Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 62—50

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА УКЛОНЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

В. С. Пацко

(Свердловск)

Приводятся необходимые и достаточные условия уклонения от точки в собственно линейной дифференциальной игре на плоскости. Статья примыкает к работам [1–4].

1. Пусть движение конфликтно-управляемой системы на евклидовой плоскости X описывается дифференциальным уравнением

$$dx/dt = Ax + f(u, v) \tag{1.1}$$

Здесь x — двумерный фазовый вектор, A — постоянная матрица 2×2, f — непрерывная функция со значениями в X, заданная на компакте G, принадлежащем произведению $X_u \times X_v$ конечномерных евклидовых пространств. Первый игрок распоряжается выбором управления u, второй — выбором управления v.

Обозначим через P (Q) ортогональную проекцию G на X_u (X_v). Положим $P(v) = \{u \in P : (u, v) \in G\}$, $v \in Q$ ($Q(u) = \{v \in Q : (u, v) \in \in G\}$, $u \in P$). Предположим, что $P(v)$ ($Q(u)$) зависит от v (u) непрерывно в смысле метрики Хаусдорфа.

Пусть $\mathbf{U}$ ($\mathbf{V}$) — множество стратегий первого (второго) игрока, а именно, множество всех функций, определенных на $\bar{R}_+ \times X$ со значениями в P (Q). Здесь R_+ — множество положительных чисел, черта сверху означает замыкание. Символом $\mathbf{U}^v$ ($\mathbf{V}^u$) обозначим множество всех функций, сопоставляющих каждому вектору (t, v) ((t, u)) из $\bar{R}_+ \times Q$ ($\bar{R}_+ \times P$) вектор из $P(v)$ ($Q(u)$) и измеримых по t при всяком $v \in Q$ ($u \in P$).

Пусть Δ — произвольное разбиение полуоси $\bar{R}_+$ точками $0 = t_1 < < t_2 < \ldots$, $\lim t_i = \infty$ при $i \to \infty$. Через $d(\Delta)$ обозначим диаметр разбиения Δ, т. е. $\sup \{|t_{i+1} - t_i| : i = 1, 2, \ldots\}$. При фиксированных Δ, $y \in X$, $U \in \mathbf{U}$ ($V \in \mathbf{V}$), $V^u \in \mathbf{V}^u$ ($U^v \in \mathbf{U}^v$) символом $x(\cdot; \Delta, y, U, V^u)$ ($x(\cdot; \Delta, y, U^v, V)$) обозначим абсолютно непрерывную функцию времени, заданную на $\bar{R}_+$ со значениями в X, равную y при $t = 0$ и являющуюся на каждом полуинтервале $t_i \leqslant t < t_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$ разбиения Δ решением дифференциального уравнения

$$dx/dt = Ax + f(U(t_i, x(t_i)), \quad V^u(t, U(t_i, x(t_i))))$$
$$(dx/dt = Ax + f(U^v(t, V(t_i, x(t_i))), V(t_i, x(t_i))))$$

Пусть m означает начало координат, $O(\varepsilon, x)$ — ε-окрестность точки $x \in X$. Введем множества B_1, B_2.

Множество B_1 — совокупность всех точек $y \in X$, для каждой из которых можно подобрать стратегию $U \in \mathbf{U}$, момент $\Theta \geqslant 0$ и отображение $\varepsilon \to \delta(\varepsilon)$ из R_+ в R_+ так, что, каковы бы ни были $\varepsilon > 0$, разбиение Δ с диаметром $d(\Delta) \leqslant \delta(\varepsilon)$ и функция $V^u \in \mathbf{V}^u$, при некотором $t \in [0, \Theta]$ будет выполнено включение $x(t; \Delta, y, U, V^u) \in O(\varepsilon, m)$.

Множество B_2 — совокупность всех точек $y \in X$, для каждой из которых можно подобрать стратегию $V \in \mathbf{V}$ и отображения $\Theta \to \varepsilon(\Theta)$, $\Theta \to \delta(\Theta)$ из R_+ в R_+ так, что, каковы бы ни были $\Theta > 0$, разбиение Δ с диаметром $d(\Delta) \leqslant \delta(\varepsilon)$] и функция $U^v \in \mathbf{U}^v$, при любом $t \in [0, \Theta]$ будет выполнено включение $x(t; \Delta, y, U^v, V) \in X \setminus O(\varepsilon, m)$.

