ЛИТЕРАТУРА

1. *Аржаных И. С.* Об уравнениях вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Докл. АН СССР, 1954, т. 97, № 3.
2. *Вагнер Э. А., Демин В. Г.* Об одном классе периодических движений тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
3. *Демин В. Г.* Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. М., «Наука», 1968.

УДК 531.38

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ, БЛИЗКИХ К СТАЦИОНАРНЫМ

Х. М. Яхья

(Москва)

Путем применения метода Ляпунова [1] к системе уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки в осесимметричном силовом поле построены периодические решения задачи, близкие к стационарным.

Исходная система уравнений в изотермических координатах [2]

$$x'' = -\Omega y' + U_x, \quad y'' = \Omega x' + U_y \tag{1}$$

допускает интеграл Якоби

$$x'^2 + y'^2 = 2U \tag{2}$$

$$U = \varkappa (h + W), \quad \varkappa = B\,(1 - k^2\sigma^2 - k'^2\rho^2)$$

$$W = U_0 - \frac{f^2}{2B}\left(1 - \frac{A-B}{A}\,\sigma^2\right)\left(1 + \frac{B-C}{C}\,\rho^2\right), \quad k^2 = 1 - k'^2 = \frac{A-B}{A-C}$$

Здесь Ω, σ, ρ — заданные функции x, y; U_0 — силовая функция; h, f — постоянные энергии и площадей.

Стационарные решения даются уравнениями

$$U_x = U_y = U = 0 \tag{3}$$

Исключая точки $|\sigma| = |\rho| = 1$, систему (3) можно записать в виде

$$W_x = 0, \quad W_y = 0, \quad h + W = 0$$

Первые два уравнения определяют координаты совокупности точек $\{P_r(x_{0r}(f), y_{0r}(f))\}$, соответствующих стационарным движениям, а третье равенство определяет для каждой точки надлежащее значение постоянной Якоби.

Предположим, что задано стационарное вращение $P_0(f)$, $h_0(f)$. Будем строить периодические решения системы (1) с фиксированным значением параметра f в окрестности точки P_0. Положим $x = x_0 + \xi$, $y = y_0 + \eta$. Уравнения (1), (2) принимают вид

$$\xi'' + \Omega(x_0 + \xi, y_0 + \eta)\,\eta' - U_\xi(x_0 + \xi, y_0 + \eta; h) = 0 \tag{4}$$

$$\eta'' - \Omega(x_0 + \xi, y_0 + \eta)\,\xi' - U_\eta(x_0 + \xi, y_0 + \eta; h) = 0$$

$$\xi'^2 + \eta'^2 - 2U(x_0 + \xi, y_0 + \eta; h) = 0$$

где h — постоянная Якоби для возмущенного движения. Нулевое решение этой системы при $h = h_0$ соответствует заданному стационарному движению.

Для построения периодических решений системы (4) воспользуемся теоремой Ляпунова о голоморфном интеграле [1]. Найдем периодические решения в виде степенных рядов по степеням параметра c, который в рассматриваемом случае зависит от h. Искомое решение обращается в нуль при $c = 0$ и тогда $h = h_0$. Положим

(5) $$\xi = \sum_{s=1}^{\infty} c^s x^{(s)}, \quad \eta = \sum_{s=1}^{\infty} c^s y^{(s)}, \quad h = h_0 + \sum_{s=2}^{\infty} c^s h_s$$

где h_s — постоянные, а $x^{(s)}$, $y^{(s)}$ — периодические функции τ с общем периодом T, который можно представить следующим образом:

(6) $$T = \frac{2\pi}{\nu} = \frac{2\pi}{\nu_0}\left(1 + \sum_{s=2}^{\infty} T_s c^s\right)$$

Введем новый параметр $u = \nu\tau$ и будем искать решение в форме

(7) $$x^{(s)} = a_{1s}{}^{\circ} + \sum_{r=1}^{s} (a_{1s}^{(r)} \cos ru + b_{1s}^{(r)} \sin ru)$$

$$y^{(s)} = a_{2s}{}^{\circ} + \sum_{r=1}^{s} (a_{2s}^{(r)} \cos ru + b_{2s}^{(r)} \sin ru)$$

Уравнения первого приближения

$$\nu_0{}^2 \frac{d^2x^{(1)}}{du^2} + \Omega_0\nu_0 \frac{dy^{(1)}}{du} + \alpha x^{(1)} + \beta y^{(1)} = 0$$

$$\nu_0{}^2 \frac{d^2y^{(1)}}{du^2} - \Omega_0\nu_0 \frac{dx^{(1)}}{du} + \beta x^{(1)} + \gamma y^{(1)} = 0$$

$$(\alpha = -\varkappa_0 W_{xx0}, \ \beta = -\varkappa_0 W_{xy0}, \ \gamma = -\varkappa_0 W_{yy0})$$

где индекс нуль соответствует значениям $x = x_0$, $y = y_0$.

