Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 539.374

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

П. П. Мосолов, В. П. Мясников

(Москва)

Для жесткопластических сред строится асимптотическая теория предельного равновесия оболочек. Вариационный подход позволяет провести исследование предельного равновесия, не прибегая к анализу напряженного состояния. При этом не возникает необходимости в традиционном делении состояний оболочек на моментные и безмоментные. Классификация различных состояний оболочек проводится по степени приближения к точной трехмерной постановке задачи. Вводится первый член асимптотического разложения для кинематического множителя и указываются условия, когда этот член разложения отличен от нуля. Доказывается асимптотическая точность оболочечного приближения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим трехмерный объем T_h, определенный соотношениями

$$\mathbf{r} = \rho(\xi, \eta) + \zeta h \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = (\rho_\xi \times \rho_\eta)\,|\,\rho_\xi \times \rho_\eta\,|^{-1}, \quad \zeta_1(\xi, \eta) \leqslant \zeta \leqslant \zeta_2(\xi, \eta)$$

$$\zeta_1 < \zeta_2, \quad \mathbf{r} = (x, y, z), \quad (\xi, \eta) \in D, \quad \rho_\xi = \partial\rho/\partial\xi, \quad \rho_\eta = \partial\rho/\partial\eta$$

Здесь $\rho(\xi, \eta)$ задает поверхность в трехмерном пространстве. Предполагается, что координатные линии на ней $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$ являются линиями кривизны.

Пусть объем T_h заполнен несжимаемой жесткопластической средой с диссипативным потенциалом $\varphi_h(x, y, z, e_{ij})$ [1]. Предположим, что потенциал φ_h в криволинейных координатах ξ, η, ζ имеет вид

$$\varphi_h = \varphi(\xi, \eta, \zeta, e_{\xi\xi}, e_{\eta\eta}, e_{\xi\eta}, e_{\zeta\zeta}, e_{\xi\zeta}, e_{\eta\zeta}) \tag{1.1}$$

Здесь $e = (e_{\xi\xi}, e_{\eta\eta}, e_{\xi\eta}, e_{\zeta\zeta}, e_{\xi\zeta}, e_{\eta\zeta})$ — тензор скоростей деформации. Если $\mathbf{u} = (u, v, w)$ — векторное поле скоростей в проекциях на ξ, η, ζ соответственно, то

$$e_{\xi\xi} = \frac{1}{H_\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{v}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial H_\xi}{\partial \eta} - \frac{K_\xi w}{1 - K_\xi h\zeta} \tag{1.2}$$

$$e_{\eta\eta} = \frac{1}{H_\eta}\frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{u}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial H_\eta}{\partial \xi} - \frac{K_\eta w}{1 - K_\eta h\zeta}$$

$$e_{\xi\eta} = \frac{1}{2}\left[\frac{H_\xi}{H_\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{u}{H_\xi}\right) + \frac{H_\eta}{H_\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{v}{H_\eta}\right)\right]$$

$$e_{\xi\zeta} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{H_\xi}\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{H_\xi}{h}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{u}{H_\xi}\right)\right]$$

$$e_{\eta\zeta} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{H_\eta}\frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{H_\eta}{h}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{v}{H_\eta}\right)\right]$$

$$e_{\zeta\zeta} = \frac{1}{h}\frac{\partial w}{\partial \zeta}, \quad H_\xi = |\rho_\xi(1 - k_\xi h\zeta)|, \quad H_\eta = |\rho_\eta(1 - K_\eta h\zeta)|$$

Здесь K_ξ, K_η — главные кривизны поверхности в направлениях ξ, η соответственно. Потенциал φ предполагается выпуклой функцией первой степени однородности относительно тензора e, т. е.

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta, \lambda e) = \lambda\varphi(\xi, \eta, \zeta, e), \quad \lambda \geqslant 0$$

и такой, что существует положительное β, для которого

$$\beta I_2 \leqslant \varphi, \quad I_2 = (e_{\xi\xi}^2 + e_{\eta\eta}^2 + e_{\zeta\zeta}^2 + 2e_{\xi\eta}^2 + 2e_{\xi\zeta}^2 + 2e_{\eta\zeta}^2)^{1/2}$$

Кроме того, будем предполагать φ гладкой функцией своих аргументов при $I_2 > 0$.

В случае изотропной среды можно показать, что φ удовлетворяет соотношению $\varphi(\xi, \eta, \zeta, e) \geqslant \varphi(\xi, \eta, \zeta, \varepsilon)$, где ε — тензор e, в котором $e_{\xi\zeta} = e_{\eta\zeta} = 0$.

Поля скоростей, на которых определяется тензор e, предполагаются соленоидальными

(1.3) $$e_{\xi\xi} + e_{\eta\eta} + e_{\zeta\zeta} = 0$$

и удовлетворяющими некоторым граничным условиям.

Пусть на среду, заключенную в объеме T: $(\xi, \eta) \in D$, $\zeta_1 \leqslant \zeta \leqslant \zeta_2$, действует система сил F_h: $(\mathbf{f}(\xi, \eta, \zeta), h\mathbf{f}_i(\xi, \eta))$, $i = 1, 2$. Здесь $\mathbf{f}(\xi, \eta, \zeta)$ — плотность объемных сил, действующих в области T, $\mathbf{f}_i(\xi, \eta)$ — плотность поверхностных сил, сосредоточенных на поверхности $\zeta = \zeta_i(\xi, \eta)$, $i = 1, 2$.

Одной из важнейших величин в теории жесткопластической среды является кинематический множитель для системы сил F_h, т. е. число c_h, определяемое формулой

(1.4) $$\frac{1}{c_h} = \sup_{\mathbf{u},\, \operatorname{div}\mathbf{u}=0}\left\{\left[\int_T \mathbf{fu}\Delta d\xi\, d\eta\, d\zeta + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{i=1}^{2}\int_{S_i} \mathbf{f}_i\mathbf{u}\Delta_i d\xi\, d\eta\right]\left[\int_T \varphi\Delta d\xi\, d\eta\, d\zeta\right]^{-1}\right\}$$

$$\Delta = H_\xi H_\eta, \quad S_i : \zeta = \zeta_i(\xi, \eta), \quad \Delta_i = |\mathbf{r}_\xi' \times \mathbf{r}_\eta'|\,|_{\zeta=\zeta_i}, \quad i = 1, 2$$

Будет показано, что

(1.5) $$c_h = c_0 + \alpha(h), \quad \alpha(h) \to 0 \quad \text{при } h \to 0$$

Число c_0 называется оболочечным приближением кинематического множителя, и для него будет получена формула, существенно более простая по сравнению с формулой (1.4).

