Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 531.011

ОБ ОЦЕНКАХ СНИЗУ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ ТЕЛАМИ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

В. Г. Голубев

(Москва)

В случае отрицательной постоянной интеграла энергии предполагаются выполненными достаточные условия абсолютной устойчивости по Хиллу движения фиксированной пары тел. Предлагается метод нахождения оценок снизу расстояний таких тел до третьего тела.

1. Постановка задачи. Рассматривается ньютонова неограниченная задача трех точек (тел) P_1, P_2, P_3 с массами m_1, m_2, m_3 в системе координат с началом в барицентре (центре масс совокупности трех точек). Предполагается, что постоянный вектор $\mathbf{C}$ момента количеств движения системы относительно барицентра отличен от нулевого, т. е. $C = |\mathbf{C}| > 0$. Рассматривается наиболее интересный для приложений случай $h < 0$, где h — постоянная интеграла энергии $T = U + h$ (T — живая сила, U — силовая функция).

При $C > 0$ не может быть тройных соударений. Согласно результатам Сундмана, изложенным, например, в [1], несмотря на возможность парных соударений математическое решение задачи существует для $-\infty < t < +\infty$ (t — время). Важен и результат Сундмана об ограниченности снизу положительной постоянной периметра $\Delta P_1P_2P_3$ в случае $C > 0$. Следует, однако, заметить, что теория Сундмана исключительно сложна, а оценки тем не менее весьма грубы; последнее может объясняться большой общностью рассмотренного им случая.

В данной статье при одном дополнительном предположении, о котором сказано ниже, сравнительно просто выводятся аналогичные сундмановским оценки снизу для двух (из трех) взаимных расстояний r_{jk} между телами. Эти оценки имеют почти тот же порядок, что и расстояния, реализующиеся в действительности.

Чтобы изложить суть упомянутого дополнительного предположения, введем необходимые обозначения и определения. Интеграл энергии в силу $h < 0$ запишем в форме $T = U - h'$, где $h' = -h > 0$. Заметим, что $T > 0$, так как обращение T в нуль невозможно ввиду $C > 0$; следовательно, всегда $U > h'$. Введем относительные массы тел $\mu_j = m_j / M$, $j = 1, 2, 3$, где $M = m_1 + m_2 + m_3$; очевидно, $0 < \mu_j < 1$, $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$. Тогда силовая функция

$$U = fM^2\left(\frac{\mu_1\mu_2}{r_{12}} + \frac{\mu_1\mu_3}{r_{13}} + \frac{\mu_2\mu_3}{r_{23}}\right)$$

где f — постоянная притяжения Ньютона. Из $U > h'$ следует, что всегда

$$\min_{j \neq k} r_{jk} < \frac{fM^2}{h'} (\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3) \tag{1.1}$$

Выделим одну из трех пар тел и обозначим ее через P_1, P_2 так, чтобы было $\mu_1 \geqslant \mu_2$; всего этого, очевидно, можно добиться при помощи определенной нумерации тел. Пусть O_{12} — центр масс P_1 и P_2. Положим $r = O_{12}P_3$ и $\rho = r / r_{12}$; очевидно, r и ρ характеризуют абсолютное и относительное удаление тела P_3 от пары P_1, P_2 (в моменты соударений P_1 с P_2 и только тогда будет $\rho = +\infty$). Далее понадобятся обозначения

$$\lambda = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad \nu = \mu_3(\mu_1 + \mu_2)$$

$$p = \frac{P_1O_{12}}{P_1P_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad q = \frac{O_{12}P_2}{P_1P_2} = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}$$

Заметим, что $0 < p \leqslant q < 1$, $p + q = 1$.

Для момента инерции I системы относительно барицентра можно теперь написать формулу

$$I = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} r_{12}^2 + \frac{m_3(m_1 + m_2)}{M} r^2 = Mr_{12}^2 i(\rho), \quad i(\rho) = \lambda + \nu\rho^2$$

Как отмечено в [2] и доказано в [3], при $r > qr_{12} \geqslant pr_{12}$, т. е. при $\rho > q \geqslant p$

$$U \leqslant U_+ = \frac{fM^2}{r_{12}} u_+(\rho), \quad u_+(\rho) = \mu_1\mu_2 + \mu_3\left(\frac{\mu_1}{\rho + p} + \frac{\mu_2}{\rho - q}\right)$$

Иначе говоря, при данных $r_{12} > 0$ и $\rho > q \geqslant p$ величина U принимает наибольшее значение при нахождении P_3 на прямой P_1P_2 вне одноименного отрезка за точкой P_2.

