

**ПРИНЦИП КОЛЬЦА И ЗАДАЧА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ
ДВУХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ**

В. С. Афраимович, Л. П. Шильников

(Горький)

Показано, что при взаимодействии двух автоколебательных систем может существовать притягивающее множество, содержащее счетное множество периодических движений.

В работах Ван дер Поля, А. А. Андронова и А. А. Витта было установлено наличие режимов синхронизации и биений при воздействии внешнего периодического возмущения на автоколебательную систему. Вопрос о существовании режимов биений можно свести к задаче о существовании устойчивых инвариантных торов в нерезонансных случаях. Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым [1] было показано, что при надлежащем выборе секущей существование инвариантного тора следует из существования инвариантной кривой у отображения кольца в кольцо. Дальнейшее изучение вопросов существования и гладкости периодических поверхностей связано с работами Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского, Левинсона, Дилиберто, Хейла и др.

1. Может случиться, что для отображения кольца в кольцо инвариантной кривой в кольце не существует, а имеется замкнутое инвариантное множество сложной природы, содержащее счетное множество периодических движений, континуум траекторий, устойчивых по Пуассону и т. д. Ниже дается математическое описание подобной ситуации, формулируемое в виде принципа кольца (для простоты излагаемого здесь в менее общей форме, чем в [2]).

Принцип кольца. Пусть отображение T :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= f(x, \theta), \quad \bar{\theta} = \theta + g_1(x, \theta) \equiv g(x, \theta) \pmod{2\pi} \\ x &= (x_1, \dots, x_k) \end{aligned}$$

где f и g_1 — 2π -периодические по θ и C^1 -гладкие функции, переводит кольцо $K: \|x\| \leq r_0, 0 < \theta \leq 2\pi$ в себя и удовлетворяет следующим условиям:

1°. $\|f_x\| \leq q < 1$ для всех (x, θ) .

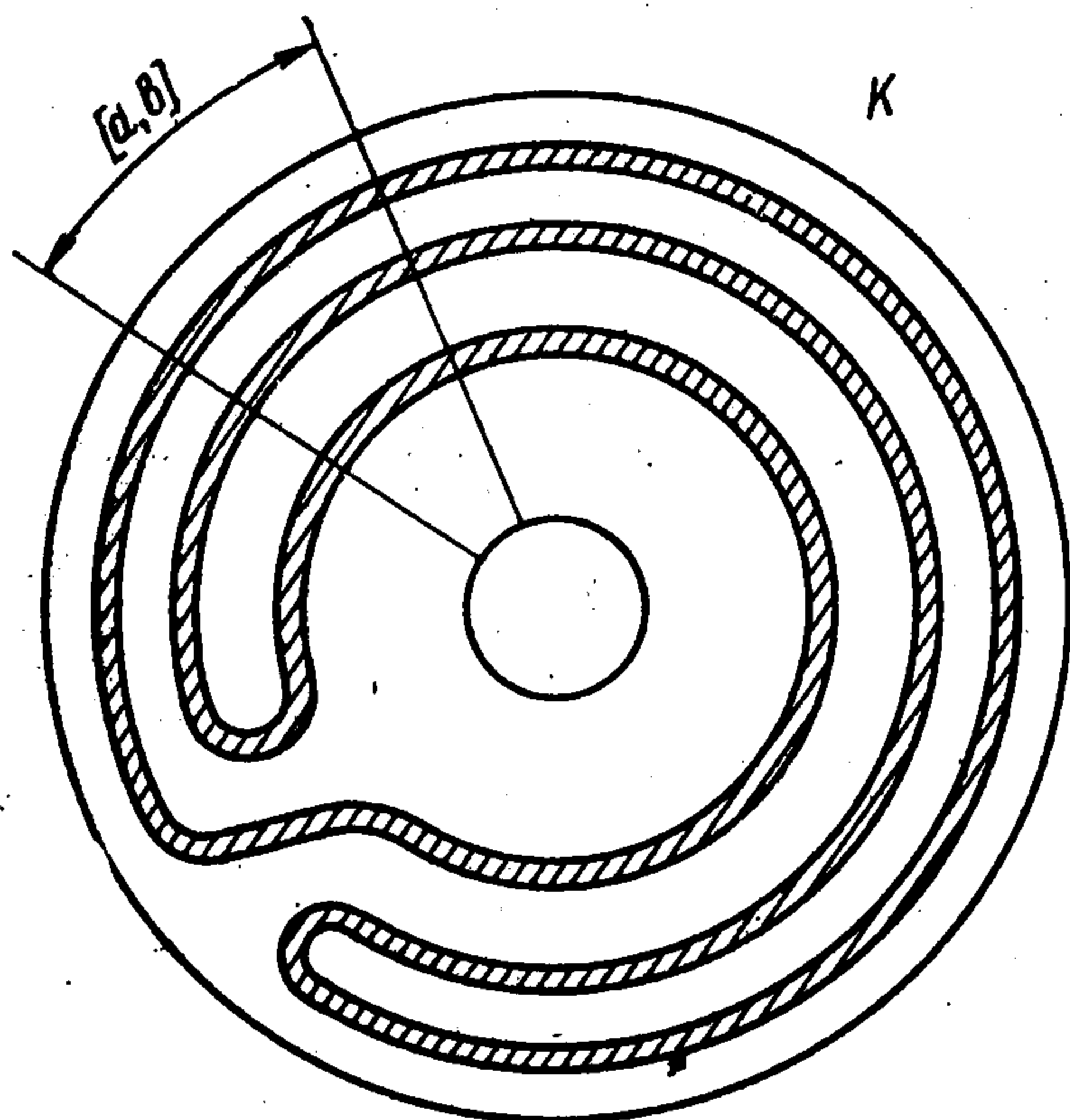
2°. Выполняется условие растяжения фаз, т. е. существует такое $p > 1$ и отрезок $[a, b], 0 < a < b \leq 2\pi$, что $\max_x |g_{\theta}^{-1}| \leq p^{-1}$ для любого $\theta \in [a, b]$. Кроме того, $|g(x, b) - g(x, a)| > 2\pi(n + 1), n \geq 2$ для любого $x, \|x\| \leq r_0$.

3°. $\|f_{\theta}\| \|g_x\| < (p - 1)(1 - q)$ для всех $(x, \theta) \in K$.

