Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 62—50

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЦЕНЫ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР

Е. Г. Полищук

(Свердловск)

Рассматривается два типа нелинейных дифференциальных игр с фиксированным моментом окончания. При определенных условиях получены выражения для функций цены.

1. Пусть система состоит из двух управляемых объектов, описываемых уравнениями

$$x^{\cdot} = A(t)\,x + u, \quad x \in R^n, \quad u(t) \in P(t) \tag{1.1}$$

$$y^{\cdot} = g(t, y, v), \quad y \in R^m, \quad v(t) \in Q \tag{1.2}$$

Здесь x, y — фазовые векторы объектов; $A(t)$ — n-мерная матрица, непрерывно зависящая от t; управляющие векторы u и v ограничены компактами $P(t)$ и Q, причем точечно-множественное отображение $P(t)$ ограничено и измеримо. Платой является непрерывная функция $R(x, y)$. Игрок, управляющий объектом x, стремится минимизировать величину $R(x(\theta), y(\theta))$ — значение платы на фазовом векторе системы в момент окончания игры $t = \theta$, а управляющий объектом y — максимизировать.

Предполагается, что выполнены следующие условия, обеспечивающие существование и единственность решения уравнения (1.2) вплоть до $t = \theta$ для любого начального условия и любой измеримой функции $v(t) \in Q$: функция $g(t, y, v)$ непрерывна по совокупности своих аргументов, удовлетворяет локальному условию Липшица по y равномерно по v и $\| g(t, y, v) \| \leqslant \varkappa (1 + \| y \|)$, $\varkappa = \text{const}$.

Обозначим через $z = (x, y)$ и $R^k = R^n \times R^m$ фазовые вектор и пространство системы. Используемые далее понятия теории дифференциальных игр понимаются в соответствии с книгой [1].

Из [1] следует, что для рассматриваемой игры существует функция цены $\varepsilon(t, z)$. Будем искать ее значение для позиции (t_0, z_0). Пусть плату $R(z)$ можно представить в виде

$$R(z) = \max_{s \in S} R_s(z), \quad R_s(z) = R_s^1(x) + R_s^2(y) \tag{1.3}$$

где S — компакт, а функция $R_s(z)$ непрерывна по (s, z). Обозначим через $\varepsilon_s^1(t_*, x_*)$ «цену» следующей задачи оптимального управления:

$$x^{\cdot} = A(t)\,x + u, \quad x(t_*) = x_*, \quad u(t) \in P(t); \quad R_s^1(x(\theta)) \to \inf$$

Аналогично, величина $\varepsilon_s^2(t_*, y_*)$ соответствует задаче

$$y^{\cdot} = g(t, y, v), \quad y(t_*) = y_*, \quad v(t) \in Q$$
$$R_s^2(y(\theta)) \to \sup$$

Рассмотрим функцию

$$\varepsilon^*(t, z) = \max_{s \in S} \{\varepsilon_s^1(t, x) + \varepsilon_s^2(t, y)\} \tag{1.4}$$

Максимум в (1.4) существует и функция $\varepsilon^*(t, z)$ непрерывна, так как функция $\varepsilon_s(t, z) = \varepsilon_s^1(t, x) + \varepsilon_s^2(t, y)$ непрерывно зависит от (s, t, z).

Рассмотрим условия, достаточные для выполнения равенства $\varepsilon^*(t_0, z_0) = \varepsilon(t_0, z_0)$. Для всякого числа c введем замкнутые множества:

$$W_c(t) = \{z \in R^k : \varepsilon(t, z) \leqslant c\}$$
$$W_c^*(t) = \{z \in R^k : \varepsilon^*(t, z) \leqslant c\}$$
$$W_c^s(t) = \{z \in R^k : \varepsilon_s(t, z) \leqslant c\}$$

Символ ∂ будет означать границу множества в R^k.

Условие 1.1. Пусть $\varepsilon^*(t_0, z_0) = c_0$. Тогда

$$W_{c_0}^*(t) \neq \varnothing, \quad \forall t \in [t_0, \theta]$$

Если условие 1.1 выполнено, то существуют семейства замкнутых выпуклых множеств $B(t) \subset R^k$, зависящих от $t \in [t_0, \theta]$, и таких, что:

1) $z_0 \in B(t_0)$;

2) для всяких $t_0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \theta$ множество $B(t_2)$ содержит все фазовые положения системы, в которые можно попасть в момент t_2 из позиции (t_1, z_1), где $z_1 \in B(t_1)$;

3) $W_{c_0}^*(t) \cap B(t) \neq \varnothing, \quad \forall t \in [t_0, \theta]$.

