УДК 531.38

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Э. А. Вагнер

(Алма-Ата)

Уравнения движения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой введением изотермических координат на эллипсоиде инерции преобразуются к уравнениям плоского движения фиктивной материальной точки. Методом малого параметра Пуанкаре доказывается существование нового семейства периодических решений рассматриваемой задачи. Предполагается, что тело мало отличается от тела, обладающего осевой динамической симметрией.

Рассмотрим движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Обозначим через p, q, r проекции угловой скорости тела на главные оси инерции, α, β, γ — направляющие косинусы вертикали, A, B, C — главные моменты инерции, a, b, c — координаты центра тяжести тела в подвижной системе координат. Лагранжиан задачи

$$L = {}^1/_2\,(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - mg\,(a\alpha + b\beta + c\gamma) \tag{1}$$

не содержит угла прецессии ψ, что позволяет преобразовать уравнения движения методом Рауса при помощи циклического интеграла

$$\partial L / \partial\psi^{\cdot} = A\alpha\,(\psi^{\cdot}\alpha + \theta^{\cdot}\cos\varphi) + B\beta\,(\psi^{\cdot}\beta - \theta^{\cdot}\sin\varphi) + C\gamma\,(\psi^{\cdot}\gamma + \varphi^{\cdot}) = f$$

Здесь f — произвольная постоянная, φ, θ — углы собственного вращения и нутации соответственно.

Функция Рауса в данном случае запишется в форме [1]

$$R = R_2 + R_1 + R_0$$

$$R_2 = \frac{1}{2}\,D\left\{\varphi^{\cdot 2}C\,(A\alpha^2 + B\beta^2) - 2\varphi^{\cdot}\theta^{\cdot}C\gamma\,(A\alpha\cos\varphi - B\beta\sin\varphi) + \right.$$

$$\left. + \theta^{\cdot 2}\left[\frac{1}{D}\,(A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi) - (A\alpha\cos\varphi - B\beta\sin\varphi)^2\right]\right\}$$

$$R_1 = fD\,[\varphi^{\cdot}C\gamma + \theta^{\cdot}\,(A\alpha\cos\varphi - B\beta\sin\varphi)]$$

$$R_0 = -mg\,(a\alpha + b\beta + c\gamma) - {}^1/_2 f^2 D$$

где $\sqrt{D}$ — расстояние от неподвижной точки до касательной плоскости эллипсоида инерции

$$D^{-1} = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2$$

Выполним далее последовательно два преобразования координат. Прежде всего введем изотермические координаты u и s на поверхности эллипсоида инерции с помощью формул

$$\varphi = \operatorname{Arctg}\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u \operatorname{sn} s}, \quad \theta = \arccos\frac{\operatorname{dn} u \operatorname{cn} s}{\operatorname{dn} s}$$

в которых эллиптические функции аргумента u имеют своим модулем $k = [(A - B)C / (A - C)B]^{1/2}$, а эллиптические функции аргумента s зависят от дополнительного модуля $k' = (1 - k^2)^{1/2}$. Следующее преобразование переменных зададим соотношениями:

$$x = \int_0^u \mu_1(u)\,du, \quad y = -\int_0^s \mu_2(s)\,ds$$

$$\mu_1^2(u) = A\operatorname{sn}^2 u + B\operatorname{cn}^2 u, \quad \mu_2^2(s) = \frac{1}{\operatorname{dn}^2 s}\,(A - Bk'^2\operatorname{sn}^2 s)$$

Функцию Рауса в новых переменных можно представить в виде

$$R = \frac{1}{2} I (x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2}) + \frac{f}{\Lambda M} \frac{\nu_1(u)\lambda_2(s)}{\mu_1(u)} x^{\cdot} + \frac{f}{\Lambda M} \frac{\nu_2(s)\lambda_1(u)}{\mu_2(s)} y^{\cdot}$$

$$I = \frac{Ck}{\Lambda}\left(k'^2 \frac{\mathrm{sn}^2 s}{\mathrm{dn}^2 s} + \mathrm{cn}^2 u\right), \quad M = 1 - \mathrm{cn}^2 u\, \mathrm{cn}^2 s$$

$$\Lambda = \frac{1}{\mathrm{dn}^2 s}(Ak^2 \mathrm{sn}^2 u + Bk^2 \mathrm{cn}^2 u\, \mathrm{sn}^2 s + C\, \mathrm{dn}^2 u\, \mathrm{cn}^2 s)$$

$$\nu_1(u) = C\, \mathrm{dn}^2 u + k^2 (A - B)\, \mathrm{sn}^2 u\, \mathrm{cn}^2 u$$

$$\nu_2(s) = C\, \mathrm{cn}^2 s - k^2 (A - B) \frac{\mathrm{sn}^2 s}{\mathrm{dn}^2 s}$$

$$\lambda_1(u) = \mathrm{sn}\, u\, \mathrm{cn}\, u\, \mathrm{dn}\, u, \quad \lambda_2(s) = \mathrm{sn}\, s\, \mathrm{cn}\, s \,/\, \mathrm{dn}\, s$$

Преобразуем теперь уравнения движения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial x^{\cdot}}\right) - \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial y^{\cdot}}\right) - \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y}$$

принимая во внимание интеграл живых сил

$$I \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = U + h$$

в котором функция U определяется вторым слагаемым в (1), выраженным через новые переменные, а h — постоянная.