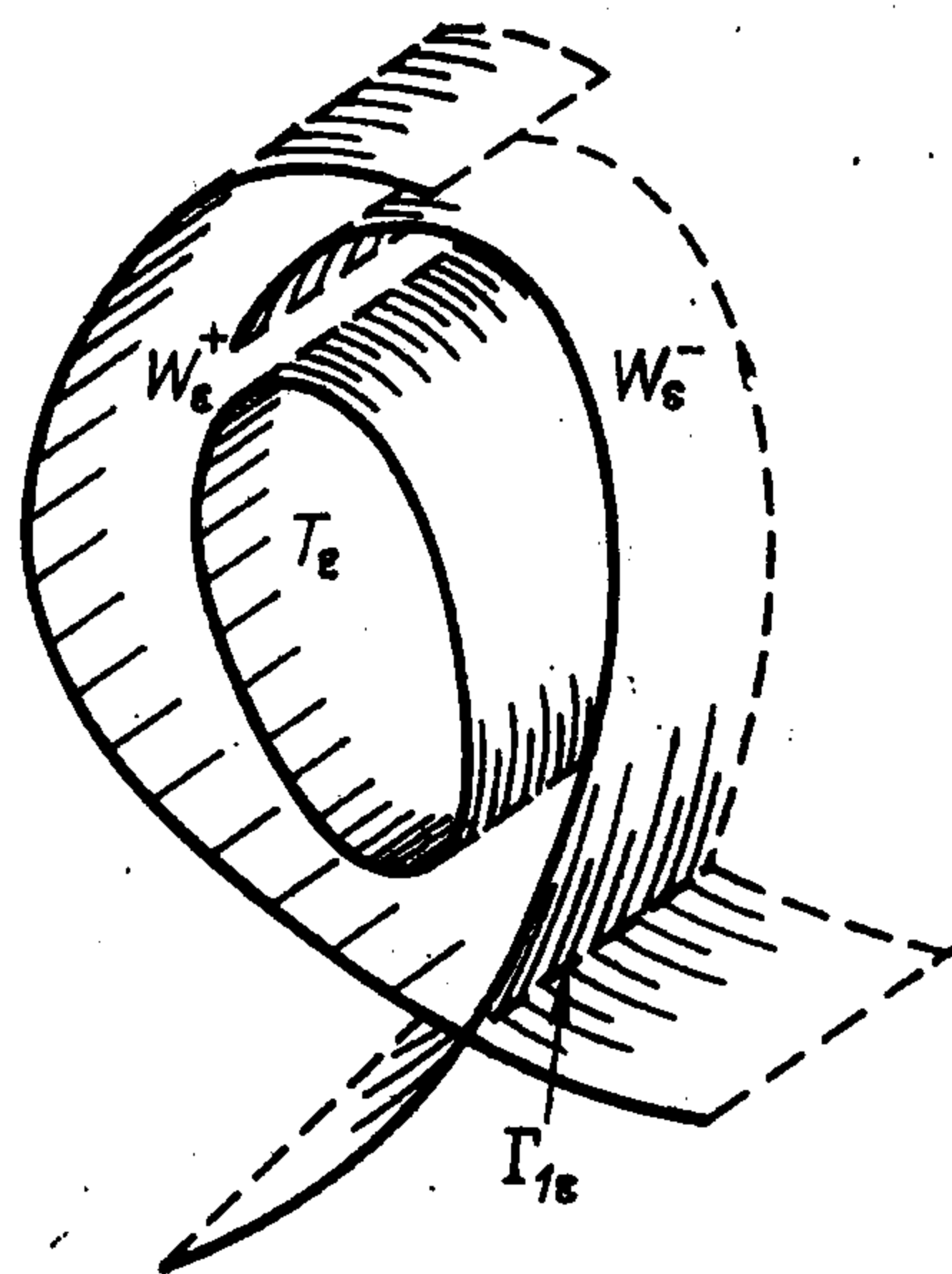
Тогда в кольце K существует замкнутое множество Σ , состоящее из траекторий отображения T , которые могут быть поставлены во взаимно-

однозначное и взаимно-непрерывное соответствие с множеством всевозможных бесконечных в обе стороны последовательностей, составленных из n символов. Иными словами, отображение T на Σ топологически сопряжено со сдвигом топологической схемы Бернулли из n символов (см. фиг. 1, где заштрихована область, являющаяся образом K при отображении T).

Условие 2° означает увеличение длин образов окружностей $x = x_0$, не менее чем в $(n + 1)$ раз приводящее к экспоненциальному разбеганию точек по фазе на интервалах, где $|g_\theta| > 1$ (см. фиг. 1). В связи с этим следует отметить близость условия 2° к эвристическому критерию стохастичности Б. В. Чирикова, указанному им для сохраняющих площадь отображений¹.



Фиг. 1



Фиг. 2

Естественно, что подобные случаи не встречались в задачах, в которых возмущения исходных уравнений были достаточно малыми. Чтобы указать систему, в которой реализуется принцип кольца, нужно, чтобы либо связь взаимодействия автоколебательных систем (или возмущение автоколебательной системы) была достаточно большой, либо мера грубости (т. е. расстояние до бифуркационной границы) одной из систем была малой. Первый путь весьма сложен: его реализация в конкретных случаях в значительной мере связана с использованием ЭВМ. На втором же пути можно выделить условия, в которых принцип кольца применим. А именно, результат, установленный в данной работе, заключается в следующем: при взаимодействии двух автоколебательных систем, одна из которых имеет проходящий около состояния равновесия типа седло предельный цикл (соответствующий автоколебательному режиму), отображение некоторой секущей в себя может удовлетворять условиям принципа кольца. Для периодически возмущенных двумерных автоколебательных систем установление сложной структуры траекторий с помощью принципа кольца было проведено в [2].

¹ Чириков Б. В. Исследование по теории нелинейного резонанса и стохастичности, Препринт Ин-та ядерн. физ. СО АН СССР, 267, Новосибирск, 1969.

Другие механизмы возникновения притягивающих множеств сложной природы указаны в [3,4].

2. Будем рассматривать систему дифференциальных уравнений

$$(2.1) \quad u' = U(u, \varepsilon), \quad \|u\| \leq \text{const}, \quad \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$$

где u — m -вектор, правые части системы C^4 -гладкие вектор-функции переменных и C^3 -гладки по ε . Предположим, что система (2.1) имеет состояние равновесия O_ε , являющееся простым седлом, для которого корнями характеристического уравнения будут $\lambda_1(\varepsilon), \dots, \lambda_{m-1}(\varepsilon), \gamma(\varepsilon)$, причем $\text{Re} \lambda_i(\varepsilon) < 0, \gamma(\varepsilon) > 0$.