На основании замечания о нумерации тел отнесем следующие два определения к паре P_1, P_2.

Определение 1.1 [2, 4, 5]. Движение фиксированной пары тел P_1, P_2 называется устойчивым по Хиллу, если все время $r_{12} < H$, где $H > 0$ — некоторая константа.

Замечание 1.1. Из неравенства (1.1) еще не следует, что существует хотя бы одна пара тел (из трех), движение которой устойчиво по Хиллу.

Определение 1.2 [5]. Движение пары P_1, P_2 называется абсолютно устойчивым по Хиллу, если все время $\rho \geqslant \rho_*$, где ρ_* — некоторая постоянная, такая, что $\rho_* > q \geqslant p$.

Замечание 1.2. Из абсолютной следует просто устойчивость по Хиллу движения P_1, P_2, а также невозможность соударений для двух других пар (первое следует из определений и неравенства (1.1), второе — из определения 1.2 и невозможности тройных соударений при $C > 0$).

Ниже предполагаем, что движение фиксированной пары P_1, P_2 абсолютно устойчиво по Хиллу. Это свойство движения обеспечивается выполнением соответствующих достаточных условий. Прежде чем сформулировать эти условия, поясним, что является их предпосылкой.

Из неравенства $IT \geqslant {}^1/_2C^2$, т. е. $I(U - h') \geqslant {}^1/_2C^2$, при $\rho > q \geqslant p$ имеем $I(U_+ - h') \geqslant {}^1/_2C^2$, откуда $IU_+^2 \geqslant 2h'C^2$.

Введем обозначения

$$S_+(\rho) = i(\rho)\,u_+^2(\rho), \quad s = \frac{2h'C^2}{f^2M^5}$$

(безразмерную константу s целесообразно назвать показателем устойчивости по Хиллу). Тогда последнее из неравенств можно записать в форме $S_+(\rho) \geqslant s$. На $(q, +\infty)$ функция $S_+(\rho)$ в некоторой точке, положение которой определяется известным алгебраическим уравнением пятой степени, достигает абсолютного минимума $(S_+)_-$, убывая слева и возрастая справа от этой точки. Поэтому при $s > (S_+)_-$ уравнение $S_+(\rho) = s$ имеет на $(q, +\infty)$ два корня. Если ρ_* — наибольший из них, то $\rho \geqslant \rho_*$ — одно из решений неравенства $S_+(\rho) \geqslant s$.

Теорема [2, 3, 5]. Пусть: 1) $s > (S_+)_-$ и ρ_* — наибольший из двух корней уравнения $S_+(\rho) = s$; 2) в начальный момент t_0 $\rho(t_0) \geqslant \rho_*$. Тогда всегда $\rho \geqslant \rho_*$.

Условия теоремы всюду дальше предполагаются выполненными без специальных оговорок.

Замечание 1.3. Так как ρ_* принадлежит $(q, +\infty)$, $\rho_* > q$ и неравенство $\rho \geqslant \rho_*$ в силу определения 1.2 означает абсолютную устойчивость по Хиллу движения P_1 и P_2.

Примеры. Рассмотрим задачи: Солнце (P_1) — Юпитер (P_2) — Сатурн (P_3) и Солнце (P_1) — Земля (P_2) — Юпитер (P_3) с начальными условиями для эпох: ноябрь, 11, 1966 и январь, 0, 1930 соответственно (разумеется, в каждой задаче «Солнечная система» предполагается содержащей только две планеты; во второй задаче массу Земли принимаем равной сумме масс Земли и Луны).

Тогда в первой задаче всегда $\rho > 1.319$, во второй $\rho > 2.585$. Так как в любом случае $0 < q < 1$, неравенства для ρ показывают, что в первой задаче абсолютно устойчиво по Хиллу движение пары Солнце, Юпитер, а во второй — Солнце, Земля.

Дальше многократно будет использовано следующее простое утверждение.

Лемма 1.1. При упомянутых выше предположениях всегда $r > 0$.

