На фиг. 1 в полярной системе координат r, φ приведены области возможности движения спутника для $e = 0.2$, $i = 30°$, $60°$ и для высот полета 200 *км*, 1000 *км*.

Пунктирная линия дает кривую Хилла в случае кеплеровского движения, а сплошная линия соответствует возмущенному движению. На фиг. 2 даны графики приращения радиус-вектора граничной поверхности Хилла, обусловленные сплюснутостью Земли.

Пунктирная линия на фиг. 2 определяет $\Delta r'$, сплошная линия — $\Delta r''$.

Поступила 20 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М., «Наука», 1971.
2. *Kozai Y.* The potential of the earth derived from satellite motions. In: Dynamics satellites. Sympos, Paris, 1962, Berlin, Springer-Verlag, 1963, p. 65.

УДК 531.36

О СТАБИЛИЗАЦИИ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Н. Г. Апыхтин, А. А. Пионтковский, Т. М. Чихладзе

(Москва, Тбилиси)

Методом векторной функции Ляпунова получены достаточные условия устойчивости «в большом» равновесного относительно центра масс положения управляемого твердого тела и определенного направления вектора скорости центра масс.

Рассмотрим твердое тело m с главными центральными моментами инерции A, B, C, которое перемещается в атмосфере. Пусть v — скорость центра масс тела, а p, q, r — проекции мгновенной угловой скорости вращения тела на главные центральные оси инерции C_x, C_y и C_z соответственно. Тогда динамические уравнения поступательно-вращательного движения твердого тела, записанные в проекциях на эти оси, имеют следующий вид:

$$m(v_x^{\cdot} + qv_z - rv_y) = \Sigma F_{ix} \quad (xyz,\ pqr)$$
$$Ap^{\cdot} + (C - B)qr = \Sigma M_{ix} \quad (xyz,\ pqr,\ ABC) \tag{1}$$

Здесь в правых частях стоят суммарные проекции сил и моментов на главные центральные оси инерции твердого тела; символы в скобках указывают, что остальные уравнения получаются круговой перестановкой. На твердое тело действуют следующие силы: сила тяги, определенная режимом работы двигателя, скоростью движения центра масс и характеристиками среды; сила тяжести, аэродинамические силы, которые зависят от геометрии тела и кинематических параметров его движения: скорости центра масс, углов атаки α и скольжения β; а также управляющие силы, создаваемые управляющими органами (отклонением поверхностей управления от некоторого положения на углы δ_x, δ_y и δ_z [1, 2]).

Главный момент внешних сил, действующих на твердое тело, состоит из статического момента, зависящего от положения осей инерции относительно вектора скорости центра масс (углов α и β), демпфирующего аэродинамического момента, зависящего от угловой скорости вращения тела (p, q, r, $\alpha^{\cdot}$, $\beta^{\cdot}$), и управляющего момента, создаваемого рулевыми органами (δ_x, δ_y, δ_z) [1, 2]. Кроме того, все перечисленные моменты зависят от режима полета (скорости центра масс, состояния атмосферы на данной высоте).

Все сказанное выше о силах и моментах, действующих на твердое тело, приводит к необходимости перехода от параметров v_x, v_y и v_z к величинам v, α и β. Если направление вектора скорости центра масс определено углами α и β относительно оси C_x в плоскостях C_{xz} и C_{xy}, то формулы указанного перехода для малых углов атаки и скольжения имеют вид [1]

(2) $$v_x = v, \quad v_y = -v_\alpha, \quad v_z = v_\beta$$

Поставим задачу об устойчивости в большом движения твердого тела с некоторой скоростью v_0 вида

(3) $$p = q = r = 0, \quad \alpha = \alpha_0, \quad \beta = \beta_0$$

т. е. о нахождении условий на параметры тведого тела и управляющих органов при которых любые по величине возмущения величин p, q, r, v, α и β стремятся к з начениям (3) асимптотически.