Другими словами, множество B_1 (B_2) — совокупность всех начальных точек y на плоскости X, для каждой из которых существует способ действия первого (второго) игрока по принципу обратной связи, позволяющей ему за конечное время привести систему (1.1) достаточно близко к терминальной точке m (позволяющий ему предотвратить попадание за любое конечное время системы (1.1) в точку m) при любых действиях второго (первого) игрока.

В работе приводятся необходимые и достаточные условия того, что $B_1 \neq \{m\}$ ($B_2 = X \setminus \{m\}$).

2. Символом Γ обозначим множество всех функций, ставящих в соответствие каждому вектору u из P вектор из $Q(u)$. Пусть

$$H_1(x, \gamma) = \operatorname{co} \bigcup_{u \in P} [-Ax - f(u, \gamma(u))], \quad x \in X, \quad \gamma \in \Gamma$$

$$H_2(x, v) = \operatorname{co} \bigcup_{u \in P(v)} [-Ax - f(u, v)], \quad x \in X, \quad v \in Q$$

Здесь со D — замкнутая выпуклая оболочка множества D. Для произвольного выпуклого замкнутого множества $D \subset X$ примем

$$\Lambda(D) = \{x : x = \lambda z, \quad z \in D, \quad \lambda > 0\}$$
$$D^\circ = \overline{\Lambda}(D) \cap \{x : |x| = 1\}$$

Считая везде ниже $\xi = 1, 2$, положим $W_\xi = \Gamma$ при $\xi = 1$ и $W_\xi = Q$ при $\xi = 2$. При любом $x \in X$ пусть

$$K_\xi(x) = \bigcap_{w \in W_\xi} H_\xi^\circ(x, w) \tag{2.1}$$

$L_\xi(x) = K_\xi(x)$, если $K_\xi(x) \neq \varnothing$ и состоит из одного элемента; $L_\xi(x) = \varnothing$ в противном случае.

Предположение 1. Если $K_\xi(m) \neq \varnothing$ и состоит из одного или двух элементов, то

$$\inf_{p, w} \max \{\lambda \geqslant 0 : \lambda p \in H_\xi(m, w)\} > 0$$

где точная нижняя грань берется по всем $p \in K_\xi(m)$, $w \in W_\xi$.

Прежде чем описать второе предположение, введем следующие понятия. В случае $L_\xi(m) \neq \varnothing$ положим $F_\xi = \{x : x = \lambda L_\xi(m), \ \lambda \in R\}$; здесь R — множество действительных чисел. Если прямая F_ξ не инвариантна относительно линейного преобразования, задаваемого матрицей A, то пусть p_ξ — единичный вектор, удовлетворяющий условиям $p_\xi' L_\xi(m) = 0$, $p_\xi' A L_\xi(m) > 0$ (штрих означает транспонирование). Для любого $c > 0$ примем

$$J_\xi^{1,c} = \{l \in X : l' p_\xi \geqslant 0,\quad c\,|\,l\,| \geqslant l' L_\xi(m) \geqslant 0\},$$
$$J_\xi^{2,c} = -J_\xi^{1,c}$$

При всяком $l \in X$ положим

$$S_1(l) = \max_{u \in P} \min_{v \in Q(u)} l' f(u, v), \quad S_2(l) = \min_{v \in Q} \max_{u \in P(v)} l' f(u, v)$$

Предположение 2. Пусть $L_\xi(m) \neq \varnothing$ и прямая F_ξ не инвариантна. Тогда существует такое $\alpha > 0$, что функция S_ξ либо выпукла на каждом из множеств $J_\xi^{1,\alpha}$, $J_\xi^{2,\alpha}$, либо вогнута на каждом из этих множеств.

Примем $E_1 = B_1$, $E_2 = X \setminus B_2$.