Доказательство. В моменты соударений P_1 с P_2, т. е. при $r_{12} = 0$, заведомо $r > 0$, так как при $r = 0$ было бы тройное соударение, что исключено в силу $C > 0$. Пусть теперь $r_{12} > 0$; но тогда из неравенств $r / r_{12} \geqslant \rho_* > 0$ снова получаем, что $r > 0$.

2. Вывод дифференциального неравенства для $r(t)$. Выведем для величины $r(t)$ дифференциальное неравенство вида $\ddot{r} > \varphi(r)$. После этого окажется возможным получить для $r(t)$ постоянную положительную оценку снизу, откуда геометрически будут следовать аналогичные оценки снизу для расстояний r_{13} и r_{23}. Дифференциальные неравенства выводить сложнее, чем дифференциальные уравнения, так как приходится методом оценок исключать «лишние» переменные величины. На этом пути наиболее трудоемким окажется доказательство леммы 2.2. В процессе приближенного решения неравенства (2.16) будет использован своеобразный метод последовательных приближений (следствия 2.2—2.4).

Лемма 2.1. Пусть движение материальной точки J отнесено к инерциальной системе координат $Oxyz$ и $\mathbf{r} = \mathbf{OJ}$, $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{v}$ — скорость точки, $v = |\mathbf{v}|$, $\mathbf{a}$ — ускорение, a_r — проекция $\mathbf{a}$ на направление $\mathbf{r}$, $\mathbf{l} = [\mathbf{r} \times \mathbf{v}]$, $l = |\mathbf{l}|$. Тогда

$$r^{\cdot\cdot} = a_r + l^2/r^3 \tag{2.1}$$

Доказательство опирается на тождество

$$v^2 = r^{\cdot 2} + l^2/r^2 \tag{2.2}$$

Дифференцируя два раза соотношение $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, получаем

$$rr^{\cdot} = xx^{\cdot} + yy^{\cdot} + zz^{\cdot}$$
$$r^{\cdot 2} + rr^{\cdot\cdot} = v^2 + \mathbf{ra} = v^2 + r(\mathbf{ar}^{\circ}) = v^2 + ra_r$$

(здесь $\mathbf{r}^{\circ}$ — орт вектора $\mathbf{r}$), откуда

$$r^{\cdot\cdot} = a_r + \frac{v^2 - r^{\cdot 2}}{r} \tag{2.3}$$

Теперь (2.1) следует из (2.3) и (2.2).

Следствие 2.1. Пусть m — масса точки J, $\mathbf{L} = [\mathbf{r} \times (m\mathbf{v})]$, $L = |\mathbf{L}|$. Тогда

$$r^{\cdot\cdot} = a_r + \frac{L^2}{m^2 r^3} \tag{2.4}$$

Действительно, $\mathbf{L} = m\mathbf{l}$, $L = ml$, $l = L / m$.

Чтобы получить дифференциальное неравенство для $r(t)$, целесообразно перейти к координатам Якоби в задаче трех тел. Пусть $\mathbf{r}_{12} = \{x_{12}, y_{12}, z_{12}\}$ — вектор, характеризующий положение точки P_2 относительно P_1, а $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ — положение P_3 относительно O_{12}. Соответствующие уравнения Якоби можно рассматривать как уравнения движения двух фиктивных материальных точек J_{12} и J с массами $m_{12} = \lambda M$ и $m = \nu M$ соответственно. Обозначения леммы 2.1 и следствия 2.1 подходят для второй точки Якоби; по аналогии понятны обозначения соответствующих величин для первой точки, например: r_{12}, $r_{12}^{\cdot}$, $\mathbf{l}_{12}$, l_{12}, $\mathbf{L}_{12}$, L_{12}.

Ниже будет показано, что в уравнении (2.4) для J справедливы неравенства $a_r < 0$, $L > 0$ (строго). Поэтому для вывода неравенства вида $r^{\cdot\cdot} > \varphi(r)$ остается: 1) $a_r < 0$ оценить снизу отрицательный величиной, зависящей только от r; 2) $L > 0$ оценить снизу положительной величиной, зависящей только от r.