Пусть существует открытое выпуклое множество $B \subset R^k$, содержащее семейство $B(t)$ с описанными выше свойствами, и такое, что выполняются следующие условия.

Условие 1.2. Для всяких $s \in S$ и $t \in [t_0, \theta]$ функция $\varepsilon_s(t, z)$ выпуклая по z на множестве B.

Отметим, что из этого условия следует выпуклость множеств $W_c^*(t) \cap B$.

Условие 1.3. Есть число $\beta > 0$, такое, что для каждого $c \in (c_0, c_0 + \beta)$ существует множество J_c, плотное в $[t_0, \theta]$ и обладающее следующим свойством. Для всякого $t \in J_c$ часть границы множества $W_c^*(t)$, которая находится в B,— гладкая, т. е. через каждую точку из $\partial W_c^*(t) \cap B$ можно провести единственную опорную к $W_c^*(t) \cap B$ гиперплоскость.

Теорема 1. Если выполнены условия 1.1—1.3, то $\varepsilon^*(t_0, z_0) = \varepsilon(t_0, z_0)$.

Доказательство. Для произвольных $t_1 < t_2$ из $[t_0, \theta]$ и множества $M \subset R^k$ через $T[t_1, t_2]\{M\}$ обозначим множество программного поглощения [1], т. е. множество всех точек $z_1 \in R^k$, таких, что из позиции (t_1, z_1) первый игрок может привести систему в позицию (t_2, z_2), где $z_2 \in M$, если он знает программное управление второго игрока на отрезке $[t_1, t_2]$.

Ясно, что $\varepsilon^*(t_0, z_0) \leqslant \varepsilon(t_0, z_0)$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что для любого $c \in (c_0, c_0 + \beta)$ имеет место включение

$$z_0 \in W_c(t_0) \tag{1.5}$$

Зафиксируем такое c и для него докажем (1.5). Отметим, что из свойства 3) семейства $B(t)$ следует, что $W_c^*(t) \cap B(t) \neq \varnothing$ для всех $t \in [t_0, \theta]$.

Предположим, что уже доказано следующее утверждение. Для всяких τ_1, τ_2, таких, что $\tau_2 \in J_c$ и $t_0 \leqslant \tau_1 < \tau_2$, имеет место включение

$$T[\tau_1, \tau_2]\{W_c^*(\tau_2) \cap B(\tau_2)\} \supset W_c^*(\tau_1) \cap B(\tau_1) \tag{1.6}$$

Из этого утверждения следует (1.5).

Действительно, рассмотрим разбиение отрезка $[t_0, \theta]$ точками $t_0 < t_1 < \ldots < t_N < \theta$, такими, что $t_i \in J_c$ для $1 \leqslant i \leqslant N$. Тогда из (1.6) следует

$$T[t_0, t_1] \ldots T[t_{N-1}, t_N]\{W_c^*(t_N) \cap B(t_N)\} \supset W_c^*(t_0) \cap B(t_0) \tag{1.7}$$

Измельчая разбиение отрезка $[t_0, t_N]$ точками из J_c и используя структуру дифференциальных игр [1, 2], из (1.7) получаем

$$S[t_0, t_N]\{W_c^*(t_N) \cap B(t_N)\} \supset W_c^*(t_0) \cap B(t_0) \tag{1.8}$$

где обозначение $S[a, b]\{M\}$ используется для множества таких точек $z \in R^k$, что позиция (a, z) — точка позиционного поглощения [1] множества $M \subset R^k$ в момент $t = b$.

