УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ

Л. К. Кузьмина

(Казань)

Рассматривается задача о неасимптотической устойчивости нулевого решения некоторых систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных. Получены условия, при которых устойчивость нулевого решения вырожденной (по малому параметру) системы влечет за собой и устойчивость нулевого решения исходной системы. В качестве приложения рассмотрен вопрос об устойчивости систем гироскопической стабилизации с большими собственными кинетическими моментами гироскопов.

1. Пусть движение некоторой системы описывается дифференциальными уравнениями

$$dz_k / dt = Z_k(t, \mu, z_j, x_i) \quad (k = 1, \ldots, m)$$
$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(\mu) x_j + X_k(t, \mu, z_j, x_i) \quad (k = 1, \ldots, \xi) \tag{1.1}$$
$$\mu \frac{dx_k}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(\mu) x_j + X_k(t, \mu, z_j, x_i) \quad (k = \xi + 1, \ldots, r)$$
$$\mu^2 \frac{dx_k}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(\mu) x_j + X_k(t, \mu, z_j, x_i) \quad (k = r + 1, \ldots, n)$$

Здесь μ — малый параметр; $p_{kj}(\mu)$ — непрерывные функции μ; Z_k, X_k — голоморфные по совокупности переменных z_j, x_i ($j = 1, \ldots, m$; $i = 1, \ldots, n$) функции, не содержащие в своих разложениях членов ниже второй степени, коэффициенты в которых — непрерывные ограниченные функции t, μ. Причем

$$Z_k(t, \mu, z_j, 0) = 0 \ (k = 1, \ldots, m), \quad X_k(t, \mu, z_j, 0) = 0 \ (k = 1, \ldots, n)$$

Полагаем, что эти свойства имеют место в некоторой области.

Нулевое решение системы (1.1) устойчиво (неасимптотически) по теореме Ляпунова [1]; если все корни уравнения

$$\Delta(\lambda) = \left| \begin{array}{l} \| \delta_{kj}\lambda - p_{kj}(\mu) \| \\ \cdots\cdots\cdots \\ \| \mu\delta_{kj}\lambda - p_{kj}(\mu) \| \\ \cdots\cdots\cdots \\ \| \mu^2\delta_{kj}\lambda - p_{kj}(\mu) \| \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \\ \vdots \\ \xi \\ \vdots \\ r \\ \vdots \\ n \end{array} = 0 \tag{1.2}$$

имеют отрицательные действительные части, т. е. если уравнение (1.2) удовлетворяет условиям Гурвица.

Вырожденная система для уравнений (1.1) имеет вид

$$dz_k / dt = Z_k(t, 0, z_j, x_i) \quad (k = 1, \ldots, m)$$
$$dx_k/dt = \sum_{j=1}^{n} p_{kj} x_j + X_k(t, 0, z_j, x_i) \quad (k = 1, \ldots, \xi) \tag{1.3}$$
$$0 = \sum_{j=1}^{n} p_{kj} x_j + X_k(t, 0, z_j, x_i) \quad (k = \xi + 1, \ldots, n)$$
$$p_{kj} = p_{kj} \quad (\mu = 0)$$

Характеристическое уравнение системы первого приближения для (1.3) имеет m нулевых корней, остальные ξ его корней определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} \| \delta_{kj}\lambda - p_{kj} \| \\ \ldots\ldots \\ \| p_{kj} \| \end{vmatrix}_{1}^{\xi \ \ n} = 0 \tag{1.4}$$

Рассмотрим, при каких условиях из устойчивости нулевого решения вырожденной системы (1.3) следует устойчивость нулевого решения исходной системы (1.1). Для случая асимптотической устойчивости подобная задача рассматривалась в [2-4]. Имеет место

Теорема. Если, кроме m нулевых корней, все остальные корни характеристического уравнения вырожденной системы (1.3) имеют отрицательные действительные части и уравнения

$$\begin{vmatrix} \| \delta_{kj}\alpha - p_{kj} \| \\ \ldots\ldots \\ \| p_{kj} \| \end{vmatrix}_{\xi+1}^{r \ \ n} = 0 \tag{1.5}$$

$$\begin{vmatrix} \| \delta_{kj}\beta - p_{kj} \| \end{vmatrix}_{r+1}^{n} = 0 \tag{1.6}$$

удовлетворяют условиям Гурвица и среди корней уравнения (1.5) нет кратных, то нулевое решение вырожденной системы (1.3) устойчиво и при достаточно малых значениях параметра μ устойчиво и нулевое решение системы (1.1).