2. Оболочечное приближение. Границы применимости оболочечного приближения. Введем оболочечное приближение, используя эвристические гипотезы. Ниже будет дано обоснование этого приближения. Пусть $\mathbf{u}_h$ — поле, на котором достигается верхняя грань в (1.4), и пусть эти поля при $h \to 0$ сходятся к $\mathbf{u}_0$. Из вида компонент тензора e следует, что

$\mathbf{u}_0 = (u_0(\xi, \eta),\ v_0(\xi, \eta),\ w_0(\xi, \eta))$. Таким образом, при малых h поле $\mathbf{u}_h$ имеет вид

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{u}_0 + h\mathbf{u}_1(\xi, \eta, \zeta, h) \tag{2.1}$$

где компоненты $\mathbf{u}_1(\xi, \eta, \zeta, h)$ в некотором смысле ограничены. Из вида поля (2.1) следует, что изменение $\mathbf{u}_1$ порядка единицы вызывает изменения порядка h в компонентах $e_{\xi\xi}$, $e_{\eta\eta}$, $e_{\xi\eta}$ и порядка единицы в компонентах $e_{\xi\zeta}$, $e_{\eta\zeta}$. Поэтому выбором поля $\mathbf{u}_1$ можно постараться по возможности уменьшить значение φ в (1.4). Таким образом приходим к оболочечному потенциалу

$$\psi(\xi, \eta, \zeta, \varepsilon) = \psi(\xi, \eta, \zeta, e_{\xi\xi}, e_{\eta\eta}, e_{\xi\eta}, -e_{\xi\xi} - e_{\eta\eta}) = \min_{e_{\xi\zeta}, e_{\eta\zeta}} \varphi(\xi, \eta, \zeta, e)$$

Пренебрегая в Δ величинами, стремящимися к нулю при $h \to 0$, и рассматривая верхнюю грань в (1.4) на полях $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\xi, \eta)$, приходим к следующему выражению для c_0:

$$\frac{1}{c_0} = \sup\left\{\int\limits_D [Pu + Qv + Rw]\, d\xi\, d\eta \left[\int\limits_D \psi_0(\xi, \eta, \varepsilon_0)\, d\xi\, d\eta\right]^{-1}\right\} \tag{2.2}$$

$$P = \left(f_\xi^1 + f_\xi^2 + \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f_\xi d\zeta\right)|\boldsymbol{\rho}_\xi||\boldsymbol{\rho}_\eta|, \quad Q = \left(f_\eta^1 + f_\eta^2 + \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f_\eta d\zeta\right)|\boldsymbol{\rho}_\xi||\boldsymbol{\rho}_\eta|$$

$$R = \left(f_\zeta^1 + f_\zeta^2 + \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f_\zeta d\zeta\right)|\boldsymbol{\rho}_\xi||\boldsymbol{\rho}_\eta|, \quad \mathbf{f} = (f_\xi, f_\eta, f_\zeta)$$

$$\mathbf{f}_i = (f_\xi^i, f_\eta^i, f_\zeta^i), \quad i = 1, 2, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon|_h = 0$$

$$\psi_0(\xi, \eta, \varepsilon) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \psi(\xi, \eta, \zeta, \varepsilon)\, d\zeta\, |\boldsymbol{\rho}_\xi||\boldsymbol{\rho}_\eta|$$

При определении величины c_0 на допустимые поля u в (2.2) не накладывается условие несжимаемости, так как этому условию можно удовлетворить за счет выбора $w_1(\xi, \eta, \zeta, h)$. Введенное оболочечное приближение имеет смысл лишь при $c_0 \neq 0$.

Остановимся на случае, когда $c_0 = 0$. Это имеет место, например, когда вектор (P, Q, R) не ортогонален хотя бы одному решению системы уравнений $\varepsilon_0(\mathbf{u}) = 0$. Система уравнений $\varepsilon_0(\mathbf{u}) = 0$ (три дифференциальных уравнения относительно трех неизвестных функций), соответствующая незамкнутой поверхности $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}(\xi, \eta)$, если для нее не поставлены дополнительные краевые условия, имеет бесконечно много линейно-независимых решений (в отличие от переопределенной системы $e = 0$, имеющей в качестве решений лишь движения T, как твердого тела). Таким образом, для того чтобы было $c_0 \neq 0$, необходимо предположить, чтобы вектор (P, Q, R) был ортогонален ко всем $\mathbf{u}$ — решениям системы $\varepsilon_0(\mathbf{u}) = 0$. Помимо того, что удовлетворение бесконечному числу условий ортогональности — очень жесткое ограничение на класс возможных внешних сил, постановки задач в напряжениях (такие задачи рассматриваются, например, в [2]) физически некорректны, так как сколь угодно малым возмущением внешних сил можно нарушить некоторые из условий ортогональности и тем самым обратить c_0 в нуль.

3. Расчет кинематического коэффициента оболочечного приближения. Задача о нахождении кинематического множителя c_0 тесно связана с исследованием свойств следующей системы:

$$\frac{1}{|\rho_\xi|}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{v}{|\rho_\xi||\rho_\eta|}\frac{\partial|\rho_\xi|}{\partial\eta} - K_\xi w = \varepsilon_{\xi\xi}{}^\circ \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{|\rho_\eta|}\frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{u}{|\rho_\xi||\rho_\eta|}\frac{\partial|\rho_\eta|}{\partial\xi} - K_\eta w = \varepsilon_{\eta\eta}{}^\circ$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{|\rho_\xi|}{|\rho_\eta|}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{u}{|\rho_\xi|}\right) + \frac{|\rho_\eta|}{|\rho_\xi|}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{v}{|\rho_\eta|}\right)\right] = \varepsilon_{\xi\eta}{}^\circ$$

Теория краевых задач и методы решения этой системы развиты в [3]. Геометрический аспект исследования системы (3.1) содержится в [4].

