Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 62—50

О ЛИНЕЙНОЙ ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ СБЛИЖЕНИЯ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

С. А. Чигирь

(Москва)

Рассматривается игровая задача сближения в условиях неполной информации о фазовых координатах. Используется подход, предложенный в работах [1–4] и позволяющий свести задачу о сближении при неполной информации к некоторой конфликтной задаче управления при полной информации, рассматриваемой в подходящем функциональном пространстве. Для такой задачи описывается конструкция, аналогичная попятной процедуре из работы [5], которая используется здесь в качестве вспомогательного средства для построения стабильной системы множеств, необходимой для позиционного решения задачи сближения на основе правила экстремального прицеливания из работ [2–4].

1. В n-мерном евклидовом пространстве R^n рассмотрим векторное линейное дифференциальное уравнение

$$dx\,/\,dt = A\,(t)\,x - u + v, \quad x \in R^n \tag{1.1}$$

Здесь u, v — управляющие воздействия, подчиненные первому и второму игрокам соответственно и стесненные ограничениями

$$u \in P\,(t), \quad v \in Q\,(t) \tag{1.2}$$

Множества $P\,(t)$, $Q\,(t)$ из R^n предполагаются непустыми, замкнутыми, измеримым образом зависящими от t (см. [6], стр. 338) и удовлетворяющими условиям

$$\|\,u\,\| \leqslant \alpha\,(t), \quad \|\,v\,\| \leqslant \beta\,(t) \tag{1.3}$$

для всех $u \in P\,(t)$, $v \in Q\,(t)$. Матрицу $A\,(t)$ и функции $\alpha\,(t)$, $\beta\,(t)$ будем предполагать суммируемыми на всяком конечном отрезке.

В пространстве $R^1 \times R^n$ переменных t, x выделено целевое замкнутое множество M. Ограничимся здесь лишь задачей сближения в момент ϑ и будем предполагать, что множество M выпуклое и целиком лежит в гиперплоскости $t = \vartheta$. Цель первого игрока — выбором управления $u\,[t]$ обеспечить приведение фазового вектора $x\,[\vartheta]$ на множество M. Цель второго противоположна. Подобно [2, 4] предположим, что вектор $x \in R^n$ подвергнут некоторому неособому линейному преобразованию (см. [3], стр. 161), в результате которого уравнение (1.1) принимает вид

$$dx\,/\,dt = -u + v \tag{1.4}$$

причем ограничения (1.2) и множество M также преобразуются известным образом. Для преобразованных множеств сохраним прежние обозначения и заметим, что все предположения относительно множеств $P(t)$, $Q(t)$, M выполняются и для преобразованных множеств, при этом функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ в формулах (1.3) заменяются некоторыми новыми суммируемыми функциями, для которых также сохраняем прежние обозначения.

Примем, что при формировании управлений первый игрок в каждый момент времени t знает выпуклое компактное множество $G[t] \subset R^n$, содержащее реализованное к этому моменту состояние $x[t]$. На основании указанной информации он выбирает в этот момент свое управление $u[t] \in \in P(t)$. При этом он может столкнуться с любой измеримой по Лебегу реализацией $v[t]$, удовлетворяющей ограничениям (1.2), вырабатываемой вторым игроком.

Оговорим характер изменения информационных множеств $G[t]$ со временем. Будем, так же как в [2-4], считать, что каковы бы ни были моменты t_*, $t^* > t_*$, множество $G[t^*]$ состоит лишь из таких фазовых состояний, в которые можно перевести фазовый вектор $x[t]$ к моменту t^* согласно закону (1.4) из точек множества $G[t_*]$ под действием реализованных в процессе игры управлений $u[t]$, $v[t]$, $t_* \leqslant t \leqslant t^*$ первого и второго игроков. По существу, данное условие изменения множеств $G[t]$ означает, что, каковы бы ни были моменты t_*, $t^* > t_*$, первый игрок получает в момент t^* полную информацию об управлениях $u[t]$, $v[t]$, $t_* \leqslant t < t^*$, причем указанную информацию он может использовать лишь для уточнения информационных множеств, но не для формирования управляющих воздействий $u[t]$. Кроме того, изменение информационных множеств $G[t]$ стесним условием

$$G[t] \in \Gamma(t) \tag{1.5}$$

где через $\Gamma(t)$ обозначено некоторое семейство выпуклых компактов из R^n, свойства которого уточним ниже.

