, q_+, 0) = 0$$

Условие опасного перехода, при котором происходит слияние с последующим исчезновением исходного устойчивого движения ( $q = 0$ ) с неустойчивым ( $q \neq 0$ )

$$(3.2) \quad \chi(1, 0, 0) \chi(1, q, 0) < 0, \quad |q| > q_+$$

Условие рождения движения с удвоенным периодом, фазовая траектория которого на одном обороте не достигает поверхности излома (1.2)  $D = 0$ , а на другой — заходит в подпространство  $D > 0$

$$(3.3) \quad \chi(-1, 0, 0) \chi(-1, q, 0) < 0, \quad |q| > q_-, \quad \chi(-1, q_-, 0) = 0$$

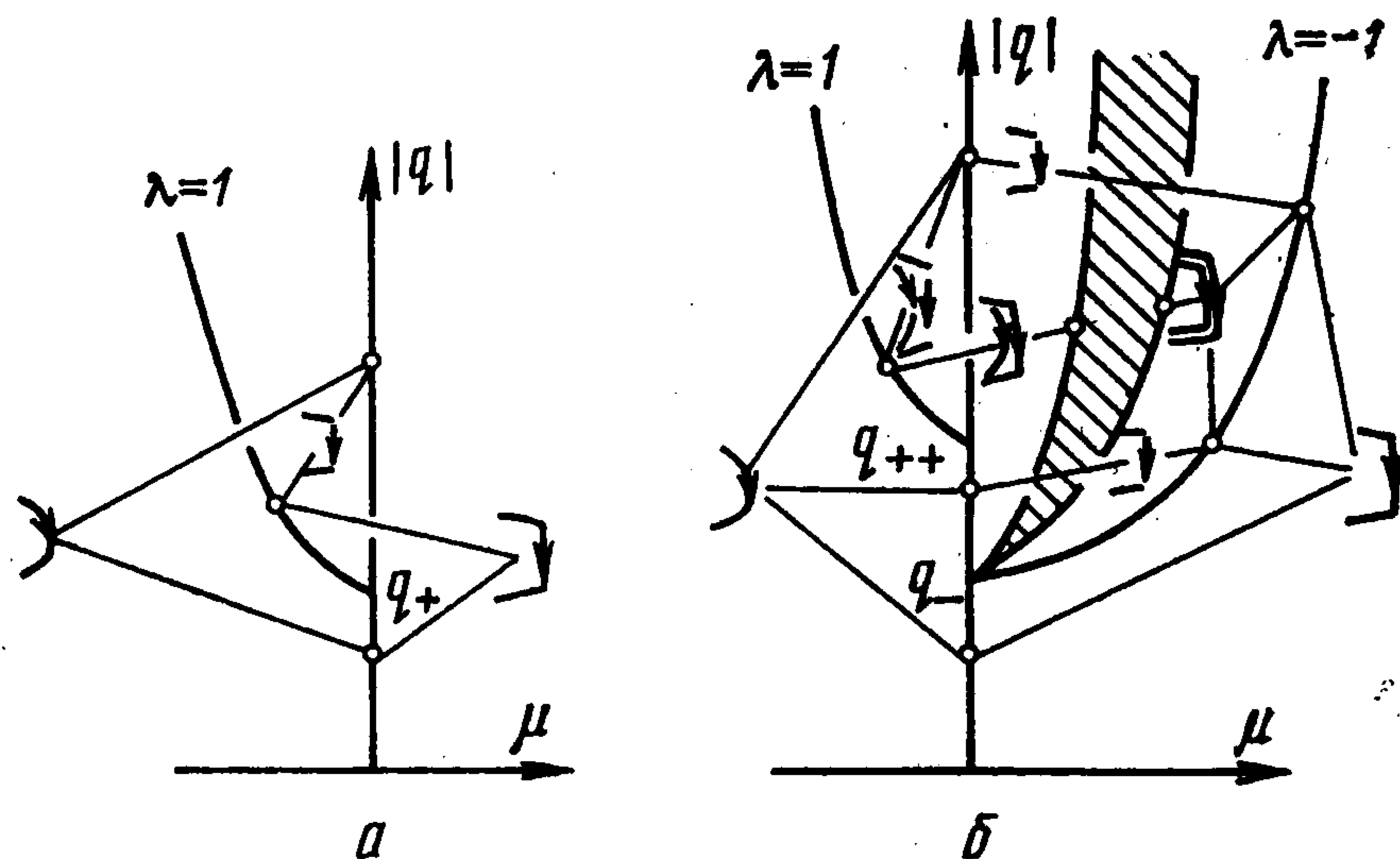
Отметим, что условие (3.3) содержит две возможности: безопасную, если  $|q| < q_{++}$ , и опасную, если  $|q| > q_{++}$ , аналогичные случаям (3.1) и (3.2). Значение параметра  $q_{++}$  здесь соответствует потере устойчивости уже двухоборотного движения.