Система (1.3) допускает m независимых голоморфных интегралов Ляпунова

$$z_k + \varphi_k (z_1, \ldots, z_m, x_1, \ldots, x_\xi, t) = A_k \quad (k = 1, \ldots, m) \tag{1.7}$$

где φ_k — голоморфная по совокупности переменных $z_j, x_1, \ldots, x_\xi$ функция, не содержащая в своем разложении членов ниже второй степени, обращающаяся в нуль при $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_\xi = 0$, коэффициенты которой — ограниченные функции t.

Доказательство. Рассмотрим вырожденную систему (1.3). По теореме о неявных функциях система из $(n - \xi)$ алгебраических уравнений

$$0 = \sum_{j=1}^{n} p_{kj}x_j + X_k(t, 0, z_j, x_i) = f_k(t, z_j, x_i) \quad (k = \xi + 1, \ldots, n) \tag{1.8}$$

допускает единственное решение

$$x_s = x_s (t, z_j, x_1, \ldots, x_\xi) \quad (s = \xi + 1, \ldots, n) \tag{1.9}$$

в виде голомофных функций переменных $x_1, x_2, \ldots, x_\xi$, обращающихся в нуль при $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_\xi = 0$, коэффициенты в которых — непрерывные ограниченные функции времени и критических переменных z_j, если якобиан $| df_k / dx_j |_{k, j=\xi+1, \ldots, n}$ отличен от нуля при $x_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Для системы (1.8) этот якобиан равен $| p_{kj} |_{\xi+1}^{n}$ и при условиях теоремы отличен от нуля.

Подставляя решение (1.9) в первые $(m + \xi)$ уравнений системы (1.3), перепишем ее в виде

$$dz_k / dt = Z_k' (t, z_j, x_1, \ldots, x_\xi) \quad (k = 1, \ldots, m) \tag{1.10}$$

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{j=1}^{\xi} p_{kj}'x_j + X_k' (t, z_j, x_1, \ldots, x_\xi) \quad (k = 1, \ldots, \xi)$$

По способу образования функции Z_k', X_k' обращаются в нуль при $x_1 = 0, \ldots, x_\xi = 0$. Система (1.10) относится к типу систем А. М. Ляпунова [1]. Используя теорему Ляпунова, получаем, что при рассматриваемых условиях ее нулевое решение устойчиво и существуют интегралы вида (1.7).

Рассмотрим уравнение (1.2). Покажем, что при условиях теоремы корни этого уравнения при $\mu \to 0$ разделяются: ξ корней при $\mu \to 0$ стремятся к значениям корней уравнения (1.4) и в пределе равны им; остальные $(n - \xi)$ корней при $\mu \to 0$ стремятся в ∞. Причем $(r - \xi)$ корней второй группы можно представить в виде $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) / \mu$, где $\alpha(\mu) \to \alpha_0$ при $\mu \to 0$ (α_0 — корень уравнения (1.5)); а $(n - r)$ остальных корней — в виде $\lambda(\mu) = \beta(\mu) / \mu^2$, где $\beta(\mu) \to \beta_0$ при $\mu \to 0$ (β_0 — корень уравнения (1.6)).

Введем в уравнение (1.2) новую переменную $\rho = 1 / \lambda$, предварительно умножив уравнение на ρ^n. В полученном уравнении $d(\rho, \mu) = 0$ корни $\rho = \rho(\mu)$ — непрерывные функции параметра μ при $| p_{kj}(\mu) |^n_1 \neq 0$. По теореме о корнях алгебраического уравнения получаем, что при $\mu \to 0$ ξ корней ρ стремятся к значениям корней вырожденного уравнения $d(\rho, 0) = 0$, а остальные стремятся к нулю. Возвращаясь к переменной λ, получаем первую часть сформулированного утверждения.

Положим в (1.2) $\mu\lambda = \alpha$, предварительно умножив уравнение на μ^ξ. Запишем полученное уравнение $d_1(\alpha, \mu) = 0$ в виде

$$d_1(\alpha, \mu) = F(\alpha) + \mu F_1(\alpha, \mu) = 0 \tag{1.11}$$

$$F(\alpha) = \alpha^\xi \left| \begin{matrix} \| \delta_{kj}\alpha - p_{kj} \| \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \| -p_{kj} \| \end{matrix} \right| \begin{matrix} \xi + 1 \\ \vdots \\ r \\ \vdots \\ n \end{matrix}$$

Обозначим $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0$, где α — корень уравнения (1.11), α_0 — отличный от нуля корень уравнения $F(\alpha) = 0$, т. е. корень уравнения (1.5).