Таким образом, задача управления фазовым вектором $x[t]$ подменяется здесь задачей управления информационным множеством $G[t]$, содержащим реализованное к моменту t состояние $x[t]$, причем условие приведения вектора $x[\vartheta]$ на множество M заменяется условием

$$G[\vartheta] \subset M \tag{1.6}$$

гарантирующим нужное наведение.

2. В работах [2-4] для математической формализации указанной проблемы управления использован способ, основанный на взаимно-однозначном соответствии между выпуклыми компактами и их опорными функциями и дальнейшем погружении исходной задачи в более общую задачу управления в подходящем функциональном пространстве. В качестве такого пространства в [2-4] выбрано гильбертово пространство H, образованное скалярными положительно однородными функциями $h(l)$ с интегрируемым на единичном шаре $\Theta = \{l \in R^n : \| l \| \leqslant 1\}$ квадратом и с нормой $\| h \|_H = \langle h, h \rangle^{1/2}$, определяемой скалярным произведением ($d\{l\}$ — ме-

ра Лебега на R^n)

$$(2.1)\qquad \langle h_1, h_2\rangle = \int\limits_{\Theta} h_1(l)\, h_2(l)\, d\{l\}$$

Указанное погружение достигается тогда следующим образом. Обозначим через $\mu(l)$ опорную функцию множества M и введем множество

$$(2.2)\qquad L = \{h \in H : h(l) \leqslant \mu(l),\quad l \in R^n\}$$

играющее роль целевого в обобщенной задаче управления в пространстве H. Отметим, что в формулах (2.2) и во всех последующих соотношениях для функций $h(l)$ предполагается, что эти соотношения выполняются при почти всех l. Пары $\{t, h\}$ называются позициями.

Пусть $\Gamma(t)$ — некоторое однопараметрическое семейство множеств из H, удовлетворяющее следующим условиям:

$$(2.3)\qquad \begin{array}{l} \Gamma(t^*) \subset \Gamma(t_*),\quad (t^* > t_*) \\ h_*(l) \leqslant h^*(l),\quad h^*(\cdot) \in \Gamma(t) \Rightarrow h_*(\cdot) \in \Gamma(t) \\ h_*(l) = h^*(l) + l\cdot x,\quad h^*(\cdot) \in \Gamma(t) \Rightarrow h_*(\cdot) \in \Gamma(t) \end{array}$$

Первое условие (2.3) отражает факт накопления информации о системе с течением времени; остальные формализуют свойства информационных множеств, означающие, что если в момент времени t в качестве информационного множества может реализоваться какое-то множество $G^* \subset R^n$, то в тот же момент может реализоваться и всякое множество $G_* \subset G^*$, а также всякое множество G_*, получающееся из G^* сдвигом на вектор $x \in R^n$.

Пусть далее $g_t(l)$ — некоторая функция, зависящая от параметра t, которая при всяком $t \geqslant t_*$ является элементом пространства H и удовлетворяет следующим условиям:

$$(2.4)\qquad \begin{array}{l} g_{t_*}(l) = h_*(l) \\ g_t(\cdot) \in \Gamma(t)\quad (t > t_*) \\ g_{t_2}(l) \leqslant g_{t_1}(l)\quad (t_2 \geqslant t_1 \geqslant t_*) \end{array}$$

Всякая функция $g_t(l, h_*)_v$ вида

$$g_t(l, h_*)_v = g_t(l) + l\cdot \int\limits_{t_*}^{t} v[\tau]\, d\tau$$

где $g_t(l)$ удовлетворяет условиям (2.4), а $v[\tau]$ — некоторая измеримая функция, удовлетворяющая условию $v[\tau] \in Q(\tau)$ $(\tau \geqslant t_*)$, называется допустимой функцией для позиции $\{t_*, h_*\}$.

Стратегию U первого игрока отождествим с отображением

$$U\colon \{t, h\} \to u[\cdot]$$

ставящим в соответствие всякой позиции $\{t, h\}$ некоторую функцию $u[\tau]$ $(\tau \geqslant t)$, измеримую на всяком отрезке и удовлетворяющую условию $u[\tau] \in P(\tau)$. Пусть $\Delta = \{\tau_i\colon t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_m < \ldots\}$ — некоторое разбиение полуоси $[t_0, \infty)$. В соответствии с [3] движением из позиции $\{t_0, h_0\}$, порожденным стратегией U при разбиении Δ, называется функция $h_t(l) = h_t(l;\ t_0, h_0, U, \Delta)$, определяемая следующим рекуррентным соотношением:

$$h_t(l) = g_t(l; h_{\tau_i}(\cdot))_v - l \cdot \int\limits_{\tau_i}^{t} u_i[\tau]\, d\tau, \quad \tau_i < t \leqslant \tau_{i+1}$$