Лемма 2.2. Справедлива оценка

$$a_r \geqslant -\frac{K}{r^2}, \quad K = fM\rho_*^2\left[\frac{p}{(\rho_* - q)^2} + \frac{q}{(\rho_* + p)^2}\right] \tag{2.5}$$

Доказательство. В принятых обозначениях уравнения движения второй точки Якоби имеют вид

$$x^{\cdot\cdot} = -fMx\left(\frac{p}{r_{23}^3} + \frac{q}{r_{13}^3}\right) + fMpqx_{12}\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right) \tag{2.6}$$

(правая часть уравнения для $y^{\cdot\cdot}$ получается отсюда заменой x на y, x_{12} на y_{12}; аналогично и для $z^{\cdot\cdot}$).

Обозначим через ϑ угол между векторами $\mathbf{r}_{12}$ и $\mathbf{r}$ $(0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi)$ и положим $\omega = \cos\vartheta$ $(-1 \leqslant \omega \leqslant 1)$. Имеем $a_r = \mathbf{a}\mathbf{r}^\circ = x^{\cdot\cdot}(x / r) + y^{\cdot\cdot}(y / r) + z^{\cdot\cdot}(z / r)$. Отсюда и из уравнений (2.6)

$$a_r = -fM\left[r\left(\frac{p}{r_{23}^3} + \frac{q}{r_{13}^3}\right) + pqr_{12}\omega\left(\frac{1}{r_{13}^3} - \frac{1}{r_{23}^3}\right)\right]$$

Таким образом, учитывая, что из $\Delta P_1O_{12}P_3$ и $\Delta P_2O_{12}P_3$

$$r_{13}^2 = r^2 + p^2r_{12}^2 + 2pr_{12}r\omega, \quad r_{23}^2 = r^2 + q^2r_{12}^2 - 2qr_{12}r\omega \tag{2.7}$$

можем написать

$$a_r = -fMG(\omega), \quad G(\omega) = \frac{p(r - qr_{12}\omega)}{r_{23}^3} + \frac{q(r + pr_{12}\omega)}{r_{13}^3} > 0 \tag{2.8}$$

Замечание 2.1. Будем считать, что $r_{12} \neq 0$ $(r_{12} > 0)$; нетрудно будет увидеть, что для момента соударения P_1 с P_2 неравенство (2.5) окажется даже строгим, так как $\rho \to +\infty$ при $r_{12} \to 0$. То, что $G(\omega) > 0$, следует из $r - qr_{12}\omega > 0$ и $r + pr_{12}\omega > 0$ в силу $\rho \geqslant \rho_* > q \geqslant p$; например, $r - qr_{12}\omega \geqslant r - qr_{12} = r_{12}(\rho - q) \geqslant r_{12}(\rho_* - q) > 0$.

Ввиду (2.8) остается наибольшее значение функции $G(\omega)$ на $[-1, 1]$ при постоянных положительных r_{12} и r и зависящих от ω согласно (2.7) r_{13} и r_{23}. Из (2.7)

$$r_{13}'(\omega) = \frac{pr_{12}r}{r_{13}}, \quad r_{23}'(\omega) = -\frac{qr_{12}r}{r_{23}} \tag{2.9}$$

Дифференцируя с учетом (2.9) выражение (2.8), находим

$$G'(\omega) = pqr_{12}\left[\frac{1}{r_{13}^3} - \frac{1}{r_{23}^3} + 3r\left(\frac{r - qr_{12}\omega}{r_{23}^5} - \frac{r + pr_{12}\omega}{r_{13}^5}\right)\right] \tag{2.10}$$

Отсюда, принимая во внимание (2.7)

$$G'(\omega) = \frac{1}{2}pqr_{12}\left\{\left[\frac{1}{r_{23}^3} + \frac{3(r^2 - q^2r_{12}^2)}{r_{23}^5}\right] - \left[\frac{1}{r_{13}^3} + \frac{3(r^2 - p^2r_{12}^2)}{r_{13}^5}\right]\right\} \tag{2.11}$$

причем в силу $\rho > q \geqslant p$ величины в круглых скобках (2.11) положительны; важно еще, что они не зависят от ω. При возрастании ω от -1 до 1 r_{13} возрастает, а r_{23} убывает. Поэтому каждая дробь внутри первых квадратных скобок (2.11), а с ними и все выражение возрастает; каждая дробь внутри вторых квадратных скобок, а с ними и все выражение убывает. Следовательно, $G'(\omega)$ возрастает. Поэтому уравнение $G'(\omega) = 0$ на интервале $(-1,1)$ может иметь только один корень ω_*, причем $G'(\omega) < 0$ при $-1 \leqslant \omega < \omega_*$ и $G'(\omega) > 0$ при $\omega_* < \omega \leqslant 1$. Отсюда на $(-1,1)$ может быть только один экстремум $G(\omega)$, причем минимум. Следовательно, наибольшее значение функции $G(\omega)$ на отрезке $[-1, 1]$ (существующее, поскольку функция $G(\omega)$ на нем непрерывна) достигается ею на одном из концов отрезка.

