В случае несоизмеримости частот, определяемых выражением (8), можно найти все последующие коэффициенты в рядах (6), (7) и h_s. Ряды будут сходиться абсолютно при всяком c, пока $|c|$ не превышает некоторого предела.

Связь координат со временем дается формулой

$$t - t_0 = \int_0^\tau \varkappa(x(\tau), y(\tau))\, d\tau$$

Автор благодарен В. Г. Демину за помощь при выполнении этой работы.

Поступила 11 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч., т. 2. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1956.
2. *Яхья Х. М.* О понижении порядка дифференциальных уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1976, № 6.

УДК 521.1

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЗАКРЕПЛЕННОЙ ТОЧКОЙ В ПОЛЕ ПРИТЯЖЕНИЯ ДВУХ ЦЕНТРОВ

Ю. В. Баркин, В. Е. Иевлев

(Москва)

В переменных Андуайе [1] исследуется вопрос о существовании периодических движений твердого тела с закрепленной точкой в поле притяжения двух неподвижных центров.

1. Рассмотрим движение твердого тела вокруг неподвижной точки O_1 в ньютоновском поле тяготения двух закрепленных центров M_1 и M_2. Введем следующие системы координат: $OXYZ$ — неподвижная система координат, выбранная так, что центры притяжения M_1 (X_1, 0, 0) и M_2 (X_2, 0, 0) лежат на оси OX, а неподвижная точка O_1 (0, Y_0, 0), тела M лежит на оси OY; O_1xyz — система координат с началом в неподвижной точке O_1, оси которой параллельны осям координат системы координат $OXYZ$ $O_1\xi\eta\zeta$ — подвижная система координат, оси которой направлены по главным осям инерции тела M для неподвижной точки.

Движение тела опишем элементами Андуайе

$$L,\ G,\ H,\ l,\ g,\ h \tag{1.1}$$

Здесь G — величина вектора $\mathbf{G}$ кинетического момента вращательного движения тела M; L, H — значения проекций вектора $\mathbf{G}$ на ось тела $O_1\zeta$ и на ось O_1z соответственно, l — угол, отсчитываемый от линии пересечения промежуточной плоскости P, нормальной к вектору $\mathbf{G}$, с плоскостью тела $O_1\xi\eta$ до оси $O_1\xi$, h — угол, отсчитываемый от оси O_1x до линии пересечения плоскостей O_1xy и P, g — угол между линией пересечения плоскостей P, $O_1\xi\eta$ и линией пересечения плоскостей P, O_1xy.

Рассматриваемое движение определяется гамильтонианом

$$K = T - U_1 - U_2 \tag{1.2}$$

$$T = \frac{G^2 - L^2}{2AB}(A\cos^2 l + B\sin^2 l) + \frac{L^2}{2C}$$

$$U_s = -P_s(\xi_c\alpha_s + \eta_c\beta_s + \zeta_c\gamma_s) - \frac{3P_s}{2mR_s}(A\alpha_s^2 + B\beta_s^2 + C\gamma_s^2)$$

$$P_s = f\frac{m_s m}{R_s^2}, \quad s = 1, 2$$

Здесь f — гравитационная постоянная, m — масса тела, m_1 и m_2 — массы неподвижных центров притяжения; A, B, C — главные моменты инерции тела для неподвижной точки O_1; R_1, R_2 — соответствующие расстояния от центров M_1, M_2 до точки закрепления O_1; α_s, β_s, γ_s — направляющие косинусы линии M_sO_1 в подвижной системе координат $O_1\xi\eta\zeta$; ξ_c, η_c, ζ_c — координаты центра масс тела в системе $O_1\xi\eta\zeta$.

Представим силовую функцию задачи, зависящей явно от элементов Андуайе (1.1). Для этого, воспользовавшись формулами невозмущенного движения [2], выразим направляющие косинусы α_s, β_s, γ_s через элементы Андуайе. После преобразований получим разложение силовой функции в тригонометрический ряд.

Предположим, что тело близко к осесимметричному, а точка закрепления близка к его центру масс. В этом случае гамильтониан (1.2) можно представить в виде, допускающем применение метода малого параметра Пуанкаре [3].

$$K = K_0 + \mu K_1, \quad K_0 = \frac{G^2 - L^2}{2A} + \frac{L^2}{2C} \tag{1.3}$$

$$\mu K_1 = \frac{A - B}{2AB}(G^2 - L^2)\cos^2 l - U_1 - U_2$$

Здесь K_0 — гамильтониан, определяющий порождающее решение, μK_1 — возмущающий гамильтониан.