Здесь $h_{t_0}(l) = h_0(l)$, $u_i[\cdot] = U(\tau_i, h_{\tau_i}(\cdot))$, а $g_{t_i}(l; h_{\tau_i}(\cdot))_v$ — произвольная допустимая функция для позиции $\{\tau_i, h_{\tau_i}\} \in R^1 \times H$. Задача о сближении может быть сформулирована теперь следующим образом:

Задача 1. Для позиции $\{t_0, h_0\}$ построить стратегию U_c, удовлетворяющую условию: каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, найдется число $\delta = \delta(\varepsilon)$, такое, что для всякого движения $h_t(l) = h_t(l;\ t_0, h_0, U_c, \Delta)$ справедливо включение

(2.5) $$h_\vartheta(\cdot) \in L^{(\varepsilon)}$$

если только диаметр разбиения Δ не превосходит числа δ.

В [2–4] отмечено, что условие (2.5) приведения всех элементов $h_\vartheta(\cdot)$ в достаточно малую ε-окрестность множества L в метрике пространства H гарантирует в то же время приведение всех информационных множеств $G[\vartheta]$ в некоторую достаточно малую, уже евклидову окрестность множества M, и, следовательно, задача 1 может рассматриваться как формализация исходной проблемы управления.

3. Укажем в соответствии с [2–4] условия разрешимости задачи 1, а также опишем предложенный там способ построения разрешающей стратегии.

Пусть $W(t) \subset H$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ — система непустых множеств. Определим

(3.1) $$\rho(t, h) = \inf \{\| h - y \|_H : y \in W(t)\}$$

Пусть $\{f_k\}$ — какая-либо минимизирующая последовательность элементов для $\rho(t, h)$. Построим последовательность элементов $\eta_k \in H$ следующим образом:

(3.2) $$\eta_k = \begin{cases} f_k(l) - h(l), & \text{если } f_k(l) < h(l) \\ 0, & \text{если } f_k(l) \geqslant h(l) \end{cases}$$

Пусть $\Omega(t, h)$ — совокупность всевозможных слабых пределов всевозможных последовательностей η_k вида (3.2). Через $S(t, h)$ обозначим следующее множество векторов:

$$S(t, h) = \left\{ s \in R^n : s = \int\limits_{\Theta} l \cdot \eta(l)\, d\{l\},\ \eta(\cdot) \in \Omega(t, h) \right\}$$

а через $s_e(t, h)$ — произвольную функцию, ставящую в соответствие всякой позиции $\{t, h\}$ вектор $s = s_e(t, h) \in S(t, h)$. Определим, далее, множество $P_\tau^{(e)} = P_\tau^{(e)}(t, h)$ как совокупность векторов $u^* \in P(\tau)$, удовлетворяющих условию

$$u^* \cdot s_e(t, h) = \max_{u \in P(\tau)} u \cdot s_e(t, h)$$

В силу измеримости $P(\tau)$ множества $P_\tau^{(e)}$ также оказываются измеримыми по τ при фиксированных t, h (см., например, [6], стр. 346).

Экстремальная к системе множеств $W(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ стратегия $U^{(e)}$ определяется отображением

$$U^{(e)}: \{t, h\} \to u[\cdot]$$

ставящим в соответствие всякой позиции $\{t, h\}$ произвольную измеримую функцию $u[\tau]$ $(\tau \geqslant t)$, удовлетворяющую условию $u[\tau] \in P_\tau^{(e)} = P_\tau^{(e)}(t, h)$ $(\tau \geqslant t)$.

Аналогично [2-4] систему множеств $W(t) \subset H$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ назовем u-стабильной, если, каковы бы ни были t_*, $t^* \in [t_0, \vartheta]$, $t^* > t_*$, $h_* \in W(t_*)$, допустимая функция $g_t(l; h_*)_v$, найдется измеримая функция $u[t]$ $(t_* \leqslant t \leqslant t^*)$ со значениями в $P(t)$, такая, что

$$\left\{g_{t^*}(l;\ h_*)_v - l\cdot \int_{t_*}^{t^*} u[\tau]\, d\tau\right\} \in W(t^*)$$

Роль экстремальной стратегии определяет следующая

Лемма. Пусть $W(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ — u-стабильная система множеств и $W(\vartheta) \subset L$. Тогда экстремальная к указанной системе множеств стратегия разрешает для всякой позиции $\{t_0, h_0\}$, $h_0 \in W(t_0)$ задачу 1.