Теорема. Пусть выполнены предположения 1, 2. Для того чтобы $E_\xi \neq \{m\}$, необходимо и достаточно выполнения одного из двух условий:

1) $K_\xi(m) \neq \varnothing$, $L_\xi(m) = \varnothing$;

2) $L_\xi(m) \neq \varnothing$ и существует такое $\varkappa > 0$, что $K_\xi(x) \neq \varnothing$ при любом $x \in \Lambda(L_\xi(m)) \cap O(\varkappa, m)$.

Замечания. 1°. Множество $K_\xi(x)$, введенное формулой (2.1), может быть эквивалентно определено следующим образом. Пусть $\nu_\xi(x)$ — совокупность всех единичных векторов l, таких, что $S_\xi(l) + l' A x \leqslant 0$. Тогда

$$K_\xi(x) = \bigcap_{l \in \nu_\xi(x)} \{z : |\,z\,| = 1,\ l' z \geqslant 0\}$$

если $\nu_\xi(x) \neq \varnothing$, и $K_\xi(x) = \{z : |\,z\,| = 1\}$, если $\nu_\xi(x) = \varnothing$.

2°. Если при любом $l \in X$

$$S_1(l) = S_2(l) \tag{2.2}$$

(т. е. выполнено условие седловой точки в маленькой игре [1]), то $K_1(x) = K_2(x)$ для всякого $x \in X$. Если при осуществлении (2.2) множество $K_1(m) = K_2(m)$ состоит из одного или двух элементов, то выполнение предположения 1 для $\xi = 1$ влечет выполнение этого предположения для $\xi = 2$ и наоборот.

3°. Предположение 1 выполнено, например, если

$$f(u, v) = u - v, \quad G = P \times Q, \quad P \subset X, \quad Q \subset X \tag{2.3}$$

и множество со P — многоугольник. Предположение 2 выполнено, например, если имеет место (2.3) и хотя бы одно из множеств со P, со Q — многоугольник.

3. Приведем схему доказательства теоремы. Пусть $K_\xi(x) \neq \varnothing$ для некоторого $x \in X$ и $r_\xi(x)$ — произвольный вектор из $K_\xi(x)$. Положим

$$\eta(x, r_\xi(x)) = \inf_{w \in W_\xi} \max \{\lambda \geqslant 0 : \lambda r_\xi(x) \in H_\xi(x, w)\}$$

В случае, когда $L_\xi(m) \neq \varnothing$ и прямая F_ξ не инвариантна, через Π обозначим ту из двух замкнутых полуплоскостей, определяемых прямой $\{x : Ax \in F_\xi\}$, куда направлен вектор $L_\xi(m)$. Примем $\Pi(c) = O(c, m) \cap \Pi$, $c > 0$. Имеет место следующая

Лемма 1. Пусть $L_\xi(m) \neq \varnothing$, F_ξ не инвариантна, выполнены предположения 1, 2. Тогда либо а) существуют $\varkappa > 0$ и удовлетворяющая условию Липшица функция q_ξ, определенная на $O(\varkappa, m)$ со значениями в X°, такие, что $K_\xi(x) \neq \varnothing$, $q_\xi(x) \in K_\xi(x)$ при любом $x \in \Pi(\varkappa)$, $\inf\{\eta(x, q_\xi(x)) : x \in \Pi(\varkappa)\} > 0$; либо в) существуют $\varkappa > 0$ и удовлетворяющие условию Липшица функции h_ξ, ψ_ξ, определенные на $O(\varkappa, m)$ со значениями соответственно в $J_\xi^{\circ 1,\alpha}$ и R_+, такие, что

$$\max_{w \in W_\xi} \min\{(-1)^i h_\xi'(x) y:\ y \in H_\xi(x, w)\} \geqslant \psi_\xi(x)$$
$$i = 1, 2;\quad x \in \Pi(\varkappa)$$
$$h_\xi(x) \neq p_\xi,\quad \psi_\xi(x) > 0,\quad x \in \Pi(\varkappa) \setminus F_\xi$$
$$h_\xi(x) = p_\xi,\quad \psi_\xi(x) = 0,\quad x \in \Pi(\varkappa) \cap F_\xi$$

В зависимости от конкретного вида системы (1.1) при выполнении предположений 1, 2 возможен лишь один из следующих пяти случаев:

1) $K_\xi(m) \neq \varnothing$, $L_\xi(m) = \varnothing$;

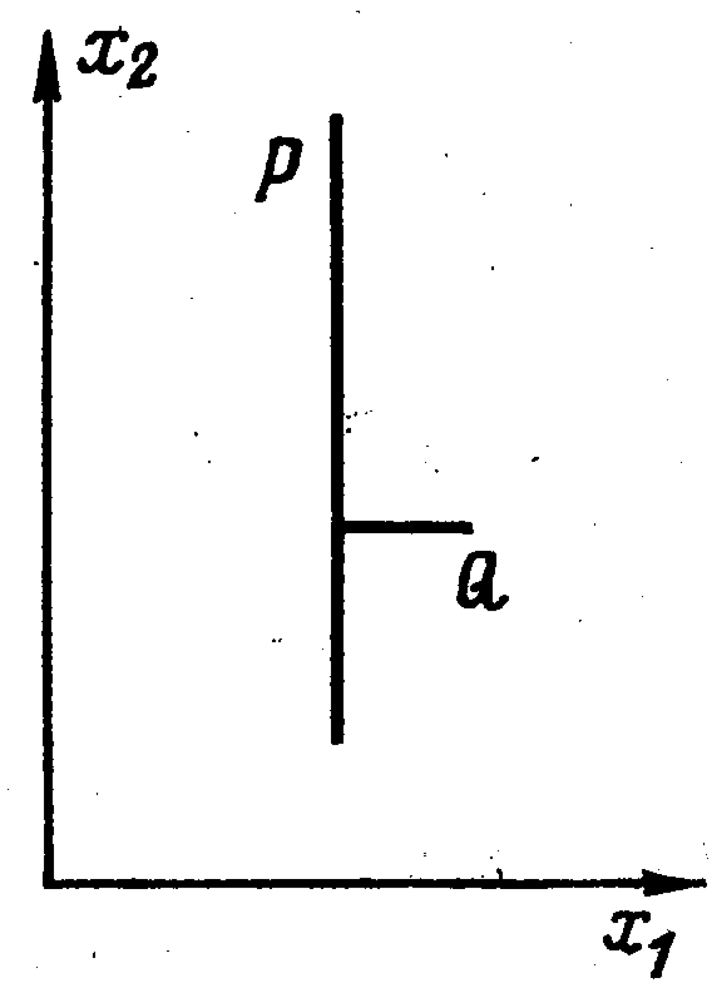
2) $L_\xi(m) \neq \varnothing$, F_ξ инвариантна;

3) $L_\xi(m) \neq \varnothing$, F_ξ не инвариантна, выполнено утверждение а) леммы 1;

4) $L_\xi(m) \neq \varnothing$, F_ξ не инвариантна, выполнено утверждение в) леммы 1;

5) $K_\xi(m) = \varnothing$.

Лемма 2. Пусть выполнены предположения 1, 2. Тогда $E_\xi \neq \{m\}$ в случаях 1—3 и $E_\xi = \{m\}$ в случаях 4, 5.



