5. *Кузьмина Л. К.* К вопросу устойчивости гироскопических стабилизаторов. Тр. Казанск. авиац. ин-та. Сер. матем., механ., 1970, вып. 119.
6. *Кузьмина Л. К.* К вопросу устойчивости систем гироскопической стабилизации. ПММ, 1972, т. 36, вып. 4.
7. *Лефшец С.* Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
8. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. М., Гостехиздат, 1956.

УДК 62—50

О НЕПРЕРЫВНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОГО КОНСТРУИРОВАНИЯ РЕГУЛЯТОРА ПО СИНГУЛЯРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ

В. Я. Глизер, М. Г. Дмитриев

(Красноярск)

Рассматривается линейная задача оптимального управления с квадратичным критерием качества, дифференциальные связи которой содержат малый параметр при части производных. Показано, что решение этой задачи при стремлении малого параметра к нулю стремится к решению некоторой задачи оптимального управления того же класса, внеинтегральный член функционала которой конструируется специальным образом и не связан с подстановкой корня «вырожденной» системы в функционал.

При точном описании объектов управления часто приходим к математическим моделям высокого порядка. Пренебрегая некоторыми малыми константами (постоянные времени, массы, моменты инерции и т. п.), получаем уравнения моделей более низкого порядка. Возникает вопрос о корректности такого пренебрежения в смысле близости решения возмущенной и невозмущенной задач.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: требуется найти непрерывную r-мерную вектор-функцию $u\,(t)$, доставляющую минимум функционалу

$$I\,(u)=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix}x\,(T)\\ z\,(T)\end{Vmatrix}'\begin{Vmatrix}F_1 & F_2\\ F_2' & F_3\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}x\,(T)\\ z\,(T)\end{Vmatrix}+\frac{1}{2}\int\limits_0^T(x'D\,(t)\,x+u'R\,(t)\,u)\,dt \tag{1}$$

на траекториях системы

$$\begin{aligned} &x^{\boldsymbol\cdot}=A_1\,(t)x+A_2\,(t)z+B_1\,(t)u, \quad x\,(0)=x_0, \quad x\in E^n\\ &\lambda z^{\boldsymbol\cdot}=A_3\,(t)x+A_4\,(t)z+B_2\,(t)u, \quad z\,(0)=z_0, \quad z\in E^m \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\lambda>0$ — малый параметр, $T>0$ — фиксированное число, штрих означает транспонирование, все матрицы дважды непрерывно дифференцируемы на $[0,\ T]$, $R\,(t)$ — положительно-определенная, $D\,(t)$ — положительно-полуопределенная матрицы на $[0,\ T]$, F — постоянная, положительно-определенная матрица.

Система в (2) является сингулярно возмущенной [1]. Имеется обширная литература по исследованию сингулярных возмущений в задачах оптимального управления, среди которых упомянем работы [2–6], близкие к теме данной статьи. В большинстве работ, исследующих сингулярные возмущения в задачах оптимального управления, предельная задача получается из исходной при нулевом значении параметра возмущения. Ниже устанавливается, что предельная задача для (1), (2) не получается из нее при $\lambda=0$, а конструируется специальным образом.

Обозначим через $x\,(t,\lambda)$, $z\,(t,\lambda)$ оптимальные траектории, $u\,(t,\lambda)$ — оптимальное управление и I_λ — минимальное значение функционала в задаче (1), (2).

Теорема. Пусть

1) $\operatorname{rank}\,[B_2\,(T),\ A_4\,(T)B_2\,(T),\ \ldots,\ A_4^{m-1}\,(T)B_2\,(T)]=m;$

2) действительные части собственных значений матрицы $A_4(t)$ отрицательны для $t \in [0, T]$.

Тогда при $\lambda \to 0$ имеем

$x(t,\lambda) \to \bar{x}(t)$ равномерно по $t \in [0, T_1] \subset [0, T]$;

$z(t,\lambda) \to \bar{z}(t)$ равномерно по $t \in [T_0\ T_1] \subset [0, T]$;

$u(t,\lambda) \to \bar{u}(t)$ равномерно по $t \in [0, T_1] \subset [0, T]$; $I_\lambda \to I$

Здесь $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$, I — оптимальная траектория, оптимальное управление и минимальное значение функционала соответственно в следующей задаче оптимального управления:

$$\bar{x}^\cdot = (A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t))\bar{x} + (B_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)B_2(t))\bar{u}, \quad \bar{x}(0) = x_0 \tag{3}$$

$$I(\bar{u}) = \frac{1}{2}\bar{x}'(T)(F_1 - F_2F_3^{-1}F_2')\bar{x}(T) + \frac{1}{2}\int_0^T (\bar{x}'D(t)\bar{x} + \bar{u}'R(t)\bar{u})\,dt \tag{4}$$

$$\bar{z}(t) = -A_4^{-1}(t)[A_3(t)\bar{x}(t) + B_2(t)\bar{u}(t)]$$

Доказательство. Известно [7], что оптимальное управление в задаче (1), (2) имеет вид

$$u(t,\lambda) = -R^{-1}\left\|\begin{matrix} B_1 \\ \dfrac{1}{\lambda}B_2 \end{matrix}\right\|' \cdot \left\|\begin{matrix} K_1(t,\lambda) & \lambda K_2(t,\lambda) \\ \lambda K_2'(t,\lambda) & \lambda K_3(t,\lambda)\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} x(t,\lambda) \\ z(t,\lambda)\end{matrix}\right\|$$