Таким образом, для разрешимости задачи сближения для позиции $\{t_0, h_0\}$ достаточно построить какую-либо u-стабильную систему множеств, содержащую позицию $\{t_0, h_0\}$ и обрывающуюся в момент ϑ на множестве L.

4. В работах [2-4] описана конструкция программного поглощения, аналогичная [7, 8], но видоизмененная в соответствии со спецификой задач управления при неполной информации. Известно, что в регулярном случае множества программного поглощения образуют u-стабильную систему множеств, обрывающуюся в момент ϑ на L, и, следовательно, в соответствии с леммой 1 могут использоваться для решения задачи 1.

В данной работе предлагается другой способ построения максимальной u-стабильной системы множеств, аналогичный попятным конструкциям из работ [3, 5] и видоизмененный здесь в связи со спецификой рассматриваемой задачи.

Для произвольных множеств $A, B \subset H$ определим подобно [5] операцию геометрической разности

$$A \overset{*}{-} B = \{h \in H : h + B \subset A\} \tag{4.1}$$

Как и в конечномерном случае, справедливы соотношения

$$(A \overset{*}{-} B) \overset{*}{-} C = A \overset{*}{-} (B + C) \tag{4.2}$$
$$(A + B) \overset{*}{-} C \supset (A \overset{*}{-} C) + B$$

Пусть G — некоторое множество в R^n. Определим множество

$$\Lambda(G) = \{h \in H : h(l) = l\cdot x,\ x \in G\}$$

Видно, что для произвольных множеств G_1, $G_2 \subset R^n$ справедливо соотношение

$$\Lambda(G_1 + G_2) = \Lambda(G_1) + \Lambda(G_2) \tag{4.3}$$

а компактность или выпуклость множества G влекут за собой компактность или выпуклость множества $\Lambda(G) \subset H$ соответственно.

Введем отображение $\varphi_t : 2^H \to 2^H$, ставящее в соответствие всякому множеству $A \subset H$ множество $\varphi_t(A)$ элементов $h \in H$, обладающих следующим свойством: всякий элемент $g \in H$, $g(l) \leqslant h(l)$, $g \in \Gamma(t)$ удовлетворяет включению $g \in A$. Пусть $\Delta = \{\tau_i : t_0 = t_0 < \tau_1 < \ldots \ldots < \tau_m = \vartheta\}$ — некоторое разбиение отрезка $[t_0, \vartheta]$. Определим множества $W_i \subset H$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ при помощи следующего рекуррентного соотношения:

$$W_i = \varphi_{\tau_{m-i+1}}\left\{\left(W_{i-1} + \Lambda\left(\int\limits_{\tau_{m-i}}^{\tau_{m-i+1}} P(\tau)\,d\tau\right)\right) \overset{*}{-} \Lambda\left(\int\limits_{\tau_{m-i}}^{\tau_{m-i+1}} Q(\tau)\,d\tau\right)\right\} \tag{4.4}$$

где будем полагать $W_0 = L$. Отметим, что в силу замкнутости множеств $P(\tau)$, $Q(\tau)$ и условий (1.3) многозначные интегралы от $P(\tau)$, $Q(\tau)$ в соотношениях (4.4) являются, как известно [9], непустыми выпуклыми компактами в R^n.

Каждое из множеств W_i в соотношениях (4.4) представляет собой сечение гиперплоскостью $t = \tau_{m-i}$ множества программного поглощения для предыдущего множества W_{i-1} в момент τ_{m-i+1}.

Множества W_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ обладают следующим свойством, аппроксимирующим свойство u-стабильности: каковы бы ни были $h_* \in W_i$ и допустимая для позиции $\{\tau_{m-i}, h_*\}$, функция $g_t(l; h_*)_v$ $(\tau_{m-i} \leqslant t \leqslant \tau_{m-i+1})$, найдется измеримая функция $u[t]$ $(\tau_{m-i} \leqslant t \leqslant \tau_{m-i+1})$ со значениями в $P(t)$, такая, что

$$\left\{g_{\tau_{m-i+1}}(l; h_*)_v - l \cdot \int\limits_{\tau_{m-i}}^{\tau_{m-i+1}} u[\tau]\,d\tau\right\} \in W_{i+1}$$