Частоты определяются формулой

(8) $$\nu_0 = 2^{-1/2}\{\alpha + \gamma + \Omega_0{}^2 \pm [(\alpha + \gamma + \Omega_0{}^2)^2 - 4(\alpha\gamma - \beta^2)]^{1/2}\}^{1/2}$$

Рассмотрим два возможных случая:

1) $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$ (W достигает экстремума в P_0), тогда при выполнении неравенства

$$\Omega_0{}^2 > 2\sqrt{\alpha\gamma - \beta^2} - \alpha - \gamma$$

будем иметь две различные частоты (это условие удовлетворяется всегда в точках максимума функции W).

2) $\alpha\gamma - \beta^2 < 0$ (W имеет седло в P_0), тогда имеем только одну частоту, определяемую формулой (8), в которой берется знак плюс.

В случае 1) каждая частота соответствует одному семейству периодических движений, зависящих от произвольного параметра c, а в случае 2) имеем одно такое семейство.

Первое приближение для семейства периодических решений, соответствующих частоте ν_0, получим в форме

$$x = x_0 + (\nu_0{}^2 - \gamma)c \sin u$$

$$y = y_0 + c(\beta \sin u - \Omega_0\nu_0 \cos u)$$

$$h = h_0 + \frac{c^2\nu_0{}^2}{2\varkappa_0}[(\nu_0{}^2 - \gamma)^2 + \beta^2 + \Omega_0{}^2\gamma]$$

Периодические траектории в первом приближении представляют собой подобные эллипсы с общим центром P_0, ось которых образует с осью x угол

$$\frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2\beta(\nu_0{}^2 - \gamma)}{(\nu_0{}^2 - \gamma)^2 - \beta^2 - \Omega_0{}^2\nu_0{}^2}$$

Каждая траектория соответствует одному значению постоянной Якоби.

В углах Эйлера это движение представляет собой наложение нутационных колебаний с малой амплитудой и малых колебаний вокруг оси собственного вращения на возмущенную прецессию с периодически изменяющейся скоростью.

В случае несоизмеримости частот, определяемых выражением (8), можно найти все последующие коэффициенты в рядах (6), (7) и h_s. Ряды будут сходиться абсолютно при всяком c, пока $|c|$ не превышает некоторого предела.

Связь координат со временем дается формулой

$$t - t_0 = \int_0^\tau \varkappa(x(\tau), y(\tau))\, d\tau$$

Автор благодарен В. Г. Демину за помощь при выполнении этой работы.

Поступила 11 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч., т. 2. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1956.
2. *Яхья Х. М.* О понижении порядка дифференциальных уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1976, № 6.

УДК 521.1

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЗАКРЕПЛЕННОЙ ТОЧКОЙ В ПОЛЕ ПРИТЯЖЕНИЯ ДВУХ ЦЕНТРОВ

Ю. В. Баркин, В. Е. Иевлев

(Москва)

В переменных Андуайе [1] исследуется вопрос о существовании периодических движений твердого тела с закрепленной точкой в поле притяжения двух неподвижных центров.

1. Рассмотрим движение твердого тела вокруг неподвижной точки O_1 в ньютоновском поле тяготения двух закрепленных центров M_1 и M_2. Введем следующие системы координат: $OXYZ$ — неподвижная система координат, выбранная так, что центры притяжения M_1 $(X_1, 0, 0)$ и M_2 $(X_2, 0, 0)$ лежат на оси OX, а неподвижная точка O_1 $(0, Y_0, 0)$, тела M лежит на оси OY; O_1xyz — система координат с началом в неподвижной точке O_1, оси которой параллельны осям координат системы координат $OXYZ$ $O_1\xi\eta\zeta$ — подвижная система координат, оси которой направлены по главным осям инерции тела M для неподвижной точки.

Движение тела опишем элементами Андуайе

$$L, G, H, l, g, h \tag{1.1}$$

Здесь G — величина вектора $\mathbf{G}$ кинетического момента вращательного движения тела M; L, H — значения проекций вектора $\mathbf{G}$ на ось тела $O_1\zeta$ и на ось O_1z соответственно, l — угол, отсчитываемый от линии пересечения промежуточной плоскости P, нормальной к вектору $\mathbf{G}$, с плоскостью тела $O_1\xi\eta$ до оси $O_1\xi$, h — угол, отсчитываемый от оси O_1x до линии пересечения плоскостей O_1xy и P, g — угол между линией пересечения плоскостей P, $O_1\xi\eta$ и линией пересечения плоскостей P, O_1xy.

Рассматриваемое движение определяется гамильтонианом

$$K = T - U_1 - U_2 \tag{1.2}$$

$$T = \frac{G^2 - L^2}{2AB}(A\cos^2 l + B\sin^2 l) + \frac{L^2}{2C}$$

$$U_s = -P_s(\xi_c\alpha_s + \eta_c\beta_s + \zeta_c\gamma_s) - \frac{3P_s}{2mR_s}(A\alpha_s^2 + B\beta_s^2 + C\gamma_s^2)$$

$$P_s = f\frac{m_s m}{R_s^2}, \quad s = 1, 2$$