Так как функция $\varepsilon^*(t, z)$ непрерывна по (t, z), то множество $W_c^*(t)$ полунепрерывно сверху по t. В силу свойства 2) семейство $B(t)$ полунепрерывно сверху слева. Значит, и множество $W_c^*(t) \cap B(t)$ полунепрерывно сверху слева. Отсюда, используя теорему об альтернативе [1], можно получить, что множество $S[t_0, t]\{W_c^*(t) \cap B(t)\}$ тоже по t полунепрерывно сверху слева. Значит, из (1.8), учитывая, что $W_c^*(\theta) = W_c(\theta)$ и $W_c(t_0) = S[t_0, \theta]\{W_c(\theta)\}$, имеем

$$\begin{aligned} W_c^*(t_0) \cap B(t_0) \subset S[t_0, \theta]\{W_c^*(\theta) \cap B(\theta)\} \subset S[t_0, \theta]\{W_c^*(\theta)\} = \\ = W_c(t_0) \end{aligned} \tag{1.9}$$

Так как $z_0 \in W_c^*(t_0) \cap B(t_0)$, то из (1.9) следует (1.5).

Итак, осталось проверить утверждение (1.6). Для этого достаточно доказать равенство

$$T\{E\} = \bigcap_{s \in S} T\{E_s\} \tag{1.10}$$

(здесь $T = T[\tau_1, \tau_2]$; τ_1, τ_2 фиксированы и удовлетворяют предположениям утверждения (1.6); $E = W_c^*(\tau_2) \cap B(\tau_2)$ и $E_s = W_c^s(\tau_2) \cap B(\tau_2)$).

Действительно, так как функция $\varepsilon_s(t, z)$ — цена игры, а также программный максимин [1] для системы (1.1), (1.2) и платы $R_s(z)$, то

$$T\{W_c^s(\tau_2)\} = W_c^s(\tau_1), \quad \forall s \in S$$

а поэтому в силу свойства 2) семейства $B(t)$ имеем

$$T\{E_s\} \supset W_c^s(\tau_1) \cap B(\tau_1) \tag{1.11}$$

Используя (1.10) и (1.11), получаем (1.6)

$$T\{E\} = \bigcap_{s \in S} T\{E_s\} \supset \bigcap_{s \in S} W_c^s(\tau_1) \cap B(\tau_1) = W_c^*(\tau_1) \cap B(\tau_1)$$

Рассмотрим сначала случай, когда E — компакт. Представим множество E в виде пересечения опорных полупространств

$$E = \bigcap_{l \in \partial D} O_l, \quad O_l = \{z \in R^k : \langle l, z \rangle \leqslant \max_{q \in E} \langle l, q \rangle\}$$

где D — единичный шар в R^k. Докажем, что для всякого $l_* \in \partial D$ найдется элемент $s_* \in S$, такой, что

(1.12) $\quad O_{l_*} \supset E_{s_*}$

Пусть $z_* \in \partial E$ — такая точка, что гиперплоскость $\Pi(l_*) = \{z \in R^k : \langle l_*, z \rangle = \langle l_*, z_* \rangle\}$ является опорной для E. Так как $z_* \in \partial W_c^*(\tau_2) \bigcup \partial B(\tau_2)$, то возможны три случая.

1°. $z_* \in \partial B(\tau_2)$ и $z_* \notin \partial W_c^*(\tau_2)$. Тогда (1.12), очевидно, выполняется для любого $s_* \in S$.

2°. $z_* \notin \partial B(\tau_2)$ и $z_* \in \partial W_c^*(\tau_2)$. Так как $\varepsilon^*(\tau_2, z_*) = c$, то существует элемент $s_* \in S$, такой, что $\varepsilon_{s_*}(\tau_2, z_*) = c$. Покажем, что $z_* \in \partial W_c^{s_*}(\tau_2)$. Если бы $z_* \in \operatorname{int} W_c^{s_*}(\tau_2)$, то из выпуклости функции $\varepsilon_{s_*}(\tau_2, z)$ по $z \in B$ имели бы, что $c = \min\{\varepsilon_{s_*}(\tau_2, z) : z \in B(\tau_2)\}$. Так как $t_0 < \tau_2$, то $c \leqslant \inf\{\varepsilon_{s_*}(t_0, z) : z \in B(t_0)\}$ и, значит, $c \leqslant \inf\{\varepsilon^*(t_0, z) : z \in B(t_0)\}$, что противоречит неравенству $c > c_0 = \varepsilon^*(t_0, z_0)$. Итак, $z_* \in \partial W_c^{s_*}(\tau_2)$. Так как $z_* \notin \partial B(\tau_2)$, то гиперплоскость $\Pi(l_*)$ является опорной, а в силу условия 1.3 и единственной опорной для $W_c^*(\tau_2) \bigcap B$, проходящей через точку z_*. Всякая гиперплоскость, проходящая через точку z_* и опорная к множеству $W_c^{s_*}(\tau_2) \bigcap B$, будет опорной и для $W_c^*(\tau_2) \bigcap B$, так как $W_c^*(\tau_2) \subset W_c^{s_*}(\tau_2)$. Из этих двух замечаний следует, что гиперплоскость $\Pi(l_*)$ — опорная для $W_c^{s_*}(\tau_2) \bigcap B$, а значит, и для E_{s_*}. Следовательно, в случае 2° тоже имеет место (1.12).