Разлагая (1.11) в ряд в окрестности α_0, получаем уравнение, которое при $dF(\alpha_0) / d\alpha \neq 0$ определяет по теореме о неявной функции единственную голоморфную функцию $\Delta\alpha = \Delta\alpha(\mu)$ при малом μ, обращающуюся в нуль при $\mu = 0$. Следовательно, при достаточно малом μ соответствующие корни $\alpha(\mu)$ близки к значениям α_0 и при $\mu \to 0$ $\alpha(\mu) \to \alpha_0$.

Положим $\mu^2\lambda = \beta$, предварительно умножая уравнение (1.2) на $\mu^{r+\xi}$. Из теоремы о непрерывной зависимости корней алгебраического уравнения от его коэффициентов следует, что $(n - r)$ корней полученного уравнения $d_2(\beta, \mu) = 0$ $\beta(\mu) \to \beta_0$ при $\mu \to 0$. Доказана вторая часть утверждения.

Таким образом, при достаточно малых значениях параметра μ вещественные части всех корней уравнения (1.2) будут отрицательны, если уравнения (1.4)—(1.6) удовлетворяют условиям Гурвица. Тогда нулевое решение системы (1.1) устойчиво по теореме А. М. Ляпунова. Теорема доказана.

2. В качестве приложения рассмотрим задачу об устойчивости установившегося движения системы гироскопической стабилизации. Имеет место критический случай по А. М. Ляпунову.

Для модели системы гироскопической стабилизации, принятой в [5, 6], дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид (в обозначениях этих работ)

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}q_j^{\cdot} + \sum_{j=1}^{n}(b_{kj}^{\circ} + g_{kj}^{\circ})\, q_j^{\cdot} = Q_k' + Q_k'' \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=n+1}^{n+u} L_{kj}q_j^{\cdot} + \sum_{j=m+1}^{s} B_{kj}^{\circ}q_j^{\cdot} + \sum_{j=n+1}^{n+u} R_{kj}^{\circ}q_j^{\cdot} = Q_k' + Q_k''$$

$$(k = n + 1, \ldots, n + u)$$

$$dq_k / dt = q_k^{\cdot} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

Первые n уравнений соответствуют механическим обобщенным координатам, следующие u уравнений — электрическим обобщенным координатам; $q_j^{\cdot}$ $(j = n + 1, \ldots$

$\ldots, n+u$) — контурные токи

$$Q_k' = 0 \quad (k = 1, \ldots, m;\ n+\mu+1, \ldots, n+u),$$

$$Q_k' = \sum_{j=n+1}^{n+u} A_{kj}^{\circ} q_j^{\cdot} \quad (k = m+1, \ldots, s)$$

$$Q_k' = -\sum_{j=s+1}^{n} c_{kj} q_j \quad (k = s+1, \ldots, n),$$

$$Q_k' = -\sum_{j=1}^{l} \omega_{kj}^{\circ} q_j \quad (k = n+1, \ldots, n+l)$$

$$Q_k' = -\sum_{j=n+1}^{n+u} \Omega_{kj}^{\circ} q_j^{\cdot} \quad (k = n+l+1, \ldots, n+\mu)$$

Q_k'' — голоморфные по совокупности переменных q_i, $q_i^{\cdot}$ $(i = 1, \ldots, n)$, $q_j^{\cdot}$ $(j = n+1, \ldots, n+u)$ — функции, разложение которых не содержит членов ниже второй степени. Все Q_k'' обращаются в нуль при $q_j^{\cdot} = 0$ $(j = 1, \ldots, n+u)$, $q_i = 0$ $(i = 1, \ldots, l, s+1, \ldots, n)$ и произвольных $q_{l+1}, \ldots, q_s$. Индексом нуль обозначены члены нулевого порядка в разложении соответствующих функций.