В качестве малого параметра можно взять величину

$$\mu = \max\left\{\frac{|A - B|}{A}, \frac{A}{mY_0^2}, \frac{B}{mY_0^2}, \frac{|C}{mY_0^2}, \frac{\xi_c}{Y_0}, \frac{\eta_c}{Y_0}, \frac{\zeta_c}{Y_0}\right\}$$

Здесь Y_0 — ордината точки O_1 в системе координат $OXYZ$. Запишем упрощенную систему уравнений движения

$$L^{\cdot} = 0, \quad G^{\cdot} = 0, \quad H^{\cdot} = 0$$

$$l^{\cdot} = \frac{A - C}{AC}L, \quad g^{\cdot} = \frac{G}{A}, \quad h^{\cdot} = 0$$

Ее общее решение имеет вид

$$L = L_0 = \text{const}, \quad G = G_0 = \text{const}, \quad H = H_0 = \text{const} \tag{1.4}$$

$$l = n_1 t + l_0, \quad g = n_2 t + g_0, \quad h = h_0$$

$$n_1 = \frac{A - C}{AC}L_0; \quad n_2 = \frac{G_0}{A}$$

Решение (1.4) будет периодическим, если при каких-либо целых числах k_1 и k_2 будет $k_1 n_1 = k_2 n_2$. При этом период порождающего решения равен

$$T = 2\pi k_1 / n_2 = 2\pi k_2 / n_2 \tag{1.5}$$

2. Докажем существование периодических решений с периодом (1.5) системы уравнений с гамильтонианом (1.3), совпадающих с порождающим решением при $\mu = 0$.

Согласно теории периодических решений Пуанкаре уравнения движения с гамильтонианом (1.3) допускают периодические решения периода T при малых значениях параметра μ, если соответствующие порождающие решения удовлетворяют следующей группе условий:

$$\Delta_1(K_0) \neq 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial [K_1]}{\partial g_0} = \frac{\partial [K_1]}{\partial h_0} = 0, \quad \frac{\partial [K_1]}{\partial H_0} = 0$$

$$\Delta_2([K_1]) \neq 0, \quad [K_1] = \frac{1}{T}\int_0^T K_1 dt$$

Здесь Δ_1 — определитель Гессе от K_0 по отношению к величинам G_0, L_0; Δ_2 — определитель Гессе от $[K_1]$ по отношению к l_0, h_0, H_0.

Первое условие выполняется для любого порождающего решения при $A \neq C$, так как

$$\Delta_1(K_0) = \frac{A-C}{A^2C}$$

Для исследования оставшихся условий необходимо вычислить значение $[K_1]$. Возможны следующие случаи:

$$|k_1| = |k_2|; \quad |k_1| = 1, \quad |k_2| = 2$$
$$|k_1| = 2, \quad |k_2| = 1; \quad |k_1| + |k_2| \geqslant 4$$

При $|k_1| + |k_2| \geqslant 4$, $|k_1| \geqslant 2$ последнее условие (2.1) не выполняется, поскольку $[K_1]$ не зависит от h_0 и g_0. Для исследования существования периодических решений в этом случае необходимо рассмотрение членов более высокого порядка малости в разложении силовой функции.

Ограничимся изучением случая соизмеримости $k_1 = k_2$. Предположим, что центры M_1 и M_2 имеют равные массы и расположены на комплексно-сопряженных расстояниях

$$m_1 = m_2 = m_0, \quad X_{1,2} = \pm id, \quad d = \text{const}, \quad i = \sqrt{-1}$$

Как известно [4, 5], при этом силовая функция задачи с высокой точностью аппроксимирует потенциал сфероида. Кроме того, будем считать, что центр масс тела M совпадает с точкой закрепления O_1.

При этих предположениях получим

$$\mu[K_1] = \frac{A-B}{4AB}(G_0^2 - L_0^2) + (\varkappa_1 + Y_0^2\varkappa_2)C^1_{000} + \tag{2.2}$$
$$+ (\varkappa_1 + Y_0^2\varkappa_2)C^1_{2.-2.0}\cos 2g_0 + (\varkappa_1 - Y_0^2\varkappa_2)\cos 2h_0 +$$
$$+ (\varkappa_1 - Y_0^2\varkappa_2)C^1_{2.-2.2}\cos(2g_0 - 2h_0) + (\varkappa_1 - Y_0^2\varkappa_2)C^1_{2.-2.-2}\cos(2g_0 + 2h_0)$$