3°. $z_* \in \partial W_c^*(\tau_2) \bigcap \partial B(\tau_2)$. Будем считать, что гиперплоскость $\Pi(l_*)$ не является опорной для $W_c^*(\tau_2) \bigcap B$, иначе можно применить рассуждение, подобное предыдущему. Возьмем $s_* \in S$, как в случае 2°. Если бы гиперплоскость $\Pi(l_*)$ не была опорной для множества $W_c^{s_*}(\tau_2) \bigcap \bigcap B(\tau_2)$, то нашлись бы точки $z_1 \in W_c^{s_*}(\tau_2) \bigcap B(\tau_2)$ и $z_2 \in W_c^{s_*}(\tau_2) \bigcap \bigcap (B \setminus B(\tau_2))$, лежащие вне полупространства O_{l_*}. Существование таких точек z_1, z_2, z_* противоречит выпуклости множества E_{s_*}.

Итак, во всех трех случаях имеет место утверждение (1.12). Из него следует, что

(1.13) $\quad \bigcap_{l \in \partial D} T\{O_l\} \supset \bigcap_{s \in S} T\{E_s\}$

Но для системы (1.1), (1.2) из теоремы Неймана о минимаксе можно получить, что

(1.14) $\quad T\{\bigcap_{l \in \partial D} O_l\} = \bigcap_{l \in \partial D} T\{O_l\}$

Из (1.13), (1.14) получаем $T\{E\} \supset \bigcap_{s \in S} T\{E_s\}$. Обратное включение очевидно. Значит, (1.10) доказано в случае, когда E — компакт.

Если множество E неограниченное, то сведем доказательство к предыдущему следующим образом.

Для доказательства (1.10) достаточно показать, что

$$rD \cap T\{E\} = \bigcap_{s\in S} [rD \cap T\{E_s\}], \quad \forall r > 0$$

Зафиксируем $r = r_0$. Тогда найдется достаточно большое число r_1, такое, что если множества E° и E_s° удовлетворяют соотношениям

$$r_1D \cap E = r_1D \cap E^\circ, \quad r_1D \cap E_s = r_1D \cap E_s^\circ, \quad \forall s \in S$$

то

$$r_0D \cap T\{E\} = r_0D \cap T\{E^\circ\}, \quad r_0D \cap T\{E_s\} = r_0D \cap$$
$$\cap\, T\{E_s^\circ\}, \quad \forall s \in S$$

Положим $E^\circ = E \cap r_1D$ и $E_s^\circ = E_s \cap r_1D$. Так как E° — компакт, то по доказанному ранее имеем

$$T\{E^\circ\} = \bigcap_{s\in S} T\{E_s^\circ\}$$

Это доказывает (1.10) и завершает доказательство теоремы.

Замечание. Пусть уравнение (1.2) линейное, а плата $R(z)$ есть эвклидово расстояние до выпуклого компакта в R^k. Тогда представление (1.3) имеет место с линейными $R_s^1(x)$ и $R_s^2(y)$, а функция $\varepsilon^*(t, z)$ совпадает с программным максимином. Условие 1.2 выполняется для $B = R^k$.

Если задача регулярна [1], то условие 1.3 выполняется. Нужно отметить, что в случае, когда $P(t)$ зависит от t непрерывно, из условия регулярности следует дифференцируемость функции $\varepsilon^*(t, z)$ не только по z, но и по t. Отсюда выводится, что $\varepsilon^* = \varepsilon$. Значит, условие 1.1 тоже выполняется. Если же $P(t)$ зависит от t измеримо, но разрывно, условие 1.1 может не выполняться и приходится его постулировать.