Пусть для системы (3.1) поставлена некоторая задача, которая однозначно разрешима, т. е. предположим, что существует обратный оператор

$$\mathbf{u} = G\varepsilon_0, \quad \mathbf{u} = (u,\ v,\ w), \quad \varepsilon_0 = (\varepsilon_{\xi\xi}{}^\circ,\ \varepsilon_{\eta\eta}{}^\circ,\ \varepsilon_{\xi\eta}{}^\circ)$$

относительно которого предполагается, что сопряженный оператор G^*

$$\int_D \mathbf{P}(G\,\varepsilon_0)\,d\xi\,d\eta = \int_D (G^*\mathbf{P})\,\varepsilon_0 d\xi\,d\eta, \quad \mathbf{P} = (P, Q, R)$$

представляет собой ограниченный оператор, действующий из пространства достаточно гладких векторных полей ε_0 в пространство непрерывных векторных полей $\mathbf{u}$. Задачи, в которых для системы (3.1) существует ограниченный в указанном смысле сопряженный к обратному оператор, называются алгебраизуемыми.

Используя оператор G^*, перепишем выражение (2.2) в виде

$$\frac{1}{c_0} = \sup_{\varepsilon_0(\xi,\,\eta)}\left\{\int_D (G^*\mathbf{P})\,\varepsilon_0 d\xi\,d\eta\left[\int_D \psi_0(\xi,\eta,\varepsilon_0)\,d\xi\,d\eta\right]^{-1}\right\} = \tag{3.2}$$

$$= \sup_{\xi,\,\eta,\,\varepsilon_0}\frac{(G^*\mathbf{P}(\xi,\eta))\,\varepsilon_0}{\psi_0(\xi,\eta,\varepsilon_0)}$$

При получении формулы (3.2) используется теорема о норме линейного непрерывного функционала в $L_1(D)$.

Таким образом, вопрос о нахождении кинематического множителя свелся к алгебраической задаче о нахождении верхней грани функции пяти переменных (ξ, η, $\varepsilon_{\xi\xi}{}^\circ$, $\varepsilon_{\eta\eta}{}^\circ$, $\varepsilon_{\xi\eta}{}^\circ$). Пусть ξ^*, η^*, $\varepsilon_0{}^*$ — значения переменных, при которых достигается верхняя грань (максимум) в (3.2). Тогда экстремальное поле $\varepsilon_0{}^*(\xi,\eta)$ имеет вид $\varepsilon_0{}^*(\xi,\eta) = \varepsilon_0{}^*\delta(\xi-\xi^*,\ \eta-\eta^*)$. Экстремальное поле $\mathbf{u}^*$, на котором достигается верхняя грань в (2.2), имеет вид $\mathbf{u}^* = G\varepsilon_0{}^*(\xi,\eta)$. Отметим, что в случае алгебраизуемых задач на поверхности $\mathbf{r} = \rho(\xi,\eta)$ имеется точка $\rho(\xi^*,\eta^*)$, которая определяет характер разрушения оболочки. Заметим еще, что в случае, когда ψ_0 — гладкая функция переменных ε_0, экстремальный свектор $\varepsilon_0{}^*$ определяется из алгебраических уравнений

$$\frac{F_{\xi\xi}}{\partial\psi_c/\partial e^\circ_{\xi\xi}} = \frac{F_{\eta\eta}}{\partial\psi_0/\partial e^\circ_{\eta\eta}} = \frac{F_{\xi\eta}}{\partial\psi_0/\partial e^\circ_{\xi\eta}} \tag{3.3}$$

$$G^*P = (F_{\xi\xi},\ F_{\eta\eta},\ F_{\xi\eta})$$

Например, в случае потенциала Мизеса

$$\psi_0 = a(\xi, \eta)[(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\xi\xi})^2 + (\overset{\circ}{\varepsilon}_{\eta\eta})^2 + (\overset{\circ}{\varepsilon}_{\xi\xi} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\eta\eta})^2 + 2(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\xi\eta})^2]^{1/2}$$

система (3.3) легко решается и для c_0 получается формула

$$\frac{1}{c_0} = \max_{\xi\eta}\left\{\frac{2}{\sqrt{6}\,a(\xi,\eta)}\left[F_{\xi\xi}^2 + F_{\eta\eta}^2 - F_{\xi\xi}F_{\eta\eta} + \frac{3}{4}F_{\xi\eta}^2\right]^{1/2}\right\} \tag{3.4}$$

4. **Примеры**. Вычисление величины c_0 сводится к нахождению оператора G^*. Эффективное построение оператора G^* может быть проведено, например, в случае поверхностей второго порядка положительной гауссовой кривизны. В этом случае система (3.1) приводится к системе Коши — Римана.

В случае оболочек вращения оператор G^* может быть найден методом разделения переменных, который приводит к решению бесконечной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако, если вектор внешних нагрузок P представим в виде полинома

$$\mathbf{P}(\xi, \eta) = \sum_{k=-N}^{k=N} \mathbf{P}_k(\xi)\, e^{ik\eta}$$

($\xi = \mathrm{const}$ — параллель на поверхности вращения), то задача о вычислении c_0 сводится к интегрированию конечной системы уравнений.

Рассмотрим несколько конкретных задач.

Пример 1. Рассмотрим поверхность тора

$$x = (b + a\sin(\xi / a))\cos\eta, \quad y = (b + a\sin(\xi / a))\sin\eta, \quad z = a\cos(\xi / a)$$

В этом случае, для того чтобы c_0 было отлично от нуля, на поля P, кроме условий ортогональности движениям тора как твердого тела, приходится накладывать условие

$$\int_0^{\pi a}\left[P\sin\left(\frac{\xi}{a}\right) - R\cos\left(\frac{\xi}{a}\right)\right]d\xi = 0 \tag{4.1}$$

Условие (4.1) является следствием того, что для тора система (3.1) при $\varepsilon_0 = 0$, кроме обычных решений, соответствующих движению тора как твердого тела, допускает решение вида

$$v = 0, \quad u = \begin{cases} C_1\sin(\xi / a), & 0 \leqslant \xi \leqslant \pi a \\ C_2\sin(\xi / a), & \pi a \leqslant \xi \leqslant 2\pi a \end{cases}, \quad w = \begin{cases} -C_1\cos(\xi / a), & 0 \leqslant \xi \leqslant \pi a \\ -C_2\cos(\xi / a), & \pi a \leqslant \xi \leqslant 2\pi a \end{cases}$$

Это решение представляет собой нетривиальное бесконечно малое изгибание тора. Условию (4.1) удовлетворяет, например, поле

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = p\,(b + a\sin(\xi / a))$$

соответствующее случаю, когда тороидальная оболочка находится под равномерным внутренним давлением с плотностью $f_\zeta^1 = p$. Для c_0 из формулы (3.4) при условии, что $\Delta\zeta = \zeta_2 - \zeta_1 = \mathrm{const}$, имеем

$$c_0 = \frac{\tau_0\sqrt{6}\,\Delta\zeta\,(b - a)}{pa\sqrt{3b^2 - 3ab + a^2}}$$

При этом точки разрушения (ξ^*, η^*) таковы: $\xi^* = 3\pi a / 2$, $\xi^* = \pi a / 2$, $0 \leqslant \eta^* \leqslant \leqslant 2\pi$.