Если к указанным условиям добавить еще известную картину поведения системы вблизи границ области устойчивости, а именно, что граница  $\chi(1, q, \mu) = 0$  обращения в нуль якобиана преобразования соответствует слиянию устойчивого и неустойчивого движений одного типа, а граница  $\chi(-1, q, \mu) = 0$  — рождению двухоборотного движения, то получаем следующие простейшие качественные картины структуры окрестности рассматриваемой  $C$ -границы  $\mu = 0$  в плоскости двух параметров  $\mu, q$  (фиг. 3). Для наглядности тип движения условно изображен участком фазовой траектории: штриховое обозначение соответствует неустойчивым движениям, наличие изломов — заходу фазовой траектории движения в область  $D > 0$ , два рядом расположенных участка — двухоборотному периодическому режиму.

Полоса, выделенная на фиг. 3, б штриховкой, соответствует  $C$ -бифуркационному переходу между двухоборотными режимами с одним и двумя заходами фазовой траектории в подпространство  $D > 0$ . Проведенное

выше рассмотрение полностью применимо к структуре указанной полосы: с ростом  $|q|$  она не только может стать сложной сама по себе, но также и порождать новые бифуркационные узлы — источники новых  $S$ -границ и границ устойчивости движений, еще более сложных по сравнению с исходными (см. (1.6) и (1.7)).

Если при этом вся область неоднозначности решений в окрестности  $S$ -границы  $\mu = 0$  остается достаточно узкой, то именно эта область в целом имеет практическое значение, а не отдельные расположенные в ней



Фиг. 3

многочисленные границы переходов и устойчивости. В этом случае будет правильнее говорить об эффекте расплывания границы области существования периодического движения (1.6).

По мере усложнения структуры детерминированное рассмотрение характеристик конкретных типов движений в полосе расплывания границы теряет практический смысл. В зависимости от целей исследования здесь может оказаться целесообразней либо статистический подход к изучению этих движений, либо внесение изменений в рассматриваемую математическую модель, исключающих порождение стохастичности.

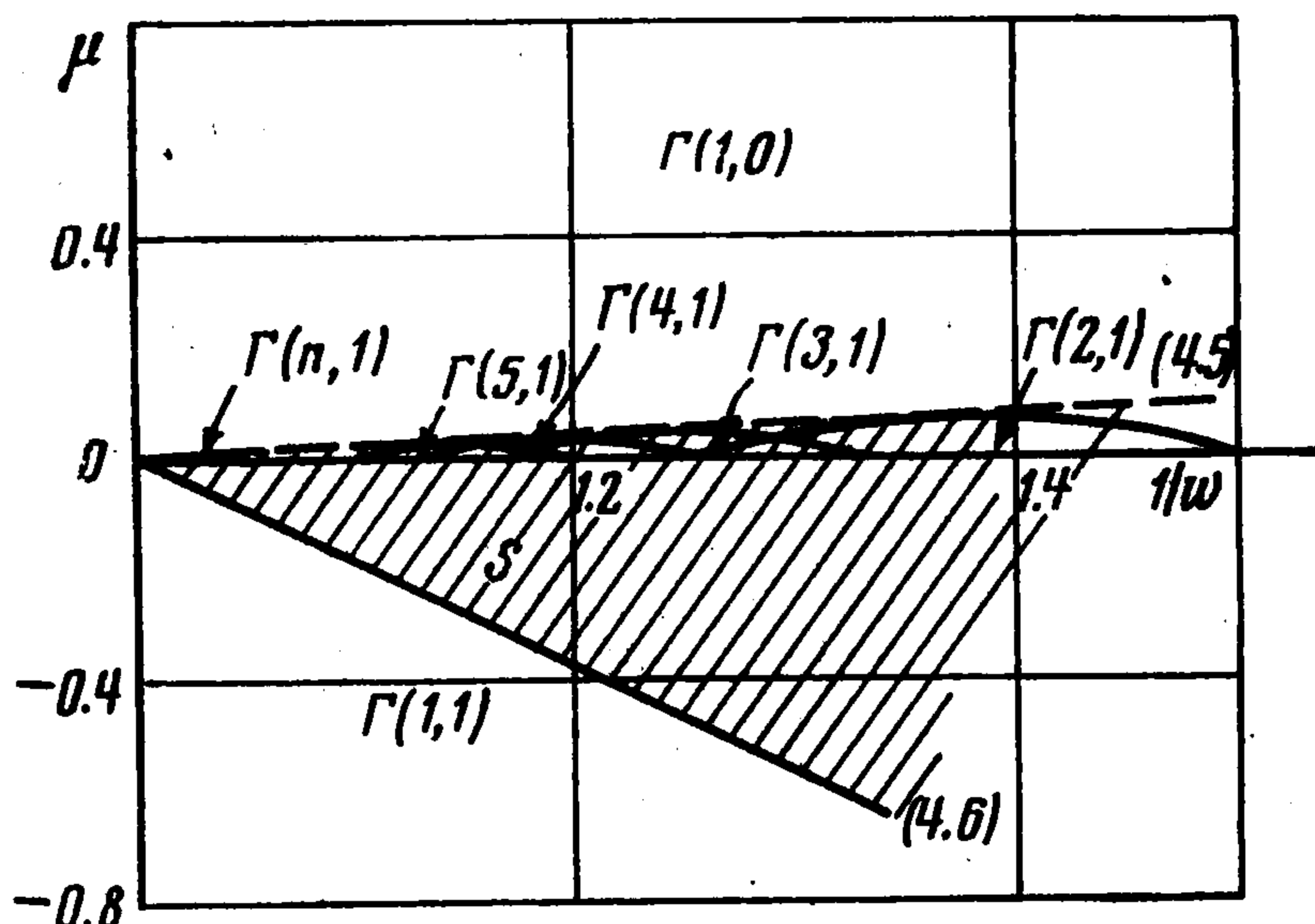
Ширину полосы расплывания границы существования представляется возможным оценить, исследуя поведение некоторых границ устойчивости. Для области пространства параметров  $\mu < 0$  — это граница устойчивости в общем случае многооборотного режима, соответствующая равенству одного из корней характеристического уравнения  $+1$ . Для области  $\mu > 0$  — это граница устойчивости периодического движения (1.7), соответствующая обращению одного из корней в  $-1$  (фиг. 3).