Пример. Рассмотрим видоизмененную задачу из [3]. Пусть система (1.1), (1.2) имеет вид

$$x_1^{\cdot} = x_2, \quad x_2^{\cdot} = u_1, \quad x_3^{\cdot} = x_4, \quad x_4^{\cdot} = u_2; \quad u(t) \in P(t)$$
$$y_1^{\cdot} = y_2, \quad y_2^{\cdot} = \lambda y_2^2 + v_1, \quad y_3^{\cdot} = y_4, \quad y_4^{\cdot} = v_2; \quad v(t) \in Q$$
$$Q = \{v = (v_1, v_2) : \|v\| \leqslant \nu\}, \quad P(t) = \{u = (u_1, u_2) : \|u\| \leqslant \mu(t)\}$$

где $\mu(t)$ — измеримая ограниченная положительная функция, число $\lambda > 0$ — малый параметр.

Пусть

$$R(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_3 - x_3)^2} + a_1(y_1 - x_1) + a_3(y_3 - x_3)$$

Здесь a_1, a_3 — числа. Игра рассматривается на отрезке времени $[0, \theta]$. Плату $R(x, y)$ можно представить в виде (1.3), т. е.

$$R(x, y) = \max_{s\in S} \{(s_1y_1 + s_3y_3) - (s_1x_1 + s_3x_3)\}$$
$$S = \{s = (s_1, s_3): \quad (s_1 - a_1)^2 + (s_3 - a_3)^2 \leqslant 1\}$$

Будем считать, что $a_1 > 1$ и $\mu(t) - \nu \geqslant \alpha > 0$ для всех t. Из [3] следует, что

$$\varepsilon_s(t, x, y; \lambda) = -k(t)\|s\| + s_1((y_1 - x_1) + (\theta - t)(y_2 - x_2)) +$$
$$+ s_3((y_3 - x_3) + (\theta - t)(y_4 - x_4)) + {}^1/_6\, \lambda s_1 (\theta - t)^2 \{3y_2^2 +$$
$$+ 2\nu y_2 (s_1 / \|s\| - s_3^2 / \|s\|^2)(\theta - t) - \nu^2 (\theta - t)^2 s_1 ({}^5/_2\, s_1 / \|s\|^2 +$$
$$+ s_3^2 / \|s\|^3)\} + \lambda^2 (\theta - t)^2 f(t, \lambda, s, y_2)$$

$$k(t) = \int_t^\theta (\theta - \tau)(\mu(\tau) - \nu)\, d\tau$$

Отметим, что функция $f(t, \lambda, s, y_2)$ положительно однородна по s, ее вторые производные по $s \in S$ и вторая производная по y_2 непрерывно зависят от t, λ, s, y_2 в области их изменения.

Возьмем компакт Γ в пространстве (t, x, y). Покажем, что при достаточно малом λ_* для всяких $\lambda_0 \leqslant \lambda_*$ и $(t_0, x_0, y_0) \in \Gamma$ будет $\varepsilon^* (t_0, x_0, y_0; \lambda_0) = \varepsilon (t_0, x_0, y_0; \lambda_0)$.

Так как круг S не содержит 0, то можно найти такой шар $B_* \subset R^k$ с центром в нуле и радиусом r_*, что для всяких $\lambda_0 \leqslant 1$ и $(t_0, x_0, y_0) \in \Gamma$ есть семейство $B_{(\lambda_0, t_0, x_0, y_0)} (t)$ со свойствами 1) — 3), которое содержится в B_*. (Индекс у $B(t)$ указывает, что семейство выбрано для начальной позиции (t_0, x_0, y_0) и параметра $\lambda = \lambda_0$).

Покажем, что существует $\lambda_* \leqslant 1$, такое, что функция $\varepsilon_s (t, x, y; \lambda)$ будет выпуклой по (x, y) и вогнутой по s, когда $t \in [0, \theta]$, $(x, y) \in B_*$, $s \in S$ и $\lambda \leqslant \lambda_*$.