Предположим, что при $\varepsilon = 0$ выполнены следующие условия:

- 1) существует траектория Γ_0 , двоякоасимптотическая к седлу O_0 ;
- 2) седловая величина отрицательна, т. е.

$$(2.2) \quad \max_i \{\text{Re} \lambda_i(0)\} + \gamma(0) < 0$$

Тогда, согласно [5,6], если петля «разваливается внутрь» при $\varepsilon > 0$ (для определенности), то система (2.1) при положительных ε имеет устойчивый предельный цикл Γ_ε . Очевидно, мера грубости (т. е. расстояние до бифуркационной поверхности, соответствующей петле сепаратрисы) системы (2.1) имеет порядок ε .

Пусть имеет место либо случай 1): система (2.1) находится под действием малого периодического возмущения порядка μ : $u' = U(u, \varepsilon) + \mu U_1(t, u, \varepsilon, \mu)$, либо случай 2): система (2.1) взаимодействует с другой автоколебательной системой, т. е.

$$(2.3) \quad u' = U(u, \varepsilon) + \mu P(u, v, \mu)$$

$$(2.4) \quad v' = V(v) + \mu Q(u, v, \mu) \\ \|u\| \leq \text{const}, \quad \|v\| \leq \text{const}, \quad \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0], \quad \mu \in [-\mu_0, \mu_0]$$

где v — n -вектор, правые части системы (2.3), (2.4) — C^4 -гладкие вектор-функции переменных и параметров ε и μ . Для определенности будем рассматривать случай 2), так как случай 1) рассматривается аналогично.

Предположим, что система (2.4) при $\mu = 0$ имеет периодическое движение $\Gamma_1: v = v(\theta), \theta = \omega t, \omega > 0$, соответствующее грубому предельному циклу, мультипликаторы которого неотрицательны. В силу теории Флоке — Ляпунова в достаточно малой окрестности Γ_1 при $\mu = 0$ систему (2.4) C^4 -гладкой невырожденной заменой переменных $v \rightarrow (r, \theta)$ можно привести к виду

$$r' = Ar + B(r, \theta), \quad \theta' = \omega + C(r, \theta)$$

где r — $(n-1)$ -вектор, B, C — 2π -периодичны по θ и C^3 -гладки, собственные значения $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ матрицы A таковы, что $\text{Re} \alpha_i < 0, i = 1, \dots, n-1$.

Из предположений относительно систем (2.3) и (2.4) при $\mu = 0$ следует, что система (2.3), (2.4) при $\mu = 0, \varepsilon > 0$ будет иметь седловое периодическое движение $\Gamma_{1\varepsilon} \equiv O_\varepsilon \times \Gamma_1$, устойчивое многообразие W_ε^+ которого $(m+n-1)$ -мерно, а неустойчивое W_ε^- двумерно, а также двумерный ин-

вариантный тор $T_\varepsilon \equiv \Gamma_\varepsilon \times \Gamma_1$, который при малых ε проходит вблизи периодического движения $\Gamma_{1\varepsilon}$ и при $\varepsilon \rightarrow 0$ влипают в петлю неустойчивого многообразия W_ε^- , равную $\Gamma_0 \times \Gamma_1$ (см. фиг. 2, где $\mu = 0$, $\varepsilon > 0$, сплошными линиями показаны следы пересечения тора T_ε и многообразий W_ε^+ , W_ε^- с секущей $\theta = \text{const}$).

Предположим, что седловая величина периодического движения отрицательна, т. е.

$$(2.5) \quad \max \{ \text{Re } \lambda_j(0), \text{Re } \alpha_i \} + \gamma(0) < 0$$

Отметим, что в случае 1) условие (2.5) при выполнении неравенства (2.2) выполняется автоматически.

Изучение поведения траекторий системы (2.3), (2.4) в некоторой малой окрестности тора T_ε удобно свести к изучению отображения по траекториям системы (2.3), (2.4) секущей в себя. Секущую будем выбирать как прямое произведение некоторой секущей к Γ_ε (и к Γ_0) и малой окрестности Γ_1 .

3. В окрестности $\Gamma_{1\varepsilon}$ C^3 -гладкой невырожденной заменой переменных и времени приведем систему (2.3), (2.4) к виду

$$(3.1) \quad \begin{aligned} x^* &= A(\varepsilon, \mu)x + F(x, y, \theta, \varepsilon, \mu)x, & y^* &= \gamma(\varepsilon, \mu)y \\ \theta^* &= \omega + H(x, y, \theta, \varepsilon, \mu), & H &= H_1x + H_2y \end{aligned}$$

Здесь x — $(m + n - 2)$ -вектор; y, θ — скаляры, правые части системы принадлежат классу C^2 в области $G \equiv B_1 \times [-\varepsilon_1, \varepsilon_1] \times [-\mu_1, \mu_1]$ ($0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, $0 < \mu_1 \leq \mu_0$, B_1 — δ -окрестность $\Gamma_{1\varepsilon}$); F, H — 2π -периодичны по θ и обращаются в нуль при $x = 0, y = 0$; собственные числа $(m + n - 2) \times (m + n - 2)$ -матрицы $A(\varepsilon, \mu)$ близки к $\lambda_1(0), \dots, \lambda_{m-1}(0), \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ соответственно, а величина $\gamma(\varepsilon, \mu)$ близка к $\gamma(0)$.

Замечание 1. Систему в виде (3.1) можно получить из распрямления гладких инвариантных многообразий W_ε^+ и W_ε^- периодического движения $\Gamma_{1\varepsilon}$, существующих в силу теорем 3—6 работы [7], из замен времени и теории Флоке — Ляпунова. Можно также показать, что при $\mu = 0$ в совокупной замене (u, v) на (x, y, θ) y как функция u, v не зависит от v , а θ не зависит от u .

При достаточно малом δ в G_1 имеют место оценки

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \|F_x\| + \|F_y\| + \|H_x\| + \|H_y\| &\leq M, & \|F\| + \|H\| &\leq M\delta \\ \|F_\theta\| + \|H_\theta\| &< N\delta, & \|H_{1\theta}\| + \|H_{2\theta}\| &< M' \end{aligned}$$

где M, M' и N — постоянные, не зависящие от δ .