Будем решать задачу об устойчивости нулевого решения системы (2.1) по отношению ко всем переменным $q^{\cdot}_j$ $(j = 1, \ldots, n+u)$, q_i $(i = 1, \ldots, n)$. Рассмотрим системы, в которых $g_{kj} = g_{kj}^* H$, где H — большой положительный безразмерный параметр. Обозначим $H = 1/\mu$, где, как и в п. 1, μ — малый параметр. Приведем систему (2.1) к виду (1.1). Для этого перейдем к времени $\tau = \mu t$ и сделаем преобразование

$$z_k = \mu^2 \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \frac{dq_j}{d\tau} + \sum_{j=1}^{n} (\mu b_{kj}^{\circ} + g_{kj}^{*\circ}) q_j \quad (k = 1, \ldots, m) \tag{2.2}$$

$$x_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \frac{dq_j}{d\tau} \quad (k = 1, \ldots, n), \quad x_k = \sum_{j=n+1}^{n+u} L_{kj} q_j^{\cdot} \quad (k = n+1, \ldots, n+u),$$

$$x_{n+u+k} = q_k \quad (k = 1, \ldots, l), \quad x_{n+u-m+k} = q_k \quad (k = s+1, \ldots, n)$$

При $|g_{kj}^{*\circ}|_{k=1,\ldots,m}^{j=l+1,\ldots,s} \neq 0$ преобразование (2.2) — неособенное, равномерно регулярное [7]. Определитель D этого преобразования отличен от нуля при сколь угодно малом μ

$$D = |L_{kj}|_{n+1}^{n+u} \, |a_{kj}|_1^n \, |\mu b_{kj}^{\circ} + g_{kj}^{*\circ}|_{k=1,\ldots,m}^{j=l+1,\ldots,s}$$

Система (2.1) в новых переменных примет вид

$$dz_k / d\tau = Z_k \quad (k = 1, \ldots, m) \tag{2.3}$$

$$\mu^2 \frac{dx_k}{d\tau} = -\sum_{j=1}^{n} (\mu b_{kj}' + g_{kj}') x_j + X_k' + X_k'' \quad (k = 1, \ldots, n)$$

$$\mu \frac{dx_k}{d\tau} = -\sum_{j=1}^{n} \mu B_{kj}' x_j - \sum_{j=n+1}^{n+u} R_{kj}' x_j + X_k' + X_k'' \quad (k = n+1, \ldots, n+u)$$

$$\frac{dx_k}{d\tau} = \sum_{j=1}^{n} d_{kj} x_j \quad (k = n+u+1, \ldots, 2n+u-m)$$

Здесь X_k' $(k = 1, \ldots, n+u)$ — это функции Q_k' в новых переменных, b_{kj}', g_{kj}', B_{kj}', R_{kj}'—элементы преобразованных матриц, $Z_k(z_j, x_i, \mu)$, $X_k''(z_j, x_i, \mu)$—голоморфные по совокупности переменных z_j, x_i $(j = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, 2n+u-m)$ функции, разложение которых не содержит членов ниже второй степени, обращающиеся в нуль при $x_i = 0$. Система (2.3) относится к типу систем (1.1). Вырожденную систему получим, положив в уравнениях (2.3) $\mu = 0$. В старых переменных ей соответствует система

$$\sum_{j=1}^{n} g_{kj}^\circ \frac{dq_j}{dt} = Q_k' + \overline{Q}_k'' \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{2.4}$$

$$\sum_{j=n+1}^{n+u} R_{kj}^\circ q_j^\cdot = Q_k' + \overline{Q}_k'' \quad (k = n+1, \ldots, n+u)$$

Здесь $\overline{Q}_k''$ — совокупность нелинейных членов. В системе (2.4) остаются только те из нелинейных членов исходных уравнений (2.1), которые появляются от гироскопических сил и сил, не зависящих от обобщенных механических скоростей.

Система (2.4) отличается от рассматриваемых в гироскопии систем прецессионных уравнений [8] отсутствием диссипативных членов, соответствующих обобщенным механическим скоростям.

Применяя результаты п.1 к системе (2.3), возвращаясь к старым переменным и учитывая при этом, что корни характеристического уравнения инвариантны по отношению к линейному неособенному преобразованию, получаем, что если, кроме m нулевых корней, все остальные корни характеристического уравнения системы первого приближения для (2.4), т. е. все корни уравнения

$$\left| \begin{array}{c:c:c} \| g_{kj}^\circ \| & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hdashline \| g_{kj}^\circ \lambda \| & \multicolumn{2}{c}{\| -A_{kj}^\circ \|} \\ \hdashline \| g_{kj}^\circ \lambda + c_{kj} \| & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hdashline \begin{array}{c} \| \omega_{kj}^\circ \| \\ \hdashline 0 \end{array} & 0 & \| R_{kj}^\circ + \Omega_{kj}^\circ \| \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \\ \vdots \\ m \\ \vdots \\ s \\ \vdots \\ n \\ \vdots \\ n+u \end{array} = 0 \tag{2.5}$$