Так как для каждого $s = (s_1, s_3) \in S$ $s_1 \geqslant \delta > 0$ (δ — некоторое число), то функция $^1/_2\, \lambda s_1 y_2{}^2 + \lambda^2 f (t, \lambda, s, y_2)$ будет выпуклой по y_2 на множестве $| y_2 | \leqslant r_*$ для всех $t \in [0, \theta]$, $s \in S$, если $\lambda \leqslant \lambda_1$ (λ_1 достаточно мало). Отсюда следует выпуклость по $(x, y) \in B_*$ функции $\varepsilon_s (t, x, y; \lambda)$.

Так как $k (t) \geqslant {}^1/_2 \alpha (\theta - t)^2$, то функция $\varepsilon_s (t, x, y; \lambda)$ будет вогнутой по $s \in S$, если $\lambda \leqslant \lambda_2$ (λ_2 достаточно мало). Положим $\lambda_* = \min (\lambda_1, \lambda_2)$.

Возьмем произвольные $\lambda_0 \leqslant \lambda_*$ и $(t_0, x_0, y_0) \in \Gamma$. Проверим, что выполняются условия 1.2 и 1.3. В качестве множества B возьмем шар B_*. Тогда условие 1.2 выполняется. Положим $\varepsilon^* (t_0, x_0, y_0; \lambda_0) = c_0$. Возьмем $\beta > 0$ так, чтобы $0 \notin (c_0, c_0 + \beta)$. Пусть $c \in (c_0, c_0 + \beta)$. Проверим, что для всякого $t \in [t_0, \theta]$ часть границы множества $W_c{}^* (t)$, которая находится в B_*, гладкая. Для этого достаточно показать, что для всяких $t \in [t_0, \theta]$, $(x, y) \in B_*$, для которых $\varepsilon^* (t, x, y; \lambda_0) = c$, максимум в равенстве $\varepsilon^* (t, x, y, \lambda_0) = \max \{\varepsilon_s (t, x, y; \lambda_0) : s \in S\}$ достигается на единственном s. А это следует из условия $\varepsilon^* (t, x, y; \lambda_0) = c \neq 0$, положительной однородности и вогнутости по $s \in S$ функции $\varepsilon_s (t, x, y; \lambda_0)$. Итак, для рассматриваемых λ_0 и (t_0, x_0, y_0) выполнены условия 1.1 — 1.3. Поэтому можно применить теорему 1.

Отметим, что если функция $\mu (t)$ непрерывна, то равенство $\varepsilon^* (t_0, x_0, y_0; \lambda_0) = \varepsilon (t_0, x_0, y_0; \lambda_0)$ можно доказать проще, используя метод из работы [3].

2. Рассмотрим дифференциальную игру с моментом окончания $t = \theta$. Движение системы задается линейным уравнением

$$(2.1) \qquad x^{\cdot} = u + v, \quad x \in R^n, \quad u (t) \in P (t), \quad v (t) \in Q (t)$$

Здесь x — фазовый вектор системы, компакты $P (t)$ и $Q (t)$ из R^n измеримо и ограниченно зависят от t. Пусть платой является непрерывная функция $\Gamma (x)$, представимая в виде

$$(2.2) \qquad \Gamma (x) = \min_{s \in S} \max_{l \in L} \gamma (x; s, l)$$

$$\gamma (x; s, l) = \langle a (s, l), x \rangle + b (s, l)$$

Здесь S, L — выпуклые компакты; функция $\gamma (x; s, l)$ — выпуклая по $s \in S$, вогнутая по $l \in L$ и аффинная по x, $a (s, l)$ — непрерывная функция со значениями в R^n, а скалярная функция $b (s, l)$ полунепрерывна снизу по s и сверху по l.

Представление (2.2) возможно, например, в следующих случаях:

а) $\Gamma (x) = \min \{\Lambda_1 (x), \ldots, \Lambda_k (x), \varphi (x)\}$

Здесь $\Lambda_i (x)$ — линейные функции, а $\varphi (x)$ — выпуклая функция, такая, что $\operatorname{dom} \varphi^*$ (см. [4]) является компактом

б) $\Gamma (x) = \varphi_1 (x) - \varphi_2 (x)$

Здесь выпуклые функции $\varphi_i (x)$ таковы, что множества $\operatorname{dom} \varphi_i{}^*$ — компакты.