**4. Пример.** Исследуем структуру и оценим ширину полосы расплывания одного из участков границы существования режима вынужденных колебаний линейной системы, нарушаемого неподвижным ограничителем перемещения. Уравнения движения системы в безразмерной форме имеют вид

$$(4.1) \quad \begin{aligned} x'' + 2cx' + x &= \cos \omega \tau & (x < d) \\ x_+ &= -Rx_- & (x = d) \end{aligned}$$

где  $c$  — коэффициент линейного трения, а  $R$  — коэффициент восстановления скорости при ударе.

Обозначим через  $\Gamma(n, k)$  установившееся движение с  $k$  ударами в течение периода, равного  $2\pi n / \omega$ . Очевидно, что устойчивые вынужденные линейные колебания  $\Gamma(1, 0)$  существуют в системе (4.1) при  $|\mu = d/d_* - 1| > 0$ , где  $d_*$  — амплитуда этих колебаний. Проведенное рассмотрение показало, что на границе  $\mu = 0$  не может быть простого безопасного перехода в какой-либо устойчивый режим движения типа  $\Gamma(n, 1)$ . Отметим, что на указанной границе могут порождаться не только отдельные  $\Gamma(n, k)$ , но и целые семейства таких движений [5]. Однако поставленную задачу можно решить, ограничиваясь рассмотрением лишь множества движений типа  $\Gamma(n, 1)$ .



Фиг. 4

В случае  $c \ll 1$  уравнение границы устойчивости  $\Gamma(n, 1)$ , расположенной в области  $\mu > 0$  и соответствующей равенству одного из корней  $+1$ , можно записать [5]

$$(4.2) \quad \mu(2 + \mu) - \omega^2 \left( \frac{1 - R}{1 + R} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - c \left( 1 - \frac{\theta}{\sin \theta} \right) \right)^{-2} = 0, \quad \theta = \frac{2\pi n}{\omega}, \quad \sin \theta < 0$$

Внутри области существования любого из периодических решений (4.1) имеет место непрерывная зависимость этого решения от параметров. Поэтому, чем шире область неоднозначности решений, расположенная между кривой (4.2) и  $S$ -границей  $\mu = 0$ , тем более «опасным» может оказаться срыв режима вынужденных линейных колебаний на этой границе. Известно, что подобные срывы для систем с упругой характеристикой жесткого типа происходят в зарезонансной области частот.