Полагая в возмущенном движении

(4) $$p \rightleftarrows p, \quad q \rightleftarrows q, \quad r \rightleftarrows r, \quad \alpha \to \alpha_0 + \alpha, \quad \beta \to \beta_0 + \beta$$

и замечая, что в невозмущенном движении (3) суммарные проекции сил и моменты сил относительно главных центральных осей инерции равны нулю, получаем следующий результат: в возмущенном движении эти величины могут быть представлены рядами по степеням возмущенных значений (4), начиная с первой степени. Так, для многих летательных аппаратов можно положить в возмущенном движении [2]

(5) $$\frac{\Sigma F_{iy}}{mv_0\alpha_0} = a_y\alpha + C_{xy}\delta_x + F_{y2}$$

$$\frac{\Sigma F_{iz}}{mv_0\beta_0} = a_z\beta + C_{zy}\delta_y + F_{z2}$$

$$\frac{\Sigma M_{ix}}{A} = m_{xx}p + m_{xy}q + b_{xx}\delta_x + b_{xy}\delta_y + b_{x\beta}\beta + M_{x2}$$

$$\frac{\Sigma M_{iy}}{B} = m_{yx}p + m_{yy}q + b_{yx}\delta_x + b_{yy}\delta_y + b_{y\beta}\beta + M_{y2}$$

$$\frac{\Sigma M_{iz}}{C} = C_{z\alpha}\alpha + C_{z\alpha}\dot{\alpha} + m_{zz}r + b_{zz}\delta_z + M_{z2}$$

где F_{y2}, F_{z2}, M_{x2}, M_{y2} и M_{z2} — функции переменных p, q, r, α и β, разложения которых в ряды по степеням этих переменных начинаются с членов второй степени. Первое уравнение системы (1) в дальнейшем не рассматривается, так как оно определяет соотношение сил при движении центра масс твердого тела со скоростью v_0, среди которых основной в этом отношении является сила тяги

Тогда из системы (1) получим систему уравнений возмущенного движения вида

(6) $$\alpha^{\cdot} = a_{y\alpha}\alpha - r + C_{yx}\delta_x + F_{y2}$$

$$\beta^{\cdot} = a_{z\beta}\beta + q + C_{zy}\delta_y + F_{z2}$$

$$p^{\cdot} = m_{xx}p + m_{xy}q + b_{x\beta}\beta + b_{xx}\delta_x + b_{xy}\delta_y + M_{x2}$$

$$q^{\cdot} = m_{yx}p + m_{yy}q + b_{y\beta}\beta + b_{yx}\delta_x + b_{yy}\delta_y + M_{y2}.$$

$$r^{\cdot} = C_{z\alpha}\alpha + C_{z\alpha^{\cdot}}\alpha^{\cdot} = m_{zz}r + b_{zz}\delta_z + M_{z2}$$

Систему уравнений возмущенного движения собственного твердого тела (6) дополним уравнениями органов управления, которые имеют вид [3]

(7) $$W_x\delta_x^{\cdot} + S_x\delta_x = f_x(\sigma_x, t)$$

$$T_x\sigma_x^{\cdot} + \sigma_x = a_{px}p + a_{\delta x}\delta_x$$

где W_x, W_y, W_z, T_x, T_y, T_z, a_{px}, a_{qy}, a_{zz}, $a_{\delta x}$, $a_{\delta y}$, $a_{\delta z}$ — некоторые постоянные, а f_x, f_y, f_z — нелинейные функции, удовлетворяющие условиям

$$0 \leqslant \sigma_i f_i(\sigma_i, t) \leqslant k\sigma_i^2 \quad (i = xyz)$$

В результате уравнения возмущенного движения (6) и (7) образуют замкнутую систему. Для нее получим достаточные условия устойчивости в большом положении равновесия методом, основанным на использовании векторной функции Ляпунова [4].