Имеем: $r_{13}(\pm 1) = r \pm pr_{12}$, $r_{23}(\pm 1) = r \mp qr_{12}$. Отсюда по формуле (2.8)

$$G(\pm 1) = \frac{p}{(r \mp qr_{12})^2} + \frac{q}{(r \pm pr_{12})^2}$$

$$G(1) - G(-1) = 4pqr_{12}r\left[\frac{1}{(r^2 - q^2r_{12}^2)^2} - \frac{1}{(r^2 - p^2r_{12}^2)^2}\right]$$

Но $0 < r^2 - q^2r_{12}^2 \leqslant r^2 - p^2r_{12}^2$ (так как $p \leqslant q$), откуда $G(1) - G(-1) \geqslant 0$. Следовательно, $G(\omega) \leqslant G(1)$ и по (2.8)

$$a_r \geqslant -fMG(1) = -\frac{fM}{r^2}g(\rho), \quad g(\rho) = \rho^2\left[\frac{p}{(\rho - q)^2} + \frac{q}{(\rho + p)^2}\right] \tag{2.12}$$

Но на $(q, +\infty)$

$$g'(\rho) = 2pq\rho\left[\frac{1}{(\rho + p)^3} - \frac{1}{(\rho - q)^3}\right] < 0$$

откуда на $(q, +\infty)$ и, в частности, на $[\rho_*, +\infty)$ функция $g(\rho)$ — убывающая. Поэтому $a_r \geqslant -fMg(\rho_*) / r^2$, что и приводит к (2.5).

Лемма 2.3. Пусть

(2.13) $$P = \sqrt{2\nu M h'}, \quad Q = fM^3 \sqrt{\lambda\nu}\, u_+ (\rho_*)$$

Тогда

(2.14) $$0 < Q/P < C$$

Доказательство. Так как P и Q — положительные постоянные, доказательству подлежит только неравенство $Q \,/\, P < C$. Сначала докажем, что по основной теореме (см. п. 1)

(2.15) $$u_+ (\rho_*) < \sqrt{s / \lambda}$$

Действительно, $s = S_+ (\rho_*) = i (\rho_*)\, u_+^2 (\rho_*) = (\lambda + \nu\rho_*^2)\, u_+^2 (\rho_*) > \lambda u_+^2 (\rho_*)$, откуда и следует (2.15). Вспомним теперь, что $s = 2h' C^2 \,/\, (f^2 M^5)$. Тогда из формул (2.13) и неравенства (2.15)

$$\frac{Q}{P} = \frac{fM^2\sqrt{M}}{\sqrt{2h'}} \sqrt{\lambda}\, u_+ (\rho_*) = \frac{\sqrt{\lambda}\, u_+ (\rho_*)}{\sqrt{s}}\, C < C$$

Переходим к задаче оценки снизу (в зависимости от r) величины L (см. выше текст между леммами 2.1 и 2.2).

Лемма 2.4. Пусть $L < C$. Тогда

(2.16) $$(C - L)^2 (L^2 + P^2 r^2) \leqslant Q^2 r^2$$

Доказательство. Известно, что для уравнений Якоби (движения двух фиктивных точек) снова имеют место интегралы энергии и площадей, получающиеся из интегралов в барицентрических координатах преобразованием к переменным Якоби; в частности, постоянные h' и C сохраняют свои значения. Пользуясь интегралом энергии, напишем очевидное выражение для удвоенной кинетической энергии системы двух точек Якоби

$$2 (U - h') = \lambda M \left(r_{12}^{\cdot 2} + \frac{l_{12}^2}{r_{12}^2}\right) + \nu M \left(r^{\cdot 2} + \frac{l^2}{r^2}\right)$$