Рассмотрим задачу о кинематическом множителе для тора, вращающегося вокруг оси с угловой скоростью ω. В этом случае на тор действуют центробежные силы $\mathbf{P}$. Пусть γ — объемная плотность материала тора. Тогда

$$Q = 0, \quad \Delta\zeta = \mathrm{const},$$

$$P\sin(\xi / a) = R\cos(\xi / a) = A$$

$$A = \gamma\omega^2(b + a\sin(\xi / a))\cos(\xi / a)\sin(\xi / a)$$

Из формулы (3.4) находим

$$c_0 = \frac{\tau_0}{\omega^2 \gamma (b+a)} \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Пример 2. Рассмотрим коническую поверхность $\mathbf{r} = \xi\, \mathbf{r}_0(\eta)$, где ξ — длина отрезка образующей конуса, отсчитываемая от его вершины, $\mathbf{r}_0(\eta)$ — линия пересечения конуса с единичной сферой, центр которой находится в вершине конуса, η—длина дуги вдоль этой линии. Система (3.1) в случае поверхностей нулевой гауссовой кривизны решается в квадратурах [3] и c_0 находится по формуле (3.4). Пусть, например, задан круговой конус

$$\mathbf{r}_0(\eta) = (\cos\eta \cos\theta,\ \sin\eta\cos\theta,\ -\sin\theta), \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant l$$

Здесь $(\pi/2) - \theta$ — полураствор конуса. Рассмотрим поле внешних сил следующего вида: $P = 0$, $Q = 0$, $R = R(\eta)$. Тогда из (3.4) имеем

$$\frac{1}{c_0} = \max_{\xi,\eta} \frac{2\xi}{a(\xi,\eta)\sqrt{6}} \left\{ \left(R \operatorname{ctg}\theta - \frac{1}{2\cos^2\theta} \frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial R}{\partial \eta} \right)^2 \right\}^{1/2}$$

Пример 3. Рассмотрим цилиндрическую поверхность. В этом случае

$$\rho(\xi,\eta) = \mathbf{r}_0(\eta) + \mathbf{v}\xi, \qquad \mathbf{v} = (0,0,1), \qquad \mathbf{r}_0 \mathbf{v} = 0, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant L$$

$$|\mathbf{r}_0'| = 1, \qquad K_\xi = 0, \qquad K_\eta = K(\eta), \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant \eta_0$$

Рассмотрим некоторые конкретные задачи определения c_0 для цилиндрических оболочек. Предположим, что $P = 0$, $Q = 0$, $R = R(\xi)$. Тогда

$$F_{\xi\xi} = -\Pi(\xi) \left(\frac{1}{k(\eta)} \right)'', \qquad F_{\eta\eta} = -\Pi''(\xi) \frac{1}{k(\eta)} \tag{4.2}$$

$$F_{\xi\eta} = 2\Pi'(\xi) \left(\frac{1}{k(\eta)} \right)', \qquad \Pi(\xi) = \int_\xi^L R(\tau)(\tau - \xi)\, d\tau$$

Подставляя выражения (4.2) в (3.4), находим формулу для c_0.

Рассмотрим задачу о жесткости перекрытия цилиндрической оболочки под действием собственного веса. Пусть $\mathbf{r}_0(\eta) = (x(\eta), y(\eta), 0)$. Тогда

$$P = 0, \qquad Q = -\gamma g y', \qquad R = -\gamma g y'' / k(\eta)$$

Формула (3.4) в данном случае принимает вид

$$\frac{1}{c_0} = \frac{2\gamma g}{\sqrt{6}} \max_{\xi,\eta} \left(\frac{1}{a(\xi,\eta)} \left\{ \frac{(L-\xi)^4}{4} \left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{y''}{k^2} - y \right) \right]^2 + \left(\frac{y''}{k^2} \right)^2 - \right.\right. \tag{4.3}$$
$$\left.\left. - \frac{(L-\xi)^2}{2} \frac{y''}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{y''}{k^2} - y \right) + 3(L-\xi)^2 \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{y''}{k^2} - y \right) \right]^2 \right\}^{1/2} \right)$$

Оболочка остается жесткой, если $c_0 > 1$. Пусть перекрытие постоянной толщины $\Delta\zeta$ представляет собой часть кругового цилиндра радиуса l, $0 \leqslant \eta \leqslant \pi l$. Тогда $k = -1/l$, $x = l\cos(\eta/l)$, $y = l\sin(\eta/l)$. Из формулы (4.3) находим

$$\frac{1}{c_0} = \frac{2\gamma g}{\sqrt{6}\,\tau_0 \Delta\zeta} \max_\eta \left\{ \left(\frac{L^4}{l^2} + l^2 + L^2 \right) \sin^2 \frac{\eta}{l} + 12 L^2 \cos^2 \frac{\eta}{l} \right\}^{1/2} \tag{4.4}$$

Если $L^4 + l^4 - 11 L^2 l^2 > 0$, то наибольшее значение в (4.4) достигается при $\eta = \pi l/2$. Если $L^4 + l^4 - 11 L^2 l^2 < 0$, то наибольшее значение в (4.4) достигается при $\eta = 0$ или $\eta = \pi l$.

Заметим, что условие жесткости зависит от L и при достаточно большом L перекрытие, вообще говоря, теряет жесткость.

Формула (4.3) показывает, что существует единственная форма перекрытия, для которой c_0 не зависит от L. Для этого нужно, чтобы

$$(y''/k^2(\eta)) - y = \text{const} \tag{4.5}$$

Уравнение (4.5) легко интегрируется, и из него получается, что направляющей линией такого перекрытия является цепная линия.