Вводя новую независимую регуляризирующую переменную с помощью соотношения $dt = Id\tau$, получим следующую систему уравнений движения:

$$x'' - f\Omega y' = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad y'' + f\Omega x' = \frac{\partial V}{\partial y} \tag{2}$$

$$\Omega = \frac{1}{\mu_1(u)\mu_2(s)}\left\{\nu_2(s) \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\lambda_1(u)}{\Lambda M}\right] + \nu_1(u) \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\lambda_2(s)}{\Lambda M}\right]\right\}$$

$$V = \frac{I}{k}\left[h - \frac{mg}{\mathrm{dn}\, s}(ak\, \mathrm{sn}\, u + bk\, \mathrm{cn}\, u\, \mathrm{sn}\, s + c\, \mathrm{dn}\, u\, \mathrm{cn}\, s) - \frac{f^2}{2\Lambda}\right]$$

Штрих в (2) означает дифференцирование по τ.

Таким образом, уравнения движения твердого тела приводятся к системе четвертого порядка, описывающей движение фиктивной материальной точки на плоскости под действием потенциальных и гироскопических сил.

Преобразованная система допускает интеграл Якоби

$$x'^2 + y'^2 = 2V \tag{3}$$

Для доказательства существования и построения периодических решений системы (2) воспользуемся методом малого параметра Пуанкаре.

Разложением в тригонометрические ряды можно убедиться, что функция Ω имеет порядок k^2. Тогда, считая величину f произвольной, а $\Omega = k^2\Omega^*$, методом Пуанкаре установим существование нового семейства периодических решений задачи, приняв за малый параметр модуль k [2].

Упрощенная система получается из (2) при $k = 0$

$$x_0'' = \frac{\partial V_0}{\partial x_0}, \quad y_0'' = \frac{\partial V_0}{\partial y_0} \tag{4}$$

$$V_0 = (h - mgc)\left(\cos^2 \frac{x_0}{\sqrt{A}} + \mathrm{sh}^2 \frac{y_0}{\sqrt{A}}\right)$$

Умножая обе части (4) на x_0' и y_0' соответственно и интегрируя, получим

$$x_0'^2 = 2(h - mgc)\cos^2 \frac{x_0}{\sqrt{A}} + C_1$$

$$y_0'^2 = 2(h - mgc)\,\mathrm{sh}^2 \frac{y_0}{\sqrt{A}} + C_2$$

Здесь $C_1 + C_2 = 0$, что следует из интеграла Якоби (3).

Если произвольные постоянные h и C_1 подчинены условиям $h - mgc > 0$, $C_1 < 0$, то система (4) допускает следующее решение:

$$\sin\frac{x_0}{\sqrt{A}} = \varkappa \operatorname{sn}(w_1, \varkappa), \quad \operatorname{sh}\frac{y_0}{\sqrt{A}} = \varkappa' \frac{\operatorname{sn}(w_2, \varkappa)}{\operatorname{cn}(w_2, \varkappa)}$$
$$\varkappa^2 = (A\sigma^2 - C_1) / A\sigma^2, \quad \sigma = [2(h - mgc)/A]^{1/2}$$
$$w_i = \sigma(\tau - \tau_i), \quad i = 1, 2$$

обладающее периодом $T = 4\sigma^{-1}K(\varkappa)$.

Система дифференциальных уравнений первого приближения

$$x_1'' - \frac{2}{A}(h - mgc)\left(\sin^2\frac{x_0}{\sqrt{A}} - \cos^2\frac{x_0}{\sqrt{A}}\right)x_1 = f\Omega_0^* y_0'$$
$$y_1'' - \frac{2}{A}(h - mgc)\left(\operatorname{sh}^2\frac{y_0}{\sqrt{A}} + \operatorname{ch}^2\frac{y_0}{\sqrt{A}}\right)y_1 = -f\Omega_0^* x_0'$$

где Ω_0^* — значение функции Ω^* при $k = 0$, имеет решение (β_i — произвольные постоянные)

$$x_1 = x_0'\left\{\int\frac{\beta_1}{x_0'^2}d\tau + \beta_2 + \int\frac{f}{x_0'^2}\omega\, d\tau\right\}$$
$$y_1 = y_0'\left\{\int\frac{\beta_3}{y_0'^2}d\tau + \beta_4 + \int\frac{f}{y_0'^2}\omega\, d\tau\right\}$$
$$x_0' = \sqrt{A}\sigma\varkappa \operatorname{cn}(w_1, \varkappa), \quad y_0' = \frac{\sqrt{A}\sigma\varkappa}{\operatorname{cn}(w_2, \varkappa)}, \quad \omega = \int\Omega_0^* x_0' y_0'\, d\tau$$