имеют отрицательные вещественные части и при $| g_{kj}^\circ |_1^n \neq 0$ уравнения

$$\left| \| L_{kj}\lambda + R_{kj}^\circ + \Omega_{kj}^\circ \| \right| \begin{array}{l} n+1 \\ \vdots \\ n+u \end{array} = 0 \tag{2.6}$$

$$\left| \| a_{kj}^\circ \beta + \overset{*\circ}{g}_{kj} \| \right| \begin{array}{l} 1 \\ \vdots \\ n \end{array} = 0 \tag{2.7}$$

удовлетворяют условиям Гурвица, то нулевое решение системы (2.4) устойчиво и при достаточно малом μ устойчиво и нулевое решение системы (2.1). Для гироскопических систем все корни уравнения (2.7) — мнимые [8]. Покажем, что в таком случае достаточно потребовать удовлетворения условиям Гурвица уравнения

$$\left| \| a_{kj}^\circ \lambda + b_{kj}^\circ + g_{kj}^\circ \| \right| \begin{array}{l} 1 \\ \vdots \\ n \end{array} = 0 \tag{2.8}$$

Действительно, уравнение (2.7) соответствует уравнению (1.6) п.1. Последнее получается как вырожденное (т. е. при $\mu = 0$) из уравнения

$$d_2(\beta, \mu) = \left| \begin{array}{c} \| \delta_{kj}\beta - \mu^2 p_{kj}(\mu) \| \\ \hdashline \| \delta_{kj}\beta - \mu p_{kj}(\mu) \| \\ \hdashline \| \delta_{kj}\beta - p_{kj}(\mu) \| \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \\ \vdots \\ \xi \\ \vdots \\ r \\ \vdots \\ n \end{array} = 0$$

Если все корни уравнения (1.6) мнимые, тогда вместо (1.6) рассмотрим укороченное уравнение $d_y(\beta, \mu) = 0$, которое получается из $d_2(\beta, \mu) = 0$, если в каждом элементе определителя учесть только те члены, которые содержат μ в степени не выше первой

$$d_y(\beta, \mu) = \beta^{\xi} \left| \begin{array}{c} \| \delta_{kj}\beta - \mu p_{kj} \| \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \| \delta_{kj}\beta - p_{kj}(\mu) \| \end{array} \right| \begin{array}{l} \xi+1 \\ \vdots \\ r \\ \vdots \\ n \end{array} = \beta^{\xi} d_3(\beta, \mu) = 0$$

При $\mu \to 0$ $(n - r)$ корней уравнения $d_3(\beta, \mu) = 0$ стремятся к значениям β_0 и в пределе равны им.

Оценивая погрешность при приближенном определении корней уравнения $d_2(\beta, \mu) = 0$ по корням вырожденного и укороченного уравнений (по корням уравнений (1.6) и $d_3(\beta, \mu) = 0$), можно показать, что если среди корней уравнения (1.6) нет кратных, то при достаточно малых значениях μ соответствующие корни уравнений $d_2(\beta, \mu) = 0$ и $d_y(\beta, \mu) = 0$ (те $(n - r)$ корней, которые при $\mu \to 0$ стремятся к значениям β_0) располагаются в плоскости корней по одну сторону от мнимой оси. Следовательно, если уравнение $d_3(\beta, \mu) = 0$ удовлетворяет условиям Гурвица, то при достаточно малых значениях μ соответствующие $(n - r)$ корней уравнения $d_2(\beta, \mu) = 0$ имеют отрицательные вещественные части.

Таким образом, в случае, когда все корни уравнения (1.6) мнимые, достаточно, вообще говоря, потребовать удовлетворения условиям Гурвица уравнений (1.4), (1.5) и $d_3(\beta, \mu) = 0$.

В обозначениях системы (2.1) уравнению $d_3(\beta, \mu) = 0$ соответствует уравнение (2.8). Следовательно, для рассматриваемых систем гироскопической стабилизации справедливо утверждение: пусть

$$| g_{kj}^{\circ} |_1^n \neq 0, \quad | g_{kj}^{\circ} |_{k=1,\ldots,m}^{j=l+1,\ldots,s} \neq 0$$

Если уравнение (2.5) удовлетворяет условиям Гурвица, т. е. нулевое решение системы (2.4) устойчиво по первому приближению, и уравнения (2.6) и (2.8) также удовлетворяют этим условиям, и при этом корни уравнений (2.6) и (2.7) простые, то при достаточно малых значениях параметра μ (достаточно больших значениях параметра H) нулевое решение системы (2.1) устойчиво по отношению ко всем обобщенным скоростям и механическим обобщенным координатам.