Отображение T будем искать в виде суперпозиции отображения T_0 , построенного по траекториям системы (2.3), (2.4), проходящим в окрестности $\Gamma_{1\varepsilon}$, и отображения T_1 по траекториям, проходящим в окрестности $\Gamma_0 \times \Gamma_1$.

Отображение T_0 . При $\mu = \varepsilon = 0$ в силу предположений пересечение W_ε^- с δ -окрестностью $\Gamma_{1\varepsilon}$ имеет две компоненты связности: W^- , принадлежащую цилиндру $x = 0$, и W^{-+} , принадлежащую цилиндру $y = 0$. Зафиксируем на W^- окружность P^- : $x = 0, y = d_1, 0 < \theta \leq 2\pi$ и рассмотрим секущую S_1 : $y = d_1, \|x\| \leq \rho_1, 0 < \theta \leq 2\pi$. Далее, зафиксируем

на W^{-+} окружность P^+ : $x = x^0$, $y = 0$, $0 < \theta \leq 2\pi$ и выберем любую трансверсальную к W^{-+} секущую S_0 , такую, что $\|x - x^0\| \leq \rho_0$, $\|y\|_1 \leq \leq \rho_0$ для точек $(x, y, \theta) \in S_0$. Очевидно, при достаточно малых μ , ε , ρ_0 , ρ_1 секущие S_1 и S_0 трансверсальны к траекториям системы (2.3), (2.4).

Пусть

$$(3.3) \quad x = x(t, x_0, y_0, \theta_0), \quad \theta = \theta(t, x_0, y_0, \theta_0), \quad y = y_0 e^{\gamma(\varepsilon, \mu)t}$$

— решение системы (3.1), проходящее при $t = 0$ через точку (x_0, y_0, θ_0) , лежащее в δ -окрестности $\Gamma_{1\varepsilon}$. Зафиксируем λ_1 , $\max_{i,j} \{\operatorname{Re} \lambda_j(0), \operatorname{Re} \alpha_i\} < < \lambda_1 < 0$ и γ_1 , $\gamma_1 > \gamma(0) > 0$, такие, что $\lambda_1 + \gamma_1 < 0$ (они существуют в силу предположения (2.5)). Можно показать, что при всех достаточно малых ε и μ имеет место оценка

$$(3.4) \quad \|\exp A(\varepsilon, \mu)t\| \leq \operatorname{const} e^{\lambda_1 t}$$

Методами работ [6,8] с использованием неравенств (3.2), (3.4) и обобщенного неравенства Гронуолла доказывается следующая лемма:

Лемма 1. Для любых чисел α и β , таких, что $\alpha > 0$, $\lambda_1 < \beta < 0$, существуют такие числа δ_2 , μ_2 ($0 < \mu_2 \leq \mu_1$), ε_2 ($0 < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$), что в области $G \equiv B_2 \times [-\varepsilon_2, \varepsilon_2] \times [-\mu_2, \mu_2]$, где B_2 — δ -окрестность $\Gamma_{1\varepsilon}$ ($0 < < \delta \leq \delta_2$), для решения уравнений (3.1) имеют место оценки (C_i, C_i' — постоянные)

$$(3.5) \quad \|x(t)\| \leq 2\delta e^{\lambda_1 t}$$

$$(3.6) \quad \left\| \frac{\partial x(t)}{\partial x_0} \right\| \leq C_1 e^{\beta t}, \quad \left\| \frac{\partial \theta(t)}{\partial x_0} \right\| \leq C_1' e^{N\beta t}$$

$$(3.7) \quad \left\| \frac{\partial x(t)}{\partial y_0} \right\| \leq C_2 e^{(\lambda_1 + \gamma_1)t}, \quad \left\| \frac{\partial \theta(t)}{\partial y_0} \right\| \leq C_2' e^{\gamma(\varepsilon, \mu)t}$$

$$(3.8) \quad \left\| \frac{\partial x(t)}{\partial \theta_0} \right\| \leq C_3 \delta e^{(\lambda_1 + \alpha)t}, \quad \left| \frac{\partial \theta(t)}{\partial \theta_0} - 1 \right| \leq C_3' \delta$$

Выберем δ_2 , ε_2 , μ_2 настолько малыми, чтобы α и β удовлетворяли условиям

$$(3.9) \quad 0 < \alpha < \gamma_1, \quad 0 < \alpha < -(\lambda_1 + \gamma_1), \quad \lambda_1 < \beta < \lambda_1 + \gamma_1$$

и, кроме того, $C_3' \delta_2 < 1/8$, $M\delta_2 < \min\{1/8, 1/8 \omega\}$.

Эти неравенства с учетом (3.5) позволяют непосредственно из вида системы (3.1) получить оценки

$$(3.10) \quad \left\| \frac{\partial x(t)}{\partial t} \right\| < 2(\|A(\varepsilon, \mu)\| + 1/8) \delta_2 e^{\lambda_1 t}$$

$$\left| \frac{\partial \theta(t)}{\partial t} - \omega \right| < \frac{1}{8} \omega$$

а последняя из оценок (3.8) переписывается теперь так:

$$(3.11) \quad \left| \frac{\partial \theta(t)}{\partial \theta_0} - 1 \right| < \frac{1}{8}$$

Отображение $T_0: S_0 \rightarrow S_1$ получим, подставляя в (3.3) время перехода

$$(3.12) \quad t_n = -\frac{1}{\gamma(\varepsilon, \mu)} \ln \frac{y_0}{d_1}$$

от S_0 до S_1 , определяемое из условия $d_1 = y_0 e^{\gamma(\varepsilon, \mu)t}$. Имеем

$$(3.13) \quad T_0: x_1 = x \left(-\frac{1}{\gamma(\varepsilon, \mu)} \ln \frac{y_0}{d_1}, x_0, y_0, \theta_0, \varepsilon, \mu \right)$$

$$\bar{\theta}_1 = \theta \left(-\frac{1}{\gamma(\varepsilon, \mu)} \ln \frac{y_0}{d_1}, x_0, y_0, \theta_0, \varepsilon, \mu \right)$$

Неравенство (3.5) примет вид

$$(3.14) \quad \|x_1\| \leq 2\delta \left(\frac{y_0}{d_1} \right)^\zeta, \quad \zeta = -\frac{\lambda_1}{\gamma_1}$$

Отсюда вытекает следующее утверждение: для любого $\rho_1 > 0$ существует такое $b > 0$, что при всех достаточно малых ε_2, μ_2 отображение $T_0: S_0 \rightarrow S_1$ определено в области $\sigma_0 = \{(x, y, \theta) \in S_0, 0 < y \leq b\}$.