Введем обозначения

$$\varkappa (t, x; s, l) = \langle a (s, l), x \rangle + \int_t^\theta \min_{u \in P (\tau)} \langle a (s, l), u \rangle \, d\tau +$$

$$+\int_t^\theta \max_{v\in Q(\tau)} \langle a(s,l),v\rangle\, d\tau + b(s,l)$$

$$\varepsilon_{00}(t,x) = \max_{l\in L}\min_{s\in S} \varkappa(t,x;s,l),\ \varepsilon^{\infty}(t,x) = \min_{s\in S}\max_{l\in L} \varkappa(t,x;s,l)$$

Через $\varepsilon(t, x)$ обозначим функцию цены.

Пусть выполняется следующее условие.

Условие 2.1. Для всякой позиции (t, x) функция $\varkappa(t, x; s, l)$ выпукла по s и вогнута по l на множестве $S \times L$.

Теорема 2. Если выполнено условие 2.1, то для всех позиций

$$\varepsilon_{00}(t,x) = \varepsilon(t,x) = \varepsilon^{\infty}(t,x)$$

Доказательство. Заметим сначала, что в силу одного обобщения теоремы Неймана о минимаксе [5] равенство (2.2) можно переписать в виде

$$\Gamma(x) = \max_{l\in L}\min_{s\in S}\gamma(x;s,l) \tag{2.3}$$

Докажем, что имеет место неравенство

$$\varepsilon_{00}(t,x) \leqslant \varepsilon(t,x) \tag{2.4}$$

Для каждого $l \in L$ введем непрерывную функцию от x

$$\gamma_l(x) = \min_{s\in S}\gamma(x;s,l)$$

Пусть $\varepsilon(t, x \mid \gamma_l(\cdot))$ — функция цены игры, соответствующей системе (2.1) и плате $\gamma_l(x(\theta))$. Покажем, что

$$\varepsilon(t,x\mid\gamma_l(\cdot)) = \min_{s\in S}\varkappa(t,x;s,l) \tag{2.5}$$

Применим метод из [2]. Для произвольных моментов времени $t_1 < t_2 \leqslant \theta$ и функции $\varphi(x)$ обозначим через $\varepsilon^\circ(t_1, x_* \mid t_2, \varphi(\cdot))$ программный минимакс для позиции (t_1, x_*) в игре с системой (2.1) и платой $\varphi(x(t_2))$. Он определяется формулой

$$\varepsilon^\circ(t_1,x_*\mid t_2,\varphi(\cdot)) = \inf_{u(\cdot)\in U}\ \sup_{v(\cdot)\in V}\varphi(x[t_2;t_1,x_*,u,v])$$

Здесь U — множество программных управлений первого игрока на $[t_1, t_2]$, т. е. измеримых функций $u(\cdot)$, почти всюду на $[t_1, t_2]$ удовлетворяющих ограничению $u(t) \in P(t)$. Множество V имеет аналогичный смысл. Через $x[t_2; t_1, x_*, u, v]$ обозначена фазовая точка системы в момент t_2 при начальной позиции (t_1, x_*) и выбранных управлениях $u(\cdot)$, $v(\cdot)$.

Можно проверить, что

$$\varepsilon^\circ(t,x\mid\theta,\gamma_l(\cdot)) = \min_{s\in S}\varkappa(t,x;s,l) \tag{2.6}$$

Покажем, что для всяких $t_1 < t_2 < \theta$ и $x_* \in R^n$

$$\varepsilon^\circ(t_1,x_*\mid t_2,\varepsilon^\circ(t_2,\cdot\mid\theta,\gamma_l(\cdot))) = \varepsilon^\circ(t_1,x_*\mid\theta,\gamma_l(\cdot)) \tag{2.7}$$

Действительно, используя (2.6) и выпуклость по s функции $\varkappa(t, x; s, l)$, получаем

$$\varepsilon^\circ(t_1,x_*\mid t_2,\varepsilon^\circ(t_2,\cdot\mid\theta,\gamma_l(\cdot))) = \inf_{u(\cdot)\in U}\ \sup_{v(\cdot)\in V}\ \min_{s\in S}\varkappa(t_2,x[t_2;t_1,$$
$$x_*,u,v];s,l) = \inf_{s\in S}\ \inf_{u(\cdot)\in U}\ \sup_{v(\cdot)\in V}\varkappa(t_2,x[t_2;t_1,x_*,u,v];s,l) =$$
$$= \min_{s\in S}\varkappa(t_1,x_*;s,l) = \varepsilon^\circ(t_1,x_*\mid\theta,\gamma_l(\cdot))$$