Система (2.4) допускает m голоморфных интегралов Ляпунова

$$\sum_{j=1}^{n} g_{kj}^{\circ} q_j + \varphi_k(q_1, \ldots, q_n) = C_k \quad (k = 1, \ldots, m)$$

где φ_k — голоморфные функции, не содержащие членов ниже второй степени и обращающиеся в нуль при $q_i = 0$ $(i = 1, \ldots, l, s + 1, \ldots, n)$ и произвольных $q_{l+1}, \ldots, q_s$.

Поступила 26 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч., т. 2. М., Изд-во АН СССР, 1956.
2. *Климушев А. И., Красовский Н. Н.* Равномерная асимптотическая устойчивость систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
3. *Разумихин Б. С.* Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных. Сиб. матем. ж., 1963, т. 4, № 1.
4. *Климушев А. И.* Устойчивость по первому приближению нелинейных систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных. Тр. Уральск. политехн. ин-та, 1973, № 211.

5. *Кузьмина Л. К.* К вопросу устойчивости гироскопических стабилизаторов. Тр. Казанск. авиац. ин-та. Сер. матем., механ., 1970, вып. 119.
6. *Кузьмина Л. К.* К вопросу устойчивости систем гироскопической стабилизации. ПММ, 1972, т. 36, вып. 4.
7. *Лефшец С.* Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
8. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. М., Гостехиздат, 1956.

УДК 62—50

О НЕПРЕРЫВНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОГО КОНСТРУИРОВАНИЯ РЕГУЛЯТОРА ПО СИНГУЛЯРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ

В. Я. Глизер, М. Г. Дмитриев

(Красноярск)

Рассматривается линейная задача оптимального управления с квадратичным критерием качества, дифференциальные связи которой содержат малый параметр при части производных. Показано, что решение этой задачи при стремлении малого параметра к нулю стремится к решению некоторой задачи оптимального управления того же класса, внеинтегральный член функционала которой конструируется специальным образом и не связан с подстановкой корня «вырожденной» системы в функционал.

При точном описании объектов управления часто приходим к математическим моделям высокого порядка. Пренебрегая некоторыми малыми константами (постоянные времени, массы, моменты инерции и т. п.), получаем уравнения моделей более низкого порядка. Возникает вопрос о корректности такого пренебрежения в смысле близости решения возмущенной и невозмущенной задач.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: требуется найти непрерывную r-мерную вектор-функцию $u(t)$, доставляющую минимум функционалу

$$I(u)=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} x(T)\\ z(T)\end{Vmatrix}'\begin{Vmatrix} F_1 & F_2\\ F_2' & F_3\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} x(T)\\ z(T)\end{Vmatrix}+\frac{1}{2}\int_0^T (x'D(t)x+u'R(t)u)\,dt \tag{1}$$

на траекториях системы

$$\begin{aligned} x^{\cdot} &= A_1(t)x+A_2(t)z+B_1(t)u, \quad x(0)=x_0, \quad x\in E^n\\ \lambda z^{\cdot} &= A_3(t)x+A_4(t)z+B_2(t)u, \quad z(0)=z_0, \quad z\in E^m \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\lambda>0$ — малый параметр, $T>0$ — фиксированное число, штрих означает транспонирование, все матрицы дважды непрерывно дифференцируемы на $[0, T]$, $R(t)$ — положительно-определенная, $D(t)$ — положительно-полуопределенная матрицы на $[0, T]$, F — постоянная, положительно-определенная матрица.

Система в (2) является сингулярно возмущенной [1]. Имеется обширная литература по исследованию сингулярных возмущений в задачах оптимального управления, среди которых упомянем работы [2−6], близкие к теме данной статьи. В большинстве работ, исследующих сингулярные возмущения в задачах оптимального управления, предельная задача получается из исходной при нулевом значении параметра возмущения. Ниже устанавливается, что предельная задача для (1), (2) не получается из нее при $\lambda=0$, а конструируется специальным образом.

Обозначим через $x(t, \lambda)$, $z(t, \lambda)$ оптимальные траектории, $u(t, \lambda)$ — оптимальное управление и I_λ — минимальное значение функционала в задаче (1), (2).

Теорема. Пусть

1) $\operatorname{rank}[B_2(T), A_4(T)B_2(T), \ldots, A_4^{m-1}(T)B_2(T)]=m$;