Отображение T_1 . В силу сделанных предположений окружность P преобразуется за конечное время по траекториям системы (2.3), (2.4) при $\mu = \varepsilon = 0$ в окружность $x = x_0^\circ, y = 0, 0 < \theta \leq 2\pi$. За окружность P примем именно эту окружность, т. е. x° положим равным x_0° .

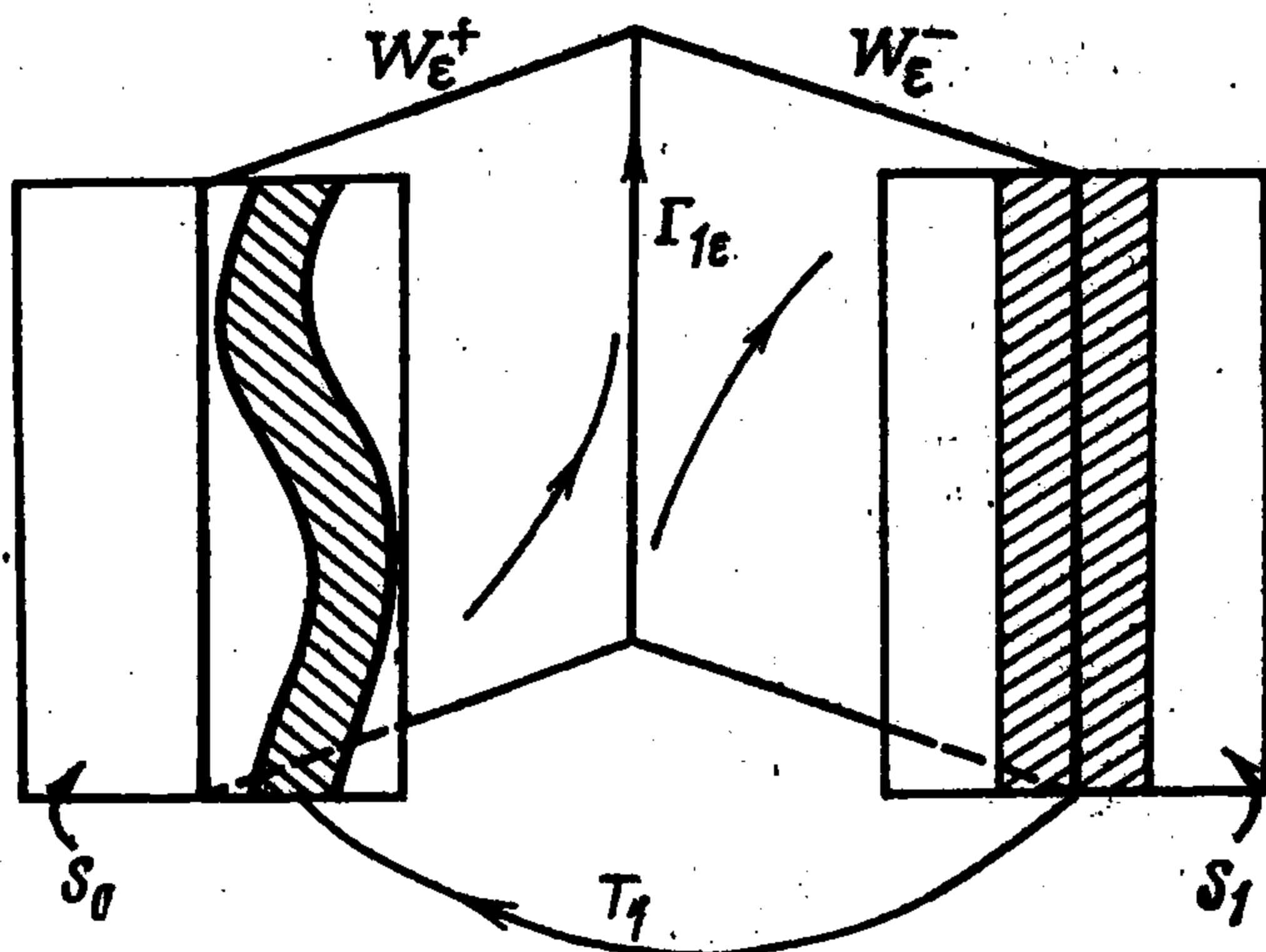
Из общих теорем следует, что при всех достаточно малых ε, μ существует гладкое невырожденное отображение окрестности одной из этих окружностей на некоторую окрестность другой, т. е. для любого $\rho_0 > 0$ найдется такое $\rho_1 > 0$, что существует гладкое невырожденное отображение $T_1: S_1 \rightarrow S_0$.

При $\mu = \varepsilon = 0$ система (2.3), (2.4) распадается на системы (2.3) и (2.4), поэтому в силу начального условия $x_1 = 0$ движение в системе (2.4) осуществляется по предельному циклу $\Gamma_1: v = v(\theta), \dot{\theta} = \omega$, следовательно, $\theta_0 = \theta_1 + \omega\tau_0$. Отсюда и из невырожденности и гладкости по переменным и параметрам совокупной замены от (u, v) к (x, y, θ) следует, что при $\mu = k\varepsilon$ отображение T_1 можно записать в виде

$$(3.15) \quad \begin{aligned} x_0 &= x_0^\circ + \varepsilon P_1'(x_1, \theta_1, \varepsilon) + P_2'(x_1, \theta_1, \varepsilon) \\ y_0 &= \Delta_1(x_1, \theta_1, \varepsilon) x_1 + \varepsilon \Delta_2(x_1, \theta_1, \varepsilon) \\ \theta_0 &= \{\theta_1 + \omega\tau_0 + R_1'(x_1, \theta_1, \varepsilon) x_1 + \varepsilon R_2'(x_1, \theta_1, \varepsilon)\} \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

где правые части принадлежат классу C^2 , и P_i, Δ_i, Q_i 2π -периодичны по $\theta_1, i = 1, 2$. В силу замечания 2 $\Delta_2 \equiv R_1(x_1, \varepsilon) + kR_2(x_1, \theta_1, \varepsilon)$, причем рассматривается случай, когда выполнены условия рождения, то $R_1(x_1, \varepsilon) > 0$. Предположим, что $\Delta_2(0, \theta_1, 0) > 0$. (Если Δ_2 обращается в нуль, это означает, что система (2.3), (2.4) имеет гомоклинические кривые [8,9], если же $\Delta_2 < 0$, то все траектории, кроме $\Gamma_{1\varepsilon}$, покидают окрестность $\overline{\Gamma_0} \times \overline{\Gamma_1}$ [2].)