В силу $l_{12} = L_{12} \,/\, (\lambda M)$ и $l = L \,/\, (\nu M)$ имеем

(2.17) $$2 (U_+ - h') \geqslant \frac{L_{12}^2}{\lambda M r_{12}^2} + \frac{L^2}{\nu M r^2}$$

$$2\left[\frac{fM^2}{r}\, \rho u_+ (\rho) - h'\right] \geqslant \frac{\rho^2 L_{12}^2}{\lambda M r^2} + \frac{L^2}{\nu M r^2}$$

(Здесь использовано то, что $U \leqslant U_+ = fM^2 r_{12}^{-1} u_+ (\rho) = fM^2 r^{-1} \rho u_+ (\rho)$ ввиду $\rho \geqslant \rho_* > q$.) На $(q, +\infty)$ и, в частности, на $[\rho_*, +\infty)$ функция $u_+ (\rho)$ — убывающая, так что $u_+ (\rho) \leqslant u_+ (\rho_*)$ для $\rho \geqslant \rho_*$. Усиливая второе неравенство (2.17) и умножая его после этого на $\lambda\nu M r^2 > 0$, получаем

(2.18) $$2\lambda\nu M r\, [fM^2 \rho u_+ (\rho_*) - h' r] \geqslant \nu\rho^2 L_{12}^2 + \lambda L^2$$

Из интеграла площадей $\mathbf{L}_{12} + \mathbf{L} = \mathbf{C}$ следует, что $C = |\mathbf{C}| = |\mathbf{L}_{12} + \mathbf{L}| \leqslant |\mathbf{L}_{12}| + |\mathbf{L}| = L_{12} + L$, т. е.

(2.19) $$L_{12} + L \geqslant C$$

По условию $L < C$; отсюда и из (2.19)

(2.20) $$L_{12}^2 \geqslant (C - L)^2 > 0$$

Из (2.18) и (2.20)

$$\nu (C - L)^2 \rho^2 - 2\lambda\nu f M^3 u_+ (\rho_*)\, r\rho + \lambda (L^2 + 2\nu M h' r^2) \leqslant 0$$

Такое квадратное неравенство относительно ρ возможно лишь при неотрицательном дискриминанте его левой части. Отсюда

$$\lambda^2\nu^2 f^2 M^6 u_+^2 (\rho_*)\, r^2 - \lambda\nu (C - L)^2 (L^2 + 2\nu M h' r^2) \geqslant 0$$

Последнее неравенство после деления его на $\lambda\nu$ с учетом обозначений (2.13) приводит к (2.16).

Следствие 2.2. Верно строгое неравенство $L > 0$.

Пусть, напротив, $L = 0 < C$. Тогда из (2.16) $C^2P^2r^2 \leqslant Q^2r^2$. Так как по лемме 1.1 $r > 0$, отсюда $C^2P^2 \leqslant Q^2, Q / P \geqslant C$, что противоречит (2.14). Остается принять, что $L > 0$.

Следствие 2.3. Пусть

(2.21) $\Lambda = C - Q/P \quad (0 < \Lambda < C)$

(неравенства для Λ установлены с учетом (2.14)). Верно строгое неравенство $L > \Lambda$.

Действительно, если $L \geqslant C$, то в силу $C > \Lambda$ имеем $L > \Lambda$. Пусть теперь $L < C$. Из (2.16) с учетом $L > 0$ получаем $(C - L)^2P^2r^2 < Q^2r^2$, $(C - L)^2P^2 < Q^2$, $0 < C - L < Q / P$, $L > C - Q / P = \Lambda$.

Следствие 2.4. Верно строгое неравенство

$$L > C - \frac{Qr}{\sqrt{\Lambda^2 + P^2r^2}} \tag{2.22}$$

Действительно, если $L \geqslant C$, то (2.22) очевидно. Пусть $L < C$; тогда из (2.16) в силу $L > \Lambda$ имеем $(C - L)^2 < Q^2r^2 / (\Lambda^2 + P^2r^2)$. Извлекая из обеих частей последнего неравенства квадратный корень и учитывая при этом, что $C - L > 0$, снова приходим к (2.22).