Равенство (2.7) доказано. Из него в силу структуры дифференциальных игр [1, 2] имеем $\varepsilon(t, x \mid \gamma_l(\cdot)) = \varepsilon^\circ(t, x \mid \theta, \gamma_l(\cdot))$, и, значит, из (2.6) следует (2.5).

Из (2.3) имеем, что $\gamma_l(\cdot) \leqslant \Gamma(\cdot)$ для каждого $l \in L$, поэтому $\varepsilon(t, x \mid \gamma_l(\cdot)) \leqslant \varepsilon(t, x \mid \Gamma(\cdot))$. Отсюда и из равенства (2.5) следует (2.4). Из вогнутости функции $\varkappa(t, x; s, l)$ по l, используя программный максимин и равенство (2.2), аналогично получаем

$$\varepsilon(t, x) \leqslant \varepsilon^{\circ\circ}(t, x) \tag{2.8}$$

Из уже упоминавшейся теоремы о минимаксе имеем $\varepsilon_{00}(t, x) = \varepsilon^{\circ\circ}(t, x)$, поэтому из (2.4) и (2.8) следует утверждение теоремы.

Пример. Пусть система (2.1) имеет вид

$$\begin{aligned} x_1^\cdot &= u_1 + v_1, & u(t) &\in P(t) = \{u = (u_1, u_2) : \|u\| \leqslant 2(1 - t)\} \\ x_2^\cdot &= u_2 + v_2, & v(t) &\in Q = \{v = (v_1, v_2) : \|v\| \leqslant 1\} \end{aligned}$$

Игра происходит на отрезке времени [0, 1]. Плата $\Gamma(x) = \min\{\langle c, x\rangle, \varphi(x)\}$, где c — ненулевой вектор из R^2, а выпуклая функция $\varphi(x)$ определяется своей сопряженной [4]

$$\varphi^*(l) = \begin{cases} \|l\|^2, & l \in L \\ +\infty, & l \notin L \end{cases}$$

Здесь L — круг в R^2 с центром в точке d и радиусом единица. Считаем, что L не пересекается с лучом, направленным в сторону вектора — c.

Представим функцию $\Gamma(x)$ в виде (2.2)

$$\Gamma(x) = \min_{s \in S} \max_{l \in L} \{\langle s_1 c + s_2 l, x\rangle - s_2 \|l\|^2\}$$

$$S = \{s = (s_1, s_2) : \quad s_1 + s_2 = 1; \quad s_1, s_2 \geqslant 0\}$$

т. е. в этом примере $a(s, l) = s_1 c + s_2 l$ и $b(s, l) = -s_2 \|l\|^2$.

Для всяких $t \in [0, 1]$ и $r \in R^2$

$$\int_t^1 \min_{u \in P(\tau)} \langle r, u\rangle d\tau + \int_t^1 \max_{v \in Q} \langle r, v\rangle d\tau = k(t)\|r\|$$

где $k(t)$ — неотрицательная функция. Значит

$$\varkappa(t, x; s, l) = \langle s_1 c + s_2 l, x\rangle + k(t)\|s_1 c + s_2 l\| - s_2 \|l\|^2$$

Для всякого $l \in L$ функция $\varkappa(t, x; s, l)$ выпукла по $s \in S$. Если норма вектора d достаточно велика, то $\varkappa(t, x; s, l)$ вогнута по $l \in L$. Следовательно, выполняется условие 2.1.

Автор благодарит Н. Н. Красовского и В. С. Пацко за обсуждение работы и ценные советы.

Поступила 31 I 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры, М., «Наука», 1974.
2. *Пшеничный Б. Н.* Структура дифференциальных игр. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 2.
3. *Альбрехт Э. Г.* О сближении квазилинейных объектов. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
4. *Рокафеллар Р. Т.* Выпуклый анализ. М., «Мир», 1973.
5. Бесконечные антагонистические игры. М., «Физматгиз», 1963.