На фиг. 3 изображены устойчивые и неустойчивые многообразия периодического движения $\Gamma_{1\varepsilon}$ при $\varepsilon > 0, \Delta_2 > 0$.



Фиг. 3

4. Отображение T как суперпозицию отображений T_0 и T_1 получим, подставляя (3.15) в (3.13); при этом время перехода t_n определяется равенством

$$(4.1) \quad t_n = -\frac{1}{\gamma(\varepsilon, k\varepsilon)} \ln \frac{y_0}{d_1}, \quad y_0 = \Delta_1(x_1, \theta_1, \varepsilon)x_1 + \varepsilon\Delta_2(x_1, \theta_1, \varepsilon)$$

Покажем, что отображение T имеет фактически те же свойства, что и модельное отображение

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{x_0^0}{d_1} y_0^0 (\approx e^{\lambda_1 t_n} x_0^0) \\ \bar{\theta}_1 &= \theta_1 + \omega\tau_0 + \frac{\omega}{\gamma(\varepsilon, k\varepsilon)} \ln \frac{y_0}{d_1} (\approx \theta_1 + \omega\tau_0 + \omega t_n) \end{aligned}$$

а именно докажем следующую лемму.

Лемма 2. Для любого κ , $1 < \kappa < \zeta$ существуют такие ε_3, δ_3 , что при всех ε , $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_3$ отображение T переводит кольцо $K_\varepsilon: \|x_1\| \leq \varepsilon^\kappa$, $0 < \theta_1 \leq 2\pi$ в себя, причем имеют место оценки

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \left\| \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_1} \right\| &\leq D_1 \varepsilon^{\zeta-1}, & \left\| \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \theta_1} \right\| &\leq D_2 \varepsilon^{\zeta-\alpha/\gamma_1} \\ \left\| \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial x_1} \right\| &\leq D_3 \varepsilon^{-1}, & \left| \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \theta_1} \right| &> \frac{6\omega}{8\gamma_1} \left| \frac{\Delta_{2\theta_1}(0, \theta_1, 0)}{\Delta_2(0, \theta_1, 0)} \right| - \frac{9}{8} \end{aligned}$$

Доказательство. 1°. Из оценки (3.14), второй формулы (3.15) и того, что $\|x_1\| \leq \varepsilon^\kappa$, следует

$$\|x_1\| \leq \left\{ 2\delta_2 \varepsilon^{\zeta-\kappa} \left[\frac{1}{d_1} (\|\Delta_1\| \varepsilon^{\kappa-1} + \|\Delta_2\|) \right] \right\} \varepsilon^\kappa$$

Очевидно, при малых ε выражение в фигурных скобках меньше единицы, т. е. $T(K_\varepsilon) \subset K_\varepsilon$.

2°. Докажем последнюю из оценок (4.2), всюду полагая $\|x_1\| \leq \varepsilon^\kappa$. Предварительно заметим, что

$$(4.3) \quad \left\| \frac{\partial x_0}{\partial \theta_1} \right\| + \left\| \frac{\partial y_0}{\partial \theta_1} \right\| + \left| \frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_1} - 1 \right| < M_1 \varepsilon, \quad M_1 = \text{const}$$

Очевидно

$$\left| \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \theta_1} \right| \geq \left| \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial t_n} \frac{\partial t_n}{\partial \theta_1} \right| - \left\| \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial x_0} \right\| \left\| \frac{\partial x_0}{\partial \theta_1} \right\| - \left\| \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial y_0} \right\| \left\| \frac{\partial y_0}{\partial \theta_1} \right\| - \left\| \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \theta_0} \right\| \left\| \frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_1} \right\|$$

Используя (4.1) и (4.2), получим

$$\left| \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial t_n} \frac{\partial t_n}{\partial \theta_1} \right| > \frac{7}{8} \frac{\omega}{\gamma_1} \left| \frac{\Delta_{2\theta_1}(0, \theta_1, 0)}{\Delta_2(0, \theta_1, 0)} \right| + \alpha_1(\varepsilon)$$

Здесь и ниже $\alpha_i \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Из (3.7) и того, что $y_0 e^{\gamma(\varepsilon, k\varepsilon)t_n} = d_1$, следует

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial y_0} \right\| \left\| \frac{\partial y_0}{\partial \theta_1} \right\| &\leq C_2' e^{\gamma(\varepsilon, k\varepsilon)t_n} |y_{0\theta_1}| = C_2' d_1 \left| \frac{y_{0\theta_1}}{y_0} \right| < \\ &< \frac{\omega}{8\gamma_1} \left| \frac{\Delta_{2\theta_1}(0, \theta_1, 0)}{\Delta_2(0, \theta_1, 0)} \right| + \alpha_2(\varepsilon) \end{aligned}$$

(величина δ_3 , а следовательно, и d_1 , выбрана настолько малой, чтобы $C_2'd_1 < \omega/(8\gamma_1)$).

Из (3.6) и (4.3) следует, что

$$\left\| \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial x_0} \right\| \left\| \frac{\partial x_0}{\partial \theta_1} \right\| \leq C_1' e^{N\delta t_n} \leq C_1' M_1 \left| \frac{y_0}{d_1} \right|^{-N\delta/\gamma_1} < \text{const } \varepsilon^{1-N\delta/\gamma_1} = \alpha_3(\varepsilon),$$

(величина δ_3 выбрана настолько малой, чтобы $N\delta_3 < \gamma_1$.)

Из (4.3) и (3.8)

$$\left| \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_1} \right| \leq \frac{9}{8} + \alpha_4(\varepsilon)$$

На основании выписанных неравенств получаем последнюю из оценок (4.2).