Из (2.4), (2.5) и (2.22) с учетом $m = \nu M$ немедленно вытекает

Лемма 2.5. Справедливо строгое неравенство

$$r^{\cdot\cdot} > \varphi(r), \quad \varphi(r) = \frac{1}{\nu^2M^2r^3}\left(C - \frac{Qr}{\sqrt{\Lambda^2 + P^2r^2}}\right)^2 - \frac{K}{r^2} \tag{2.23}$$

где постоянные K, P, Q, Λ даются формулами (2.5), (2.13), (2.21).

3. Использование дифференциального неравенства для $r(t)$.

Лемма 3.1. На интервале $0 < r < +\infty$ существует значение r_0, такое, что $\varphi(r) > 0$ при $0 < r < r_0$, $\varphi(r_0) = 0$, $\varphi(r) < 0$ при $r > r_0$.

Доказательство. Имеем

$$\varphi(r) = \frac{1}{\nu^2M^2}\frac{\varphi_1(r)}{r^3}, \quad \varphi_1(r) = \left(C - \frac{Qr}{\sqrt{\Lambda^2 + P^2r^2}}\right)^2 - \nu^2M^2Kr \tag{3.1}$$

Нетрудно видеть, что на $(0, +\infty)$ функция $\varphi_1(r)$ — убывающая; именно, при изменении r от 0 до $+\infty$ $\varphi_1(r)$ убывает от $C^2 > 0$ до $-\infty$. После этого замечания утверждение леммы становится очевидным в силу первой формулы (3.1).

Теорема 3.1. Любой максимум функции $r(t)$ строго больше, чем r_0.

Доказательство. Заметим, что в силу результатов Сундмана функция $r(t)$ — достаточно гладкая, несмотря на возможные моменты соударений P_1 с P_2. Пусть в некоторый момент t_1 функция $r(t)$ достигла максимума r_+, причем $r_+ \leqslant r_0$, вопреки утверждению теоремы. Тогда $r^{\cdot}(t_1) = 0$, $r^{\cdot\cdot}(t_1) \leqslant 0$. Но по лемме 3.1 $\varphi(r_+) \geqslant 0$ и по (2.23) $r^{\cdot\cdot}(t_1) > 0$. Противоречие доказывает справедливость теоремы.

Примеры. В задачах Солнце (P_1) — Юпитер (P_2) — Сатурн (P_3) и Солнце (P_1) — Земля (P_2) — Юпитер (P_3) любой максимум функции $r(t)$, т. е. расстояния P_3 от центра масс P_1 и P_2, больше, чем 6.412 а.е. и 5.045 а.е. соответственно (а.е. — астрономическая единица).

Рассмотрим теперь на $(0, +\infty)$ функцию

$$\psi(r) = \frac{C^2}{\nu^2M^2r^2} + \frac{2Q^2}{\nu^2M^2\Lambda^2}\ln\frac{\sqrt{\Lambda^2+P^2r^2}}{Pr} - \tag{3.2}$$
$$-\frac{2K}{r} - \frac{4CPQ}{\nu^2M^2\Lambda^2}\left(\frac{\sqrt{\Lambda^2+P^2r^2}}{Pr} - 1\right)$$

Очевидно

$$\lim_{r\to+0}\psi(r) = +\infty, \quad \lim_{r\to+\infty}\psi(r) = 0 \tag{3.3}$$

Нетрудно проверить, что

$$\psi'(r) = -2\varphi(r) \tag{3.4}$$

Лемма 3.2. На интервале $0 < r < r_0$ функция $\psi(r)$ убывает, а на интервале $r_0 < r < +\infty$ возрастает, достигая в точке r_0 отрицательного абсолютного минимума. При этом уравнение $\psi(r) = 0$ имеет один корень r_*; этот корень принадлежит интервалу $(0, r_0)$ и $\psi(r) > 0$ при $0 < r < r_*$, $\psi(r) < 0$ при $r_* < r < +\infty$.

Лемма 3.3. Величина

$$R = r^{\cdot 2} + \psi(r) \tag{3.5}$$

изменяется по времени в одном направлении с r, т. е. возрастает при возрастании r и убывает при убывании r, достигая одновременно с r одноименных экстремумов.

Лемма 3.2 вытекает из (3.4), леммы 3.1 и (3.3), а лемма 3.3 — из (3.5), (3.4) и (2.23).