где блоки $K_i(t,\lambda)$, $i = 1, 2, 3$ — решения следующей задачи Коши (см. [2,3,5,6]):

$$dK_1/dt = -K_1A_1 - A_1'K_1 - K_2A_3 - A_3'K_2' + K_1S_1K_1 + K_1S_2K_2' + K_2S_2'K_1 + K_2S_3K_2' - D, \quad K_1(T) = F_1$$

$$\lambda\frac{dK_2}{dt} = -K_1A_2 - K_2A_4 - \lambda A_1'K_2 - A_3'K_3 + \lambda K_1S_1K_2 + K_1S_2K_3 + \lambda K_2S_2'K_2 + K_2S_3K_3, \quad K_2(T) = \frac{1}{\lambda}F_2$$

$$\lambda\frac{dK_3}{dt} = -\lambda K_2'A_2 - \lambda A_2'K_2 - K_3A_4 - A_4'K_3 + \lambda^2K_2'S_1K_2 + \lambda K_2'S_2K_3 + \lambda K_3S_2'K_2 + K_3S_3K_3, \quad K_3(T) = \frac{1}{\lambda}F_3$$

$$(S_1 = B_1R^{-1}B_1', \quad S_2 = B_1R^{-1}B_2', \quad S_3 = B_2R^{-1}B_2')$$

Аналогично для задачи (3), (4) имеем

$$\bar{u}(t) = -R^{-1}\bar{B}'\bar{K}(t)\bar{x}(t)$$

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = -\bar{K}\bar{A} - \bar{A}'\bar{K} + \bar{K}\bar{S}\bar{K} - D, \quad \bar{K}(T) = F_1 - F_2F_3^{-1}F_2'$$

$$(\bar{B} = B_1 - A_2A_4^{-1}B_2, \quad \bar{A} = A_1 - A_2A_4^{-1}A_3, \quad \bar{S} = \bar{B}R^{-1}\bar{B}')$$

Рассуждая, как и в [6], с учетом условия 2 теоремы можно показать, что при $\lambda \to 0$ имеют место следующие предельные переходы:

$$\begin{aligned} &K_1(t,\lambda) \to \bar{K}_1(t) \equiv \bar{K}(t) \\ &K_2(t,\lambda) \to \bar{K}_2(t) \equiv -\bar{K}(t)A_2(t)A_4^{-1}(t) \\ &K_3(t,\lambda) \to \bar{K}_3(t) \equiv 0 \end{aligned} \tag{5}$$

равномерно по $t \in [0, T_1] \subset [0, T]$. Для этого достаточно установить, что

$$\det\left\{\int_{-\infty}^0 \exp(-A_4(T)s)\,S_3(T)\exp(-A_4'(T)s)\,ds\right\} \neq 0 \tag{6}$$

Неравенство (6) следует из условия 1 теоремы. Действительно, условие 1 эквивалентно [8] условию

$$\operatorname{rank}[B_2(T),\ -A_4(T)B_2(T), \ldots, (-A_4(T))^{m-1}B_2(T)] = m$$

а последнее — критерий полной управляемости [8] автономной системы

$$\frac{dy}{dt} = -A_4(T)\,y + B_2(T)\,v \tag{7}$$

Другим критерием полной управляемости системы (7) служит условие

$$\det\left\{\int_0^\alpha \exp(A_4(T)\,s)\,B_2(T)\,B_2'(T)\exp(A_4'(T)\,s)\,ds\right\} \neq 0 \tag{8}$$

где α — некоторое положительное число. В силу положительной определенности $R\ (T)$ из (8) следует, что

$$\det\left\{\int_0^\alpha \exp(A_4(T)\,s)\,S_3(T)\exp(A_4'(T)\,s)\,ds\right\} \neq 0$$

Далее

$$\int_{-\infty}^{0} \exp(-A_4(T)\,s)\,S_3(T)\exp(-A_4'(T)\,s)\,ds =$$

$$= \int_0^\alpha \exp(A_4(T)\,s)\,S_3(T)\exp(A_4'(T)\,s)\,ds +$$

$$+ \int_\alpha^\infty \exp(A_4(T)\,s)\,S_3(T)\exp(A_4'(T)\,s)\,ds$$

Теперь из неравенства Минковского для определителя суммы положительно-определенных матриц [9] вытекает справедливость неравенства (6).