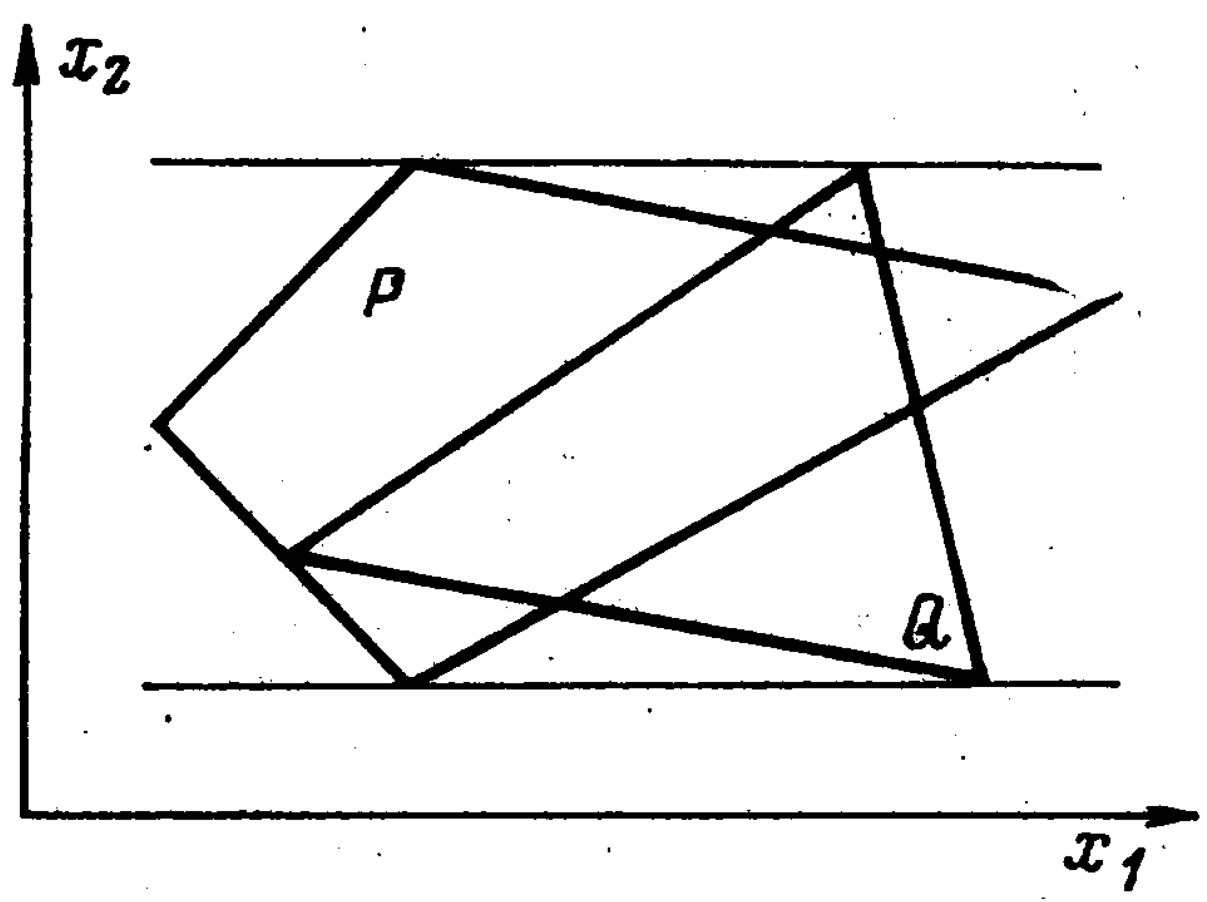
Фиг. 1

Теорема вытекает из леммы 2 при учете следующих замечаний:

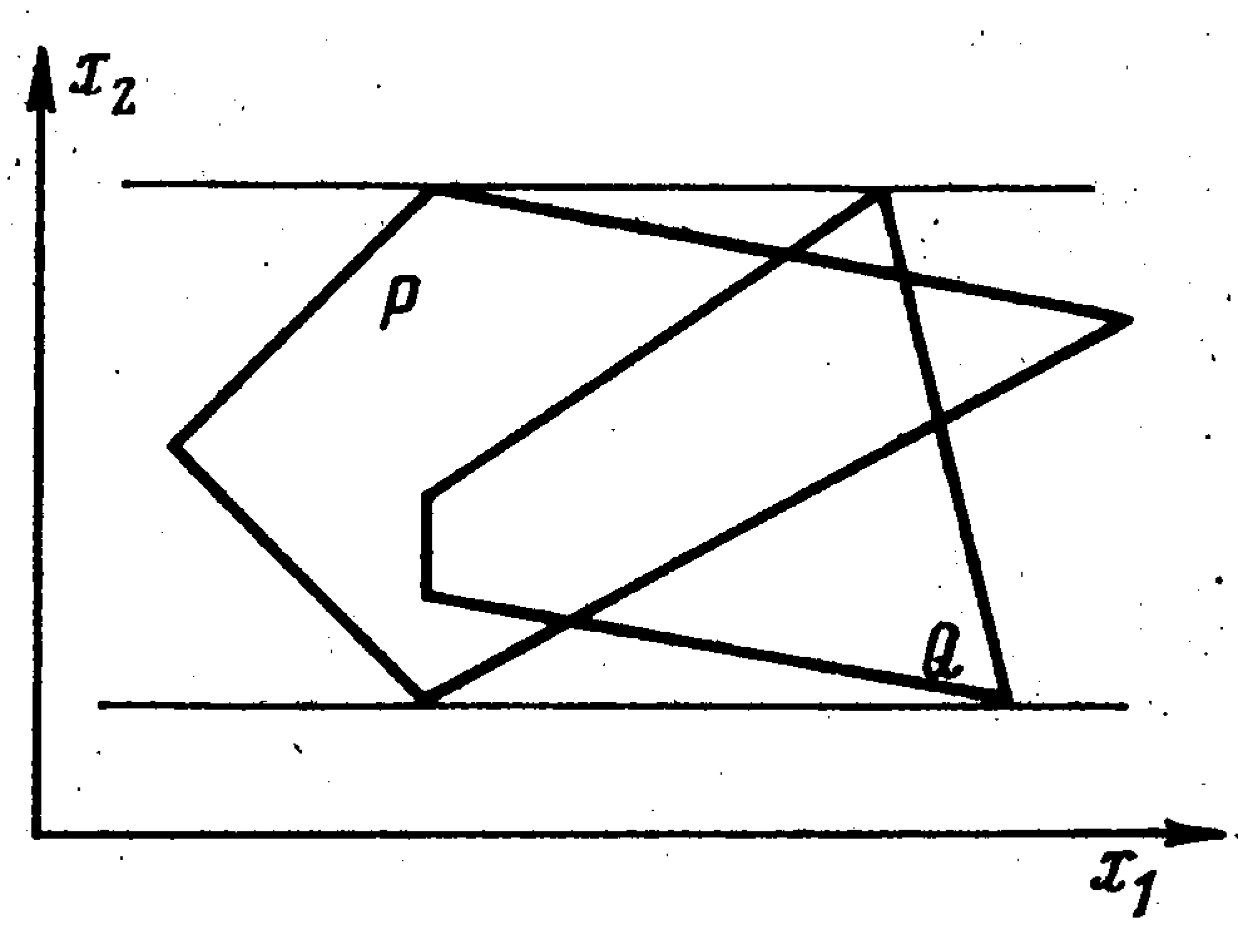
утверждение а) леммы 1 влечет за собой выполнение условия 2) теоремы;

если справедливо утверждение в) леммы 1, то условие 2) теоремы не выполнено;

условие 2) теоремы выполнено, если $L_\xi(m) \neq \varnothing$ и прямая F_ξ инвариантна.



Фиг. 2



Фиг. 3

4. *Примеры.* Пусть функция f и множество G имеют вид (2.3). Если множества P и Q — такие, как на фиг. 1, 2, то $K_1(m) = K_2(m) = \varnothing$ и поэтому при любой матрице A согласно теореме $B_1 = \{m\}$, $B_2 = X \setminus \{m\}$. Пусть теперь множества P и Q —

такие, как на фиг. 3. Тогда $L_1(m) = L_2(m) = \{l : l_1 = 1, l_2 = 0\}$. Если

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} \quad \left(A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}\right)$$

то существует $\varkappa > 0$, такое, что $K_1(x) = K_2(x) = \varnothing$ ($K_1(x) = K_2(x) \neq \varnothing$) при любом $x \in \{z : 0 < z_1 < \varkappa,\ z_2 = 0\}$. Стало быть, $B_1 = \{m\}$, $B_2 = X \setminus \{m\}$ ($B_1 \neq \{m\}$, $B_2 \neq X \setminus \{m\}$).

Поступила 21 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
2. *Понтрягин Л. С.* Линейная дифференциальная игра убегания. Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 112, М., «Наука», 1971.
3. *Пшеничный Б. Н., Чикрий А. А.* Задача об уклонении от встречи в дифференциальных играх. Ж. вычисл. матем. и матем физ., 1974, т. 14, № 6.
4. *Пацко В. С.* Условия уклонения от точки в дифференциальной игре второго порядка. ПММ, 1972, т. 36, вып. 6.