5. Неалгебраизуемые задачи. Рассмотренные задачи не охватывают всей области применимости оболочечного приближения. Именно, на допустимые поля $\mathbf{u}$ могут быть наложены такие кинематические ограничения, которые приводят к переопределенной задаче для системы (3.1). В этом случае система (3.1) приводит к формуле (3.2), но в (3.2) ε_0 (ξ,η) принадлежат некоторому подпространству пространства гладких векторных полей и поэтому непосредственно теорема о виде нормы линейного функционала в L_1 (D) неприменима, что не дает возможности алгебраизовать задачу. Однако можно дать алгоритм нахождения системы оценок снизу для c_0. Этот алгоритм основан на методе множителей Лагранжа. Существенную роль здесь играет следующая теорема С. М. Никольского [5]. Пусть линейный, непрерывный функционал F $(\mathbf{u})$ определен на подпространстве M банахова пространства B, выделяемом конечной системой линейных, непрерывных функционалов T_i, T_i $(\mathbf{u}) = 0$, $i = 1 ,\ldots, N$. Тогда

$$\| F \|_M = \sup_{\mathbf{u}\in M} \frac{F(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|_B} = \inf_{\lambda_i} \sup_{\mathbf{u}\in B} \left\{\left[F(\mathbf{u}) - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i T_i(\mathbf{u})\right] \Big/ \|\mathbf{u}\|_B\right\}$$

Вернемся к примеру 3 п. 4. Пусть цилиндрическая оболочка длины L, $0 \leqslant \xi \leqslant L$, $\Delta\zeta = 1$ с круговым поперечным сечением радиуса a находится под действием нормального давления $P = 0$, $Q = 0$, $R = R$ (ξ). Если оболочка закреплена только на краю $\xi = 0$, то, как следует из (3.4), (4.2), величина R (ξ), при которой оболочка остается жесткой, должна быть такова, что

$$\max_{\xi} | R(\xi) | \leqslant \sqrt{6}\tau_0 / (2a)$$

Рассмотрим теперь ту же задачу, но при условиях u $(0) = u$ $(L) = 0$. Указанные ограничения приводят к следующему условию для $\varepsilon_{\xi\xi}^0$:

$$\int_0^L \varepsilon_{\xi\xi}^\circ(\tau)\, d\tau = 0$$

Используя теорему С. М. Никольского, для c_0 получаем формулу

$$\frac{1}{c_0} = \min_{\lambda} \max_{\xi} \left\{\frac{2}{\sqrt{6}\,\tau_0} [\lambda^2 + R^2(\xi)\, a^2 - R(\xi)\, a\lambda]^{1/2}\right\}$$

Пусть R (ξ) заключено в пределах

$$R_* = \min R(\xi) \leqslant R(\xi) \leqslant \max R(\xi) = R^*$$

Рассмотрим на плоскости (R_*, R^*) три области

$$D_1 = \{R^* \geqslant R_*,\ R^* \geqslant -2R_*\}$$
$$D_2 = \{R^* \geqslant R_*,\ -{}^1/_2\, R_* \leqslant R^* \leqslant -2R_*\}$$
$$D_3 = \{R^* \geqslant R_*,\ R^* \leqslant -{}^1/_2 R_*\}$$

Тогда условия на R (ξ), при которых оболочка остается жесткой, следующие:

$$R^* < \sqrt{2}\tau_0 / a \qquad \text{в } D_1$$
$$\{R_*^2 + R^{*2} + R_* R^*\}^{1/2} < \sqrt{6}\tau_0 / (2a) \qquad \text{в } D_2$$
$$R_* > -\sqrt{2}\,\tau_0 / a \qquad \text{в } D_3$$

Заметим, что закрепление второго края оболочки приводит к увеличению ее жесткости.

Рассмотрим задачу о жесткости перекрытия цилиндрической формы постоянной толщины $\Delta\zeta = 1$. Предположим, что на поля u наложены переопределенные по отношению к системе (3.1) условия $u(0, \eta) = u(L, \eta) = 0$. Это предположение приводит к ограничениям

$$\int_0^L \varepsilon_{\xi\xi}{}^\circ(\tau, \eta)\, d\tau = 0, \quad \int_0^L [2\varepsilon_{\xi\eta}{}^\circ - (L-\tau)\,\partial\varepsilon_{\xi\xi}{}^\circ / \partial\eta]\, d\tau = 0$$

Для решения полученной переопределенной задачи нужно ввести два функциональных множителя Лагранжа $\lambda(\eta)$, $\mu(\eta)$. Число c_0 в рассматриваемой задаче в случае потенциала Мизеса имеет вид

$$\frac{1}{c_0} = \frac{2\gamma g}{\sqrt{6}\,\tau_0} \inf_{\lambda,\mu}\sup_{\xi,\eta} \left\{\left[\frac{(L-\xi)^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left(\frac{y''}{K^2} - y\right) + \lambda(\eta) + {} \right.\right.$$
$$\left. + (L-\xi)\,\mu'(\eta)\right]^2\left(\frac{y''}{K^2}\right)^2 - \frac{y''}{K^2}\left[\frac{(L-\xi)^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left(\frac{y''}{K^2} - y\right) + \lambda(\eta) + {}\right.$$
$$\left.\left. + (L-\xi)\,\mu'(\eta)\right] + 3\left[(L-\xi)\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{y''}{K^2} - y\right) + \mu(\eta)\right]^2\right\}^{1/2} \tag{5.1}$$

Например, если направляющая цилиндра является цепной линией, то формула (5.1) принимает вид

$$\frac{1}{c_0}\;\frac{2\gamma g}{\tau_0\sqrt{6}} \inf_{\lambda,\mu}\sup_{\xi,\eta}\left\{\frac{3}{4}\left(\frac{y''}{K^2}\right)^2 + \left[\lambda(\eta) + (L-\xi)\,\mu' - \frac{1}{2}\frac{y''}{K^2}\right]^2 + 3\mu^2\right\}^{1/2}$$

Очевидно, что λ и μ должны быть выбраны следующим образом:

$$\mu = 0, \quad \lambda = {}^1/_2\, y'' / K^2$$

В рассматриваемом случае легко находится экстремальное поле, которое удовлетворяет переопределенным условиям.