Обратимся к рассмотрению дорезонансной области  $\omega < 1$ . Устойчивые режимы  $\Gamma(n, 1)$  при  $\mu > 0$  согласно (4.2) имеют место в интервалах частот

$$(4.3) \quad 1 + \frac{1}{2n} < \frac{1}{\omega} < 1 + \frac{1}{n}$$

При этом ширина каждой из областей, оцениваемая по среднему значению  $\omega$  из интервалов (4.3), стремится к нулю с увеличением  $n$  при  $\omega \rightarrow 1$  в соответствии с приближенным выражением

$$(4.4) \quad \mu \approx \frac{1}{2} \omega^2 \left( \frac{1 - R}{1 + R} + c \frac{3/2\pi}{1 - \omega} \right)^{-2}$$

Со стороны  $\mu > 0$  область усложняющейся структуры  $S$  в интервале  $2/3 < \omega < 1$  простирается до границы устойчивости одноударного режима  $\Gamma(1, 1)$ , соответствующей равенству  $\lambda = -1$  для одного из корней характеристического полинома.

Уравнение указанной границы для случая  $1 - \omega \ll 1$  и диссипации энергии только за счет не вполне упругих соударений может быть записано в виде

$$(4.5) \quad \mu \approx - \left( \frac{1}{\omega} - 1 \right) \frac{(1 + R)^2}{1 + R^2}$$

Таким образом, в окрестности  $\omega = 1$  область  $S$  расположена между границами (4.4) и (4.5), начинающимися в точке  $\omega = 1, \mu = 0$ . С увеличением  $R$  размеры  $S$  несколько растут. Для  $R = 0.6$  указанная область приведена на фиг. 4. Число различ-

ных режимов  $m$  типа  $\Gamma(n, 1)$ , которые могут иметь место при одной и той же частоте, определяется согласно (4.3) неравенством  $1/(2n) < 1/\omega - 1 < 1/(n+m)$  и по мере приближения к резонансной частоте неограниченно растет. При этом интервал изменения параметра  $\mu$  внутри  $S$  стремится к нулю. Такая усложняющаяся структура делает бесперспективной задачу исследования в  $S$  отдельных движений. Из этого не следует, однако, неизбежность статистического рассмотрения. Если представляют интерес максимальные отклонения колеблющейся системы, а не фазы отдельных соударений, то целесообразно в части области  $S$ , где наиболее проявляется эффект расплывания границы существования  $\Gamma(1, 0)$ , принять другую математическую модель. В простейшем варианте это может быть линейная модель, в которой учитывается рассеивание энергии также и за счет не вполне упругих соударений. При этом соответствующий этому вклад в «эквивалентный» коэффициент линейного трения  $c^\circ$  может быть оценен по формуле, которая естественно получилась в выражении (4.4) как дополнительное слагаемое к коэффициенту  $c$

$$(4.6) \quad c^\circ = c + \frac{(1-\omega)(1-R)}{\frac{3}{2}\pi(1+R)}$$

При этом остается возможность изучения отдельных движений с достаточно большим значением  $n$ , так как избежать порождения стохастичности можно, заменяя исходную модель (4.1) на линейную с коэффициентом трения (4.6) при  $\omega > 2n/(1+2n)$ .

В заключение отметим, что результаты проведенного рассмотрения хорошо согласуются с результатами исследования тонкой структуры движений в системе (4.1) на аналоговой машине, приведенными в работе [6]. Действительно, в дорезонансной области типы движений оказывались тем сложнее, чем ближе к границе  $\mu = 0$  и частоте  $\omega = 1$  выбирались значения параметров. Проявление стохастичности следует ожидать в тех случаях, когда области существования отдельных режимов в пространстве параметров становятся настолько узкими, что перекрываются флуктуациями элементов аналоговой машины. Движения, названные в работе [6] квазипериодическими, соответствуют, по-видимому, этим случаям.

Вместе с тем полученные теоретические результаты позволяют уточнить расположение границ существования, обозначенных в [6] через  $\rho_1$ . Являясь опасными, они должны сместиться внутрь области неоднозначности решений.

Поступила 16 III 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баутин Н. Н. Об аппроксимациях и грубости пространства параметров динамической системы. ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.
2. Баутин Н. Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. Л.—М., Гостехиздат, 1949.
3. Фейгин М. И. Удвоение периода колебаний при С-бифуркациях в кусочно-непрерывных системах. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
4. Федосенко Ю. С., Фейгин М. И. К теории скользящего режима в динамических системах с соударениями. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
5. Фейгин М. И. О рождении семейств субгармонических режимов в кусочно-непрерывной системе. ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.
6. Peterka F. Laws of impact motion of mechanical systems with one degree of Freedom. Pt. II. Results of analogue computer modelling of the motion. Acta technica CSAV, 1974, vol. 19, No. 5.