Теорема 3.2. Пусть в начальный момент t_0 : 1) $r(t_0) > r_*$; 2) $R(t_0) \leqslant 0$. Тогда всегда $r(t) > r_*$.

Доказательство. Для начального момента утверждение верно по условию. Докажем его справедливость на интервале $t_0 < t < +\infty$. Предположим противное. Тогда в силу непрерывности $r(t)$ найдется момент $t_1 > t_0$, такой, что $r(t_1) = r_*$, а при $t_0 \leqslant t < t_1$ будет $r(t) > r_*$. Из определения производной (если брать $\Delta t < 0$) следует, что $r^\cdot(t_1) \leqslant 0$; из (2.23) $r^{\cdot\cdot}(t_1) > \varphi(r_*) > 0$, так как $0 < r_* < r_0$. Из этих двух фактов вытекает существование $\delta > 0$, такого, что $r^\cdot(t) < 0$ при $t_1 - \delta < t < t_1$. Имеются только две возможности: а) $r^\cdot(t) < 0$ при $-\infty < t < t_1$ (в частности, при $t_0 < t < t_1$), б) найдется момент $t_2 < t_1$, такой, что $r^\cdot(t_2) = 0$ и $r^\cdot(t) < 0$ при $t_2 < t < t_1$.

Случай а). По лемме (3.3) $R(t_1) < R(t_0) \leqslant 0$, т. е. $R(t_1) < 0$. Но в силу (3.5) $R(t_1) = r^{\cdot 2}(t_1) + \psi(r_*) = r^{\cdot 2}(t_1) \geqslant 0$ (противоречие).

Случай б). По лемме 3.3 $R(t_1) < R(t_2) = r^{\cdot 2}(t_2) + \psi[r(t_2)] = \psi[r(t_2)] < 0$ (так как $r(t_2) > r(t_1) = r_*$), т. е. $R(t_1) < 0$. Но по (3.5) снова $R(t_1) \geqslant 0$ (противоречие).

Полученное в обоих случаях противоречие доказывает утверждение теоремы для $(t_0, +\infty)$. Аналогично проводится доказательство для $(-\infty, t_0)$.

Следствие 3.1. Если выполнены условия теоремы п. 1 и теоремы 3.2, то всегда

$$r_{13} > \left(1 - \frac{p}{\rho_*}\right) r_*, \quad r_{23} > \left(1 - \frac{q}{\rho_*}\right) r_* \tag{3.6}$$

Заметим сначала, что в (3.6) множители в круглых скобках строго положительны ввиду $\rho_* > q \geqslant p$. Оценки (3.6) вытекают из неравенств для $\Delta P_1 O_{12} P_3$ и $\Delta P_2 O_{12} P_3$

$$r_{13} \geqslant r - pr_{12} = (1 - p / \rho)\, r > (1 - p / \rho_*)\, r_*$$

$$r_{23} \geqslant r - qr_{12} = (1 - q / \rho)\, r > (1 - q / \rho_*)\, r_*$$

Примеры. В задаче Солнце (P_1) — Юпитер (P_2) — Сатурн (P_3) всегда $r > 3.756$ а.е. (любой максимум $r(t) > 6.412$ а.е.), $r_{13} > 3.753$ а.е., $r_{23} > 0,912$ а.е. В задаче Солнце (P_1) — Земля (P_2) — Юпитер (P_3) всегда $r > 2.532$ а.е. (любой максимум $r(t) > 5.045$ а.е.), $r_{13} > 2.532$ а.е., $r_{23} > 1.553$ а.е.

Поступила 14 IX 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М., «Наука», 1964.
2. *Голубев В. Г.* Об устойчивости по Хиллу в неограниченной задаче трех тел. Докл. АН СССР, 1968, т. 180, № 2.
3. *Голубев В. Г.* Качественный анализ некоторых свойств движений в задаче трех тел. Тр. Моск. энерг. ин-та. Сер. матем., 1971, вып. 89.
4. *Голубев В. Г.* Некоторые следствия из классических интегралов в задаче трех тел. Тр. Моск. энерг. ин-та. Сер. матем., 1971, вып. 89.
5. *Голубев В. Г.* О достаточных условиях абсолютной устойчивости по Хиллу в неограниченной задаче трех тел. Тр. Моск. энерг. ин-та, 1975, вып. 260.