6. Доказательство асимптотической точности оболочечного приближения для внешних нагрузок специального вида. Исследование асимптотической точности оболочечного приближения проводится при следующих предположениях относительно постановки задачи. Пусть $\zeta_1 = \text{const}$, $\zeta_2 = \text{const}$, φ не зависит от ζ и $\varphi(\xi, \eta, e) \geqslant \varphi(\xi, \eta, \varepsilon)$. Кроме того предполагается, что краевые условия не зависят от ζ.

Рассмотрим систему внешних сил специального вида

$$F_h : (\mathbf{f}(\xi, \eta), 0, 0)$$

Обозначим $c_h{}^1$ следующее число:

$$\frac{1}{c_h{}^1} = \sup_{\mathbf{u}(\xi,\eta,\zeta)}\left\{\int_T \mathbf{fu}\Delta d\xi\, d\eta\, d\zeta \left[\int_T \varphi(\xi, \eta, \mathbf{e})\,\Delta d\xi\, d\eta\, d\zeta\right]^{-1}\right\}$$

Здесь верхняя грань берется по полям u, удовлетворяющим краевым условиям, но, вообще говоря, не удовлетворяющим условию (1.3).

В дальнейшем наряду с переменными ξ, η, ζ удобно будет использовать переменные ξ, η, σ, где $\sigma = h\zeta$, $\Sigma = \{\sigma : \sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2\}$. Заметим, что в этих переменных коэффициенты в (1.2) не зависят от h. Ниже будет использована следующая лемма.

Лемма 6.1. Пусть $M(\xi, \eta, \sigma)$ — достаточно гладкая функция в окрестности $\partial D \times \Sigma$ (∂D — кусочно-гладкая граница D) и $A(\xi, \eta, \sigma)$, $B(\xi, \eta, \sigma)$ — достаточно гладкие в той же окрестности функции, отличные от нуля на $\partial D \times \Sigma$. Существуют гладкие функции u_δ, v_δ, обращающиеся в нуль на $\partial D \times \Sigma$ и вне пограничного слоя ширины δ (пограничный слой входит в область определения функций M, A, B), такие, что

$$\left|\frac{\partial u_\delta}{\partial \xi}\right| + \left|\frac{\partial v_\delta}{\partial \xi}\right| + \left|\frac{\partial u_\delta}{\partial \eta}\right| + \left|\frac{\partial v_\delta}{\partial \eta}\right| +$$
$$+ \left|\frac{\partial u_\delta}{\partial \sigma}\right| + \left|\frac{\partial v_\delta}{\partial \sigma}\right| < C, \quad |u_\delta| + |v_\delta| < C\delta$$
$$\left[A\frac{\partial u_\delta}{\partial \xi} + B\frac{\partial v_\delta}{\partial \eta}\right]\Big|_{\partial D\times\Sigma} = M|_{\partial D\times\Sigma}$$

Доказательство леммы можно провести путем непосредственного построения функций u_δ, v_δ по схеме, изложенной в [6]. Именно, в объеме, примыкающем к куску границы $\partial D \times \Sigma$, к которому прямые $\eta = \mathrm{const}$, $\sigma = \mathrm{const}$ трансверсальны, можно положить $v_\delta = 0$, и в этом объеме из условий леммы находить u_δ. Далее эти локальные решения склеиваются с помощью разбиения единицы.

Теорема 6.1. Пусть

$$c_h^1 \geqslant c_0 + \alpha_1(h), \quad \alpha_1(h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0 \tag{6.1}$$

Тогда

$$c_h = c_0 + \alpha_2(h), \quad \alpha_2(h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0$$

Доказательство. Из предположений относительно φ следует $c_h \geqslant c_h^1$. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$c_0 + \gamma(h) \geqslant c_h, \quad \gamma(h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0 \tag{6.2}$$

Пусть $\mathbf{u}_t^*(\xi, \eta)$ — семейство бесконечно дифференцируемых полей, на котором реализуется верхняя грань в (2.2). Предположим, что $\mathbf{u}_t^*$ удовлетворяют условию нормировки

$$\int_D \varphi(\xi, \eta, \varepsilon_t^{\circ *}) |\rho_\xi| |\rho_\eta| d\xi d\eta = 1 \tag{6.3}$$

Здесь $\varepsilon_t^{\circ *}$ — тензор ε°, вычисленный по $\mathbf{u}_t^*$. Так как w_t^* алгебраически входят в выражения для $\varepsilon_t^{\circ *}$, то w_t^* можно считать финитными в D. Пусть $\delta(t) \to 0$ при $t \to 0$. Введем функции $u_{\delta(t)}(\xi, \eta)$, $v_{\delta(t)}(\xi, \eta)$, такие, что

$$u_{\delta(t)}|_{\partial D\times\Sigma} = v_{\delta(t)}|_{\partial D\times\Sigma} = 0 \tag{6.4}$$
$$\left(\frac{1}{|\rho_\xi|}\frac{\partial u_{\delta(t)}}{\partial \xi} + \frac{1}{|\rho_\eta|}\frac{\partial v_{\delta(t)}}{\partial \eta}\right)\Big|_{\partial D\times\Sigma} =$$
$$= -\left[\frac{1}{|\rho_\xi|}\frac{\partial u_t^*}{\partial \xi} + \frac{1}{|\rho_\eta|}\frac{\partial v_t^*}{\partial \eta} + \frac{1}{|\rho_\xi||\rho_\eta|}\left(u_t^*\frac{\partial|\rho_\eta|}{\partial \xi} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + v_t^*\frac{\partial|\rho_\xi|}{\partial \eta}\right)\right]\Big|_{\partial D\times\Sigma}$$

В силу леммы 6.1 функции $u_{\delta(t)}$, $v_{\delta(t)}$ и $\delta(t)$ можно выбрать так, что для вектор-функций $u_t: u_t = u_t^* + u_{\delta(t)}$, $v_t = v_t^* + v_{\delta(t)}$, $w_t = w_t^*$ выполнено соотношение

$$\frac{1}{c_0} = \lim_{t\to 0}\left\{\int_D \mathrm{fu}_t |\rho_\xi||\rho_\eta| d\xi\, d\eta \left[\int_D \varphi(\xi, \eta, \varepsilon_t^\circ) |\rho_\xi| |\rho_\eta| d\xi\, d\eta\right]^{-1}\right\}$$