Для решения этой задачи разобьем систему уравнений (6) и (7) одиннадцатого порядка на две подсистемы. Первая из них состоит из совокупности уравнений (6) (в которых опущены последние слагаемые в правых частях) и уравнений

$$\delta_i = -(S_i / W_i)\delta_i, \quad i = x, y, z$$

Вторая подсистема состоит из уравнений

$$\sigma_i^{\cdot} = -\sigma_i / T_i, \quad i = x, y, z$$

Векторы взаимосвязи

$$g_{12} = \left(F_{y2}, F_z, M_x, M_y, M_z^*, \frac{f_x(\sigma_x t)}{W_x}, \frac{f_y(\sigma_y t)}{W_y}, \frac{f_z(\sigma_z t)}{W_z}\right)$$

$$(M_z^* = M_z + C_{z\dot{\alpha}} F_y)$$

$$g_{21} = \left(\frac{a_{px}p + a_{\delta x}\delta_x}{T_x}, \frac{a_{qy}q + a_{\delta y}\delta_y}{T_y}, \frac{a_{rz}r + a_{\delta z}\delta_z}{T_z}\right)$$

Указанные линейные подсистемы устойчивы и для них существуют скалярные функции Ляпунова V_1 и $V_2 = {}^1/_2 (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2)$ с постоянными Н. Н. Красовского: C_{1k} $(k = 1, 2, 3, 4)$ и $C_{21} = C_{22} = {}^1/_2$, $C_{23} = \max\{1 / T_x, 1 / T_y, 1 / T_z\}$, $C_{24} = 1$.

Для g_{21}, очевидно, существует k_{21}, такое, что $\| g_{21} \| \leqslant k_{21} \| x_1 \|$, где $x_1 = (\alpha, \beta, p, q, r, \delta_x, \delta_y, \delta_z)$. Для g_{12} существует k_{12}, такое, что $\| g_{12} \| \leqslant k_{12} \| x_2 \|$, где $x_2 = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$, при условии, что нелинейные функции сил и моментов F и M удовлетворяют оценкам типа

$$F_{ij} \leqslant l_{ij} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2), \quad M_{ij} \leqslant n_{ij} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2)$$

Будем предполагать, что функции F и M удовлетворяют этим оценкам.

Так как указанные подсистемы — линейные экспоненциально-устойчивые подсистемы и выполнены все условия теоремы о векторной функции Ляпунова [4, 5], достаточным условием асимптотической устойчивости в большом исходной нелинейной системы (6), (7) является необходимое и достаточное условие устойчивости постоянной матрицы

$$A = \left\| \begin{matrix} -\dfrac{C_{13}}{2C_{12}} & \dfrac{C_{14}^2 k_{12}^2}{2C_{13}C_{21}} \\ \dfrac{C_{24}^2 k_{21}^2}{2C_{23}C_{11}} & -\dfrac{C_{23}}{2C_{22}} \end{matrix} \right\|$$

Таким образом, условие устойчивости, в силу теоремы Рауса — Гурвица, можно записать в виде алгебраического неравенства

$$k_{12} < \sqrt{\frac{C_{23}C_{12}C_{22}}{C_{11}} \frac{C_{13}}{C_{14}C_{24}K_{21}}}$$

Итак, получено условие асимптотической устойчивости в большом исходной нелинейной системы (6), (7) в виде ограничения k_{12}, т. е. как оценка на нелинейные функции F и M.

Поступила 20 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шаталов А. С., Топчеев Ю. И., Кондратьев В. С.* Летательные аппараты как объекты управления. М., «Машиностроение», 1972.
2. *Горбатенко С. А., Макашов Э. М., Полушкин Ю. Ф., Шефтель Л. В.* Механика полета. М., «Машиностроение», 1969.
3. *Летов А. М.* Устойчивость нелинейных регулируемых систем. М., Физматгиз, 1962.
4. *Пионтковский А. А.* Некоторые задачи устойчивости многомерных систем. В сб.: Теория и методы построения систем многосвязного регулирования. М., «Наука», 1973.
5. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. М., «Наука», 1970.