Множество W_m обозначим далее через W_Δ и определим множество

$$W^c(\vartheta, t_0) = \bigcap_{\Delta} W_\Delta$$

где пересечение берется по всевозможным разбиениям Δ отрезка $[t_0, \vartheta]$. Можно показать, что для любой последовательности разбиений $\{\Delta_i\}$, такой, что $\Delta_{i+1} \subset \Delta_i$, $\Delta_i \neq \Delta_{i+1}$, справедливо соотношение

$$W^c(\vartheta, t_0) = \bigcap_{i=1}^{\infty} W_{\Delta_i} \tag{4.5}$$

Рассмотрим систему множеств $W^c(t) = W^c(\vartheta, t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$. Из определения $W^c(t)$ следует, что $W^c(\vartheta) = L$, и, стало быть, построенная система множеств обрывается в момент ϑ на L. Имея в виду использовать построенную систему множеств для решения задачи 1, обратимся к проверке условия u-стабильности указанной системы множеств. Пусть $\Delta = \{\tau_i : t_1 = \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_m = t_2\}$ — некоторое разбиение отрезка $[t_1, t_2]$, L_* — произвольное множество в H, а $W_\Delta{}^*$ — множество, построенное по разбиению Δ рекуррентной процедурой (4.6), где следует полагать $\vartheta = t_2$, $t_0 = t_1$, $L = L_*$. Используя определение отображения

φ_t и формулы (4.2), (4.3), индукцией можно доказать справедливость включения

$$W_\Delta^* \subset \varphi_{t_2}\left\{\left(L_* + \Lambda\left(\int_{t_1}^{t_2} P(\tau)\,d\tau\right)\right) \overset{*}{-} \Lambda\left(\int_{t_1}^{t_2} Q(\tau)\,d\tau\right)\right\} \tag{4.6}$$

Для доказательства свойства u-стабильности множеств $W^c(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ на основе соотношения (4.6) следует использовать следующие, легко проверяемые соотношения:

$$\varphi_t\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \varphi_t(A_i) \tag{4.7}$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}(A_i \overset{*}{-} B) = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \overset{*}{-} B$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}(A_i + \Lambda(G)) = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) + \Lambda(G)$$

$$(A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \supset A_i \supset \ldots)$$

причем в первых двух соотношениях (4.7) A_i, $B \subset H$ предполагаются произвольными множествами, а в последней формуле (4.7) предполагается, что множество G компактно, а множество A_i замкнуты и удовлетворяют условию в скобках.

Из формул (4.5), (4.6) с учетом (4.7) выводится важное свойство множеств $W^c(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$, определяемое соотношением

$$W^c(t_*) \subset \varphi_{t^*}\left\{\left(W^c(t^*) + \Lambda\left(\int_{t_*}^{t^*} P(\tau)\,d\tau\right)\right) \overset{*}{-} \Lambda\left(\int_{t_*}^{t^*} Q(\tau)\,d\tau\right)\right\} \tag{4.8}$$

$$(\forall t_*,\ t^* \in [t_0, \vartheta],\quad t^* > t_*)$$

Но с учетом (4.1) соотношение (4.8) как раз и выражает требуемое свойство u-стабильности системы множеств $W^c(t)$. Отметим, что из самого определения рекуррентной процедуры (4.4) следует, что построенная система множеств $W^c(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ максимальна на отрезке $[t_0, \vartheta]$.

Описанный здесь конструктивный и в принципе общий способ построения стабильных мостов в общем случае оказывается практически весьма трудно реализуемым. Вместе с тем можно привести конкретные примеры игровых задач управления, в которых построение стабильных мостов на основе рассмотренной процедуры сводится к достаточно элементарным операциям. В связи с этим, наряду с разработкой других, возможно менее универсальных, но легче реализуемых алгоритмов построения подходящих стабильных множеств, остается важным отыскание различных, в меру общих, частных случаев, когда и описанная выше рекуррентная процедура является достаточно эффективным средством, доставляющим решение той или иной игровой задачи.

Автор приносит глубокую благодарность Н. Н. Красовскому за полезные советы и внимание к работе.

Поступила 28 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
2. *Красовский Н. Н., Осипов Ю. С.* Задача управления с неполной информацией. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4.
3. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
4. *Красовский Н. Н., Осипов Ю. С.* К теории дифференциальных игр с неполной информацией. Докл. АН СССР, 1974, т. 215, № 4.
5. *Понтрягин Л. С.* О линейных дифференциальных играх. II. Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 4.
6. *Иоффе А. Д. Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М., «Наука», 1974.
7. *Красовский Н. Н.* Программное поглощение в дифференциальных играх. Докл. АН СССР, 1971, т. 201, № 2.
8. *Красовский Н. Н.* Дифференциальная игра сближения — уклонения. I, II. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973, № 2—3.
9. *Auman R. J.* Integrals of set-values function. Math. Analys. and Appl., 1965, vol. 12, No. 1.