где $\varepsilon_{\xi\xi t}^\circ$, $\varepsilon_{\xi\eta t}^\circ$, $\varepsilon_{\eta\eta t}^\circ$ вычисляются по $\mathbf{u}_t = (u_t, v_t, w_t)$. Из условий (6.4) следует, что

$$\overset{\bullet}{\varepsilon}_{\xi\xi t} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\eta\eta t}|_{\partial D\times\Sigma} = 0 \tag{6.5}$$

Векторные поля u_t удовлетворяют тем же краевым условиям, что и $\mathbf{u}_t^*$. Для получения (6.2) рассмотрим $\mathbf{u}_{th}$

$$u_{th} = u_t(\xi, \eta) + \zeta h\,[u_t^1(\xi, \eta) + u_t^2(\xi, \eta, \zeta h)]$$
$$v_{th} = v_t(\xi, \eta) + \zeta h\,[v_t^1(\xi, \eta) + v_t^2(\xi, \eta, \zeta h)]$$
$$w_{th} = w_t(\xi, \eta) + h w_{th}^1(\xi, \eta, \zeta)$$

Здесь

$$u_t^1 = -\frac{1}{|\rho_\xi|}\frac{\partial w_t}{\partial \xi} - K_\xi u_t, \quad v_t^1 = -\frac{1}{|\rho_\eta|}\frac{\partial w_t}{\partial \eta} - K_\eta v_t$$

Функции $u_t^2(\xi, \eta, \sigma)$, $v_t^2(\xi, \eta, \sigma)$ равны нулю на $\partial D \times \Sigma$ и

$$\left|\frac{\partial u_t^2}{\partial \xi}\right| + \left|\frac{\partial v_t^2}{\partial \xi}\right| + \left|\frac{\partial u_t^2}{\partial \eta}\right| + \left|\frac{\partial v_t^2}{\partial \eta}\right| + \left|\frac{\partial u_t^2}{\partial \sigma}\right| + \left|\frac{\partial v_t^2}{\partial \sigma}\right| < C_t$$

$$\left(\frac{1}{H_\xi}\frac{\partial u_t^2}{\partial \xi} + \frac{1}{H_\eta}\frac{\partial v_t^2}{\partial \eta}\right)\Bigg|_{\partial D\times\Sigma} = \left\{u_t\left[\frac{1}{H_\xi}\frac{\partial K_\xi}{\partial \xi} - \frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial H_\eta}{\partial \xi} - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{|\rho_\xi||\rho_\eta|}\frac{\partial|\rho_\eta|}{\partial \xi}\right)\right] + v_t\left[\frac{1}{H_\eta}\frac{\partial K_\eta}{\partial \eta} - \frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial H_\xi}{\partial \eta} - \right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \frac{1}{|\rho_\xi||\rho_\eta|}\frac{\partial|\rho_\xi|}{\partial \eta}\right)\right]\right\}\Bigg|_{\partial D\times\Sigma}$$

Существование u_t^2, v_t^2 с указанными свойствами следует из леммы 6.1 Функция w_{th}^1 определяется из уравнения

(6.6)
$$-\frac{\partial w_{th}^1}{\partial \zeta} + h w_{th}^1\left(\frac{K_\xi}{1-h\zeta K_\xi} + \frac{K_\eta}{1-h\zeta K_\eta}\right) =$$
$$= -w_t\left(\frac{K_\xi}{1-h\zeta K_\xi} + \frac{K_\eta}{1-h\zeta K_\eta}\right) + \frac{1}{|\rho_\xi|}\frac{\partial u_t}{\partial \xi} +$$
$$+ \frac{v_t}{|\rho_\xi||\rho_\eta|}\frac{\partial|\rho_\xi|}{\partial \eta} + \frac{1}{|\rho_\eta|}\frac{\partial v_t}{\partial \eta} + \frac{u_t}{|\rho_\xi||\rho_\eta|}\frac{\partial|\rho_\eta|}{\partial \xi} +$$
$$+ h\zeta\left[\frac{K_\xi}{H_\xi}\frac{\partial u_t}{\partial \xi} + \frac{K_\eta}{H_\eta}\frac{\partial v_t}{\partial \eta} + \frac{u_t}{h\zeta}\left(\frac{1}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial H_\eta}{\partial \xi} - \right.\right.$$
$$\left. - \frac{1}{|\rho_\xi||\rho_\eta|}\frac{\partial|\rho_\eta|}{\partial \xi}\right) + \frac{v_t}{h\zeta}\left(\frac{1}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial H_\xi}{\partial \eta} - \frac{1}{|\rho_\xi||\rho_\eta|}\frac{\partial|\rho_\xi|}{\partial \eta}\right) +$$
$$+ \frac{1}{H_\xi}\frac{\partial u_t^1}{\partial \xi} + \frac{v_t^1}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial H_\xi}{\partial \eta} + \frac{1}{H_\eta}\frac{\partial v_t^1}{\partial \eta} + \frac{u_t^1}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial H_\eta}{\partial \xi} +$$
$$\left. + \frac{1}{H_\xi}\frac{\partial u_t^2}{\partial \xi} + \frac{v_t^2}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial H_\xi}{\partial \eta} + \frac{1}{H_\eta}\frac{\partial v_t^2}{\partial \eta} + \frac{u_t^2}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial H_\eta}{\partial \xi}\right]$$

Из (6.4) — (6.6) следует, что w_{th}^1 можно выбрать обращающуюся в нуль на $\partial D \times \Sigma$, причем $\mathbf{u}_{th}$ удовлетворяет тем же краевым условиям, что и $\mathbf{u}_t^*$, и удовлетворяет условию несжимаемости.

Из (1.4) вытекает следующее неравенство:

(6.7)
$$\frac{1}{c_h} \geqslant \int_T \mathbf{f}\mathbf{u}_{th}\Delta d\xi\, d\eta\, d\zeta \left[\int_T \varphi(\xi, \eta, \mathbf{e}_{th})\,\Delta d\xi\, d\eta\, d\zeta\right]^{-1} \geqslant$$
$$\geqslant \left[\int_D \mathbf{f}\mathbf{u}_t^*\,|\rho_\xi|\,|\rho_\eta|\,d\xi\, d\eta + hE(t)\right] \times$$
$$\times \left[\int_D \varphi(\xi, \eta, \overset{\circ *}{\mathbf{e}_t})\,|\rho_\xi|\,|\rho_\eta|\,d\xi\, d\eta + hG(t)\right]^{-1}$$

где $E(t)$, $G(t)$, вообще говоря, стремятся к бесконечности при $t \to 0$. Выберем зависимость $t(h)$ так, что $hE(t(h)) \to 0$, $G(t(h))\, h \to 0$ при $h \to 0$. Тогда из (6.3), (6.7), следует (6.2), причем $\gamma(h)$ можно оценить через данные задачи. Теорема доказана.