Так как система (2) инвариантна относительно подстановки $\tau \to -\tau$, $x \to x$, $y \to -y$, $x^\cdot \to -x^\cdot$, $y^\cdot \to y^\cdot$, то в согласии с теоремой симметрии [3] условия периодичности решения могут быть записаны в виде

$$\psi_1 = x^\cdot(0) = 0, \quad \psi_2 = x^\cdot(T/2) = 0 \tag{5}$$
$$\psi_3 = y(0) = 0, \quad \psi_4 = y(T/2) = 0$$

Можно показать, что условиям (5) можно удовлетворить, если $J_{12} \neq 0$, $J_{34} \neq 0$

$$J_{mn} = \left[\frac{D(\psi_m, \psi_n)}{D(\beta_m, \beta_n)}\right]_{k=0}$$

В явном виде уравнения (5) записываются следующим образом:

$$x_1^\cdot(0) = \frac{\beta_1}{\sqrt{A}\varkappa\varkappa'^2\sigma}\{\varkappa' M(\varkappa, \varkappa') + \varkappa'^2 - \varkappa^2\} - \beta_2\sqrt{A}\varkappa\varkappa'\sigma^2 = 0$$
$$x_1^\cdot\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{\beta_1}{\sqrt{A}\varkappa\varkappa'^2\sigma}\{3\varkappa' M(\varkappa, \varkappa') - 1\} + \beta_2\sqrt{A}\varkappa\varkappa'\sigma^2 = 0$$
$$y_1(0) = \sqrt{A}\beta_4\varkappa'\sigma = 0$$
$$y_1\left(\frac{T}{2}\right) = -\frac{2\beta_3}{\sqrt{A}\sigma^2\varkappa^2\varkappa'}M(\varkappa, \varkappa') - \sqrt{A}\beta_4\sigma\varkappa' = 0$$
$$M(\varkappa, \varkappa') = E(\varkappa) - \varkappa'^2 K(\varkappa)$$

Из последних соотношений получим

$$J_{12} = 2\sigma[\varkappa' - M(\varkappa, \varkappa')] \neq 0,$$
$$J_{34} = \frac{2}{\sigma\varkappa^2}M(\varkappa, \varkappa') \neq 0$$

Это означает, что система (2) допускает новое семейство периодических решений рассматриваемой задачи.

Поступила 19 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аржаных И. С.* Об уравнениях вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Докл. АН СССР, 1954, т. 97, № 3.
2. *Вагнер Э. А., Демин В. Г.* Об одном классе периодических движений тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
3. *Демин В. Г.* Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. М., «Наука», 1968.

УДК 531.38

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ, БЛИЗКИХ К СТАЦИОНАРНЫМ

Х. М. Яхья

(Москва)

Путем применения метода Ляпунова [1] к системе уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки в осесимметричном силовом поле построены периодические решения задачи, близкие к стационарным.

Исходная система уравнений в изотермических координатах [2]

$$x'' = -\Omega y' + U_x, \quad y'' = \Omega x' + U_y \tag{1}$$

допускает интеграл Якоби

$$x'^2 + y'^2 = 2U \tag{2}$$

$$U = \varkappa (h + W), \quad \varkappa = B(1 - k^2\sigma^2 - k'^2\rho^2)$$

$$W = U_0 - \frac{f^2}{2B}\left(1 - \frac{A-B}{A}\sigma^2\right)\left(1 + \frac{B-C}{C}\rho^2\right), \quad k^2 = 1 - k'^2 = \frac{A-B}{A-C}$$

Здесь Ω, σ, ρ — заданные функции x, y; U_0 — силовая функция; h, f — постоянные энергии и площадей.

Стационарные решения даются уравнениями

$$U_x = U_y = U = 0 \tag{3}$$

Исключая точки $|\sigma| = |\rho| = 1$, систему (3) можно записать в виде

$$W_x = 0, \quad W_y = 0, \quad h + W = 0$$

Первые два уравнения определяют координаты совокупности точек $\{P_r(x_{0r}(f), y_{0r}(f))\}$, соответствующих стационарным движениям, а третье равенство определяет для каждой точки надлежащее значение постоянной Якоби.

Предположим, что задано стационарное вращение $P_0(f)$, $h_0(f)$. Будем строить периодические решения системы (1) с фиксированным значением параметра f в окрестности точки P_0. Положим $x = x_0 + \xi$, $y = y_0 + \eta$. Уравнения (1), (2) принимают вид

$$\xi'' + \Omega(x_0 + \xi, y_0 + \eta)\eta' - U_\xi(x_0 + \xi, y_0 + \eta; h) = 0 \tag{4}$$

$$\eta'' - \Omega(x_0 + \xi, y_0 + \eta)\xi' - U_\eta(x_0 + \xi, y_0 + \eta; h) = 0$$

$$\xi'^2 + \eta'^2 - 2U(x_0 + \xi, y_0 + \eta; h) = 0$$

где h — постоянная Якоби для возмущенного движения. Нулевое решение этой системы при $h = h_0$ соответствует заданному стационарному движению.

Для построения периодических решений системы (4) воспользуемся теоремой Ляпунова о голоморфном интеграле [1]. Найдем периодические решения в виде степенных рядов по степеням параметра c, который в рассматриваемом случае зависит от h. Иско-