3°. Из (3.15) можно вывести, что

$$(4.4) \quad \left\| \frac{\partial \theta_0}{\partial x_1} \right\| + \left\| \frac{\partial x_0}{\partial x_1} \right\| + \left\| \frac{\partial y_0}{\partial x_1} \right\| \leq M_2 = \text{const}$$

Очевидно

$$(4.5) \quad \left\| \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial x_1} \right\| \leq \left\| \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial t_n} \right\| \left\| \frac{\partial t_n}{\partial x_1} \right\| + \left\| \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial (x_0, y_0, \theta_0)} \right\| \left\| \frac{\partial (x_0, y_0, \theta_0)}{\partial x_1} \right\|$$

Из (4.1), (3.6) и (4.4), (3.10) и (4.4), (3.11) имеем соответственно

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial t_n}{\partial x_1} \right\| &\leq \text{const } \varepsilon^{-1} + \alpha_6(\varepsilon) \\ \left\| \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial x_0} \right\| \left\| \frac{\partial x_0}{\partial x_1} \right\| &\leq C_2' M_2 e^{N\delta t_n} \leq C_2' M_2 e^{\chi(\varepsilon, k\varepsilon)t_n} = C_2' M_2 d_1 |y_0|^{-1} \leq \\ &\leq \text{const } \varepsilon^{-1} + \alpha_7(\varepsilon), \quad \left\| \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial y_0} \right\| \left\| \frac{\partial y_0}{\partial x_1} \right\| \leq C_2' e^{\chi(\varepsilon, k\varepsilon)t_n} \leq \text{const } \varepsilon^{-1} + \alpha_8(\varepsilon) \\ \left\| \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \theta_0} \right\| \left\| \frac{\partial \theta_0}{\partial x_1} \right\| &\leq \text{const} \end{aligned}$$

Отсюда получаем третью из оценок (4.2). Далее, из (4.4), (3.10), (3.6) — (3.8) следует, что

$$(4.6) \quad \left\| \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_1} \right\| \leq L_1 \varepsilon^{\zeta-1} + L_2 \varepsilon^{-\beta/\gamma_1} + L_3 \varepsilon^{(\zeta-1)} + L_4 \varepsilon^{\zeta-\alpha/\gamma_1}$$

где L_i — постоянные и каждое слагаемое в (4.6) оценивает соответствующее слагаемое в правой части неравенства, аналогичного (4.5) (x_1 вместо $\bar{\theta}_1$). Из (4.6) и (3.9) вытекает первая из оценок (4.2).

Наконец, из (4.3), (4.1), (3.10), (3.6) — (3.8) следует, что

$$(4.7) \quad \left\| \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \theta_1} \right\| \leq L_1' \varepsilon^\zeta + L_2' \varepsilon^{\zeta-1} + L_3' \varepsilon^{-\beta/\gamma_1} + L_4' \varepsilon^{\zeta-\alpha/\gamma_1}$$

Из (4.7) и (3.9) получим вторую из оценок (4.2). Лемма доказана.

На фиг. 3 заштриховано кольцо K_ε и его образ относительно отображения T_1 при $\varepsilon > 0$.

Теорема. Предположим, что существует интервал $I = [a, b]$, $0 < a < b \leq 2\pi$, такой, что для $\theta_1 \in I$

$$(4.8) \quad \frac{\omega}{\gamma_1} \left| \frac{\Delta_{2\theta_1}(0, \theta_1, 0)}{\Delta_2(0, \theta_1, 0)} \right| > 3$$

$$(4.9) \quad \frac{\omega}{\gamma_1} \left| \ln \frac{\Delta_2(0, b, 0)}{\Delta_2(0, a, 0)} \right| \geq 3\pi n, \quad n \geq 3$$

Тогда для всех достаточно малых ε отображение T имеет в кольце K_ε инвариантное множество, на котором T сопряжено со сдвигом схемы Бернулли из $n - 1$ символов.

Доказательство. Проверим условия принципа кольца. Из (4.2) и (4.7) следует, что $|\partial \bar{\theta}_1 / \partial \theta_1| > 9/8$ для $\theta_1 \in I$. Кроме того, $\|\partial x_1 / \partial x_1\| < 1$. Теперь положим

$$t_b = -\frac{1}{\gamma(\varepsilon, k\varepsilon)} \ln \frac{y_0(x_1, b, \varepsilon)}{d_1}, \quad y_b = d_1 e^{-\gamma(\varepsilon, k\varepsilon)t_b}$$

$$t_a = -\frac{1}{\gamma(\varepsilon, k\varepsilon)} \ln \frac{y_0(x_1, a, \varepsilon)}{d_1}, \quad y_a = d_1 e^{-\gamma(\varepsilon, k\varepsilon)t_a}$$

Тогда

$$|\bar{\theta}_1(b) - \bar{\theta}_1(a)| > \left| \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial t} \right| |t_b - t_a| - \left\| \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial x_0} \right\| \left\| \frac{\partial x_0}{\partial \theta_1} \right\| |b - a| -$$

$$- \left\| \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial y_0} \right\| \left\| \frac{\partial y_0}{\partial t} \right\| |t_b - t_a| - \left\| \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \theta_0} \right\| \left\| \frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_1} \right\| |b - a|$$

Используя неравенства (второе из них следует из (3.7))

$$|t_b - t_a| > \frac{1}{\gamma_1} \left| \ln \frac{\Delta_2(0, b, 0)}{\Delta_2(0, a, 0)} \right| + \alpha_9(\varepsilon)$$

$$\left| \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial y_0} \right| \left\| \frac{\partial y_0}{\partial t} \right\| \leq \gamma_1 C_2' d_1$$

а также учитывая (3.6) и неравенства (4.3), (3.10), (3.11), получим

$$|\bar{\theta}_1(b) - \bar{\theta}_1(a)| > \frac{\omega}{\gamma_1} \left| \ln \frac{\Delta_2(0, b, 0)}{\Delta_2(0, a, 0)} \right| \left| \frac{7}{8} - \gamma_1 C_2' d_1 \right| - \frac{9}{8} +$$

$$+ \alpha_{10}(\varepsilon) > \frac{6\omega}{8\gamma_1} \left| \ln \frac{\Delta_2(0, b, 0)}{\Delta_2(0, a, 0)} \right| - \frac{9}{8}$$