Здесь

$$C^1_{000} = (B-A)\left[{}^1/_8(1+\cos^2\theta)(1+\cos^2\rho)\right] +$$
$$+ (C-A)\left[{}^1/_4\sin^2\theta(1+\cos^2\rho) + {}^1/_2\sin^2\rho\cos^2\theta\right]$$
$$C^1_{002} = {}^1/_8(A-B)\sin^2\rho(\sin^2\theta - 2\cos^2\theta) + {}^1/_4(A-C)(2-3\sin^2\theta)$$
$$C^1_{2.-2.0} = {}^1/_{16}(A-B)\sin^2\rho(1-\cos\theta)^2$$
$$C^1_{2.-2.\pm 2} = {}^1/_8(A-B)\sin^2\theta / 2\,(1 \pm \cos\rho)^2$$
$$\varkappa_1 = f\frac{3d^2m_0}{R^5}, \quad \varkappa_2 = -\frac{\varkappa_1}{d^2}, \quad R = \sqrt{Y_0^2 - d^2}$$
$$\cos\theta = G/L, \quad \cos\rho = G/H$$

Теперь второе условие (2.1) нетрудно записать в явном виде. В результате найдем порождающие значения угловых переменных

$$l_0 = 0; \quad g_0 = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}; \quad h_0 = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \tag{2.3}$$

Воспользовавшись полученными значениями порождающих угловых переменных, после преобразований третье уравнение (2.1) запишем в виде

$$f_1(\theta)\cos\rho = 0 \tag{2.4}$$
$$f_1(\theta) = M_2\sin^4\theta / 2 + M_1\sin^2\theta / 2 + M_0$$

Здесь M_0, M_1, M_2 — известные постоянные величины. Уравнение (2.4) заведомо удовлетворяется при $\rho = \pi / 2$. Решение $\rho = \pi / 2$ вместе с решением $h_0 = 0, \pi / 2, \pi, 3\pi / 2$ допускает простую геометрическую интерпретацию: вектор кинетического момента G вращательного движения тела направлен либо параллельно отрезу M_1M_2, либо перпендикулярно к нему.

Последнее условие (2.1) приводится к виду

$$f_1(\theta)\,f_2(\theta)\sin^4\frac{\theta}{2}\neq 0,\quad f_2(\theta)=N_2\sin^4\frac{\theta}{2}+N_1\sin^2\frac{\theta}{2}+N_0 \tag{2.5}$$

Постоянные N_0, N_1, N_2 — также известные величины. Условие (2.5) нарушается в конечном числе точек: при $\theta = 0$, а также в точках, которые находятся из уравнения

$$f_1(\theta)f_2(\theta) = 0$$

Итак, показано, что в рассматриваемом случае задача о движении твердого тела вокруг закрепленной точки в поле притяжения двух неподвижных центров допускает семейство периодических решений Пуанкаре. В порождающем решении произвольно выбираются: G — величина вектора $\mathbf{G}$, L — величина проекции вектора $\mathbf{G}$ на ось тела $O_1\zeta$, значение элемента l_0 и начальный момент времени.

Поступила 14 IX 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Andoyer M. H.* Cors de mecanique celest. Paris, 1923, t. 1.
2. *Баркин Ю. В.* Уравнения возмущенного вращательного движения твердого тела относительно центра масс. Вестн. МГУ. Сер. физ., астрон., 1975, вып. 1.
3. *Пуанкаре А.* Избранные тр., т. 1. М., «Наука», 1971.
4. *Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г.* Общее решение задачи о движении искусственного спутника в нормальном поле притяжения Земли. В сб.: Искусственные спутники Земли, вып. 8. М., Изд-во АН СССР, 1961.
5. *Демин В. Г.* Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. М., «Наука», 1968.

УДК 531.55 : 521.1

КАЧЕСТВЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СВОЙСТВ ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА СФЕРОИДАЛЬНОЙ ПЛАНЕТЫ

М. Х. Хасанова

(Душанбе)

Проводится качественное исследование движения искусственных спутников Земли в нецентральном осесимметричном поле тяготения (с точностью до четвертой зональной гармоники).

Принимая во внимание, что геоцентрическая долгота спутника является циклической координатой и применяя метод Рауса игнорирования циклических координат, запишем уравнения движения спутника

$$\rho^{\cdot\cdot} = dW / d\rho,\quad z^{\cdot\cdot} = dW / dz,\quad W = U - {}^1/_2\, C^2 / \rho^2$$

Здесь ρ и z — цилиндрические координаты, U — гравитационный потенциал Земли [1], C — постоянная интеграла площадей, соответствующего циклической координате.

Прежде всего исследуем области возможности движения спутника, границами которых служит поверхность Хилла

$$W(\rho, z) + h = 0 \tag{1}$$

что очевидным образом вытекает из интеграла живых сил $v^2 = 2\,(W + h)$ из условия неотрицательности квадрата скорости спутника.