Оптимальные траектории $x\ (t,\ \lambda)$, $z\ (t,\ \lambda)$ — решения задачи

$$x^{\cdot} = (A_1 - S_1K_1 - S_2K_2')x + (A_2 - \lambda S_1K_2 - S_2K_3)z, \quad x\ (0) = x_0$$
$$\lambda z^{\cdot} = (A_3 - S_2'K_1 - S_3K_2')x + (A_4 - \lambda S_2'K_2 - S_3K_3)z, \quad z\ (0) = z_0$$

Из теоремы А. Н. Тихонова [1] с учетом (5) получаем, что при $\lambda \to 0$ будет $x\ (t,\ \lambda) \to \bar{x}_0\ (t)$ равномерно по $t \in [0,\ T_1] \subset [0,\ T]$, $z\ (t,\ \lambda) \to \bar{z}_0\ (t)$ равномерно по $t \in [T_0,\ T_1] \subset [0,\ T]$, где

$$\bar{x}_0^{\cdot} = (A_1 - S_1\bar{K}_1 - S_2\bar{K}_2')\bar{x}_0 + A_2\bar{z}_0, \quad \bar{x}_0\ (0) = x_0$$
$$0 = (A_3 - S_2'\bar{K}_1 - S_3\bar{K}_2')\bar{x}_0 + A_4\bar{z}_0$$

Исключая $\bar{z}_0$ из этой системы с учетом выражений для $\bar{K}_1$ и $\bar{K}_2$, получаем, что

$$\bar{x}_0^{\cdot} = (\bar{A} - \bar{S}\bar{K})\bar{x}_0, \quad \bar{x}_0\ (0) = x_0$$

т. е. $\bar{x}_0\ (t) \equiv \bar{x}\ (t)$.

Итак, первое утверждение теоремы установлено.

Имеем

$$\bar{z}_0 = -A_4^{-1}\,(A_3 - S_2'\bar{K} + S_3\,(A_4')^{-1}A_2'\bar{K})\bar{x} = -A_4^{-1}\,[A_3\bar{x} -$$
$$- B_2R^{-1}\,(B_1' - B_2'\,(A_4')^{-1}A_2')\bar{K}\bar{x}] = -A_4^{-1}\,(A_3\bar{x} + B_2\bar{u}) = \bar{z}$$

т. е. и второе утверждение теоремы доказано.

Третье утверждение теоремы непосредственно следует из первых двух и вида оптимальных управлений $u\ (t,\ \lambda)$, $\bar{u}\ (t)$.

Известно [8], что

$$I_\lambda = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_0 \\ z_0 \end{matrix}\right\|'\left\|\begin{matrix} K_1(0,\lambda) & \lambda K_2(0,\lambda) \\ \lambda K_2'(0,\lambda) & \lambda K_3(0,\lambda) \end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix} x_0 \\ z_0 \end{matrix}\right\|, \quad I = \frac{1}{2}\,x_0'\bar{K}(0)\,x_0$$

Отсюда и следует справедливость последнего утверждения теоремы.

Замечания. 1°. Подобные результаты можно установить и для более общего квадратичного функционала (1), используя рассуждения работ [2–4,6] и изменяя соответственно условия теоремы.

2°. В случае $F_2 = 0$, $F_3 \neq 0$ предельная задача будет получена подстановкой корня $\bar{z}$ в систему и $\bar{z}(T) = 0$ в функционал. Если же F_2, F_3 — нулевые матрицы, то предельная задача будет получена при $\lambda = 0$ из исходной, как и в [2,4].

Поступила 9 VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., «Наука», 1973.
2. *Kokotovic P. V., Yackel R. A.* Singular perturbations of linear regulators: Basic theorems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1972, vol. 17, No. 1.
3. *Yackel R. A., Kokotovic P. V.* A boundary layer method for the matrix Riccati equation. IEEE Trans. Automat. Contr., 1973, vol. 18, No. 1.
4. *O'Malley R. E., Kung C. F.* The singularly perturbed linear state regulator problem. II. SJAM J. Control, 1975, vol. 13, No 2.
5. *Глизер В. Я., Дмитриев М. Г.* Сингулярные возмущения в линейной задаче управления с квадратичным функционалом. Дифференциальные уравнения, 1975, т. 11, вып. 11.
6. *Глизер В. Я., Дмитриев М. Г.* Сингулярные возмущения в линейной задаче оптимального управления с квадратичным функционалом. Докл. АН СССР, 1975, т. 225, № 5.
7. *Kalman R. E.* Contributions to the theory of optimal control. Bol. Soc. mat. mexicana, 1960, vol. 5, No. 1.
8. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М., «Наука», 1972.
9. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М., «Наука», 1969.

Технический редактор *З. В. Филиппова*

Сдано в набор 25/III-1977 г. Т-07766 Подписано к печати 18/V-1977 Тираж 2885 экз.
Зак. 2013 Формат бумаги 70×108 1/16 Усл. печ. л. 16,8 Бум. л. 6 Уч.-изд. л. 16,3

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10