(величина δ_3 выбрана настолько малой, чтобы $\gamma_1 C_2' \delta_3 < 1/8$). Отсюда,

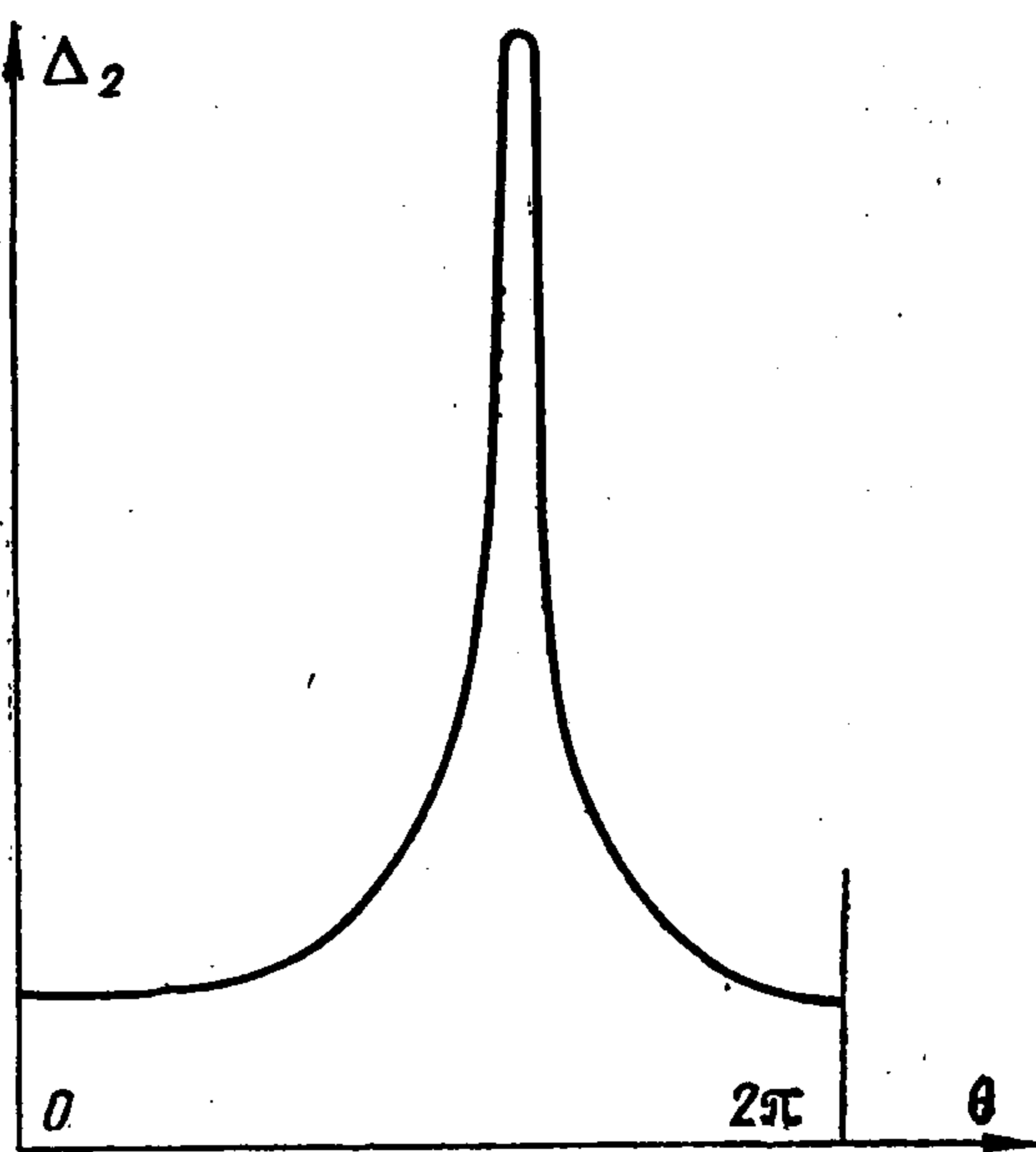
используя (4.9), получим $|\bar{\theta}_1(b) - \bar{\theta}_1(a)| > 2\pi n$.

Для окончательной проверки условий принципа кольца достаточно показать, что

$$\left\| \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial x_1} \right\| \left\| \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} \right\| < \frac{1}{8}$$

Из (4.2), (3.9) следует, что $D_2 D_3 \varepsilon^{\zeta - \alpha / \gamma_1} \varepsilon^{-1} < 1/8$ при малых ε .

Замечание 2. Функция $\Delta_2(0, \theta, 0)$ характеризует щель между следами многообразий W_ε^+ и W_ε^- на секущей S_0 . Если производная этой функции мала по сравнению с величиной самой функции (например, $\Delta_2 = 3 + \sin \omega_0 \theta$,



Фиг. 4

$\omega_0 \ll 1$), то отображение T имеет в K_ε инвариантную кривую. Если существует отрезок, на котором производная очень велика, например, когда Δ_2 типа импульса (фиг. 4), то приходим к принципу кольца. Фиг. 4 как раз соответствует отображение T вида фиг. 1. Между этими крайними случаями лежит промежуточный случай, связанный с возникновением подковы Смейла (см. [9]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний. Киев, Изд-во Всеукр. Акад. наук, 1934.
2. Афраймович В. С., Шильников Л. П. О малых периодических возмущениях автономных систем. Докл. АН СССР, 1974, т. 214, № 4.
3. Афраймович В. С., Шильников Л. П. О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижной точки типа седло-узел. Докл. АН СССР, 1974, т. 219, № 6.
4. Шильников Л. П. Теория бифуркаций динамических систем и опасные границы. Докл. АН СССР, 1975, т. 224, № 5.
5. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М., «Наука», 1967.
6. Шильников Л. П. О некоторых случаях рождения периодических движений из особых траекторий. Матем. сб., 1963, т. 61, № 4.
7. Kelley A. The stable, center-stable, center, center-unstable and unstable manifolds. An appendix in: R. Abraham, J. Robbin. Transversal Mappings and Flows, New York, Benjamin, 1967.
8. Шильников Л. П. Об одной задаче Пуанкаре — Биркгофа. Матем. сб., 1967, т. 74, № 3.
9. Гаврилов Н. К., Шильников Л. П. О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой. I., Матем. сб., 1972, т. 88, № 4; II. Матем. сб., 1973, т. 90, № 1.