Отметим, что нахождение величины c_h^1 — более простая задача, чем нахождение c_h, причем всегда имеет место неравенство $c_h^1 \leqslant c_h$.

Укажем некоторые случаи, когда выполнено (6.1). Рассмотрим

$$1/c_0(\sigma) = \sup_{\mathbf{u}(\xi,\eta)} \{A(\sigma) B^{-1}(\sigma)\}$$

$$A(\sigma) = \int_D \mathbf{fu}\Delta(\sigma)\, d\xi\, d\eta, \quad B(\sigma) = \int_D \varphi(\xi, \eta, \boldsymbol{\varepsilon})\, \Delta(\sigma)\, d\xi\, d\eta$$

$$\Delta(\sigma) = \Delta, \quad \zeta_1 h = \sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2 = \zeta_2 h$$

Теорема 6.2

$$c_h^1 \geqslant \inf_\sigma c_0(\sigma)$$

Доказательство. Утверждение теоремы эквивалентно неравенству

$$1 / c_h^1 \leqslant \sup_\sigma \{1 / c_0(\sigma)\}$$

Докажем это неравенство. Действительно,

$$\frac{1}{c_h^1} = \sup_{\mathbf{u}(\xi,\eta,\zeta)} \left\{\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} A(\zeta h)\, d\zeta \left[\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} B(h\zeta)\, d\zeta\right]^{-1}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2}\ \sup_{u(\xi,\eta)} \{A(\sigma) B^{-1}(\sigma)\}$$

При получении последнего неравенства используется предположение о том, что краевые условия для $\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta)$ не зависят от ζ.

Таким образом, для установления (6.1) достаточно показать, что

$$c_0(\sigma) \to c_0 \quad \text{при} \quad h \to 0 \tag{6.8}$$

Соотношение (6.8) можно получить, например, для поверхностей положительной или нулевой гауссовой кривизны. В последнем случае можно использовать формулы для общего решения системы уравнений бесконечно малых изгибаний развертывающихся поверхностей (3.1) [3].

Приведем еще класс задач, когда имеет место (6.8). Пусть для системы

$$\frac{1}{H_\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{v}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial H_\xi}{\partial \eta} - \frac{wK_\xi}{1 - h\zeta K_\xi} = e_{\xi\xi} \tag{6.9}$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{H_\xi}{H_\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{u}{H_\xi}\right) + \frac{H_\eta}{H_\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{v}{H_\eta}\right)\right] = e_{\xi\eta}$$

$$\frac{1}{H_\eta}\frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{u}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial H_\eta}{\partial \xi} - \frac{wK_\eta}{1 - h\zeta K_\eta} = e_{\eta\eta}$$

поставлена однозначно разрешимая для любых достаточно гладких $\boldsymbol{\varepsilon} = (e_{\xi\xi}, e_{\xi\eta}, e_{\eta\eta})$ однородная краевая задача, обратный оператор которой обозначим $G(\sigma) : \mathbf{u} = G(\sigma)\, \boldsymbol{\varepsilon}$. Пусть $G^*(\sigma)$ — оператор, сопряженный к $G(\sigma)$, т. е.

$$\int_D \Delta(\sigma)\, \boldsymbol{\varepsilon} G^*(\sigma)\, \mathbf{f}\, d\xi\, d\eta = \int_D \Delta(\sigma)\, \mathbf{f} G(\sigma)\, \boldsymbol{\varepsilon}\, d\xi\, d\eta$$

Тогда (величина β определена в п. 1)

$$\frac{1}{c_0(\sigma)} \leqslant \left[c_0(\sigma_1) \min_{\xi, \eta} \frac{\Delta(\sigma)}{\Delta(\sigma_1)}\right]^{-1} + \tag{6.10}$$
$$+ [\beta \min_{\xi, \eta} \Delta(\sigma)]^{-1} \max_{\xi, \eta} |(\Delta(\sigma) G^*(\sigma) - \Delta(\sigma_1) G^*(\sigma_1)) f|^*$$
$$|a|^* = \left(a_{\xi\xi}^2 + \frac{1}{2} a_{\xi\eta}^2 + a_{\eta\eta}^2\right)^{1/2}, \text{ если } a = (a_{\xi\xi}, a_{\xi\eta}, a_{\eta\eta})$$

Таким образом, если

$$\max_{\xi,\eta} |(G^*(\sigma) - G^*(\sigma_1)) \mathfrak{f}|^* \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0 \tag{6.11}$$

то из (6.10) следует (6.8). Подчеркнем, что (6.11) должно выполняться на фиксированном $\mathfrak{f}$.

7. Доказательство асимптотической точности оболочечного приближения для внешних нагрузок общего вида. Предположим, что краевые условия закрепления оболочки образуют, вообще говоря, переопределенную задачу для (6.9), причем такую, что, удалив некоторые условия из этой переопределенной задачи, получим однозначно разрешимую задачу с обратным оператором $G(\sigma) : \mathfrak{u} = G(\sigma)\mathfrak{f}$. Переопределенные условия накладываемые на $\mathfrak{u}$ приводят к тому, что ε образуют некоторое линейное подпространство в пространстве всех гладких вектор-функций. Предположим еще, что $G^*(\sigma)$ — непрерывный оператор из $C^k(D \times \Sigma) \to C(D \times \Sigma)$.

Рассмотрим сначала поля внешних сил следующего вида:

$$F_h^i = (\mathfrak{f}_i(\xi, \eta, \zeta, h), 0, 0), \quad i = 1, 2$$

Пусть $c_i(h)$ — коэффициенты предельной нагрузки, соответствующие этим полям сил.

Теорема 7.1. Если

$$\|\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_2\|_{C^k(D \times \Sigma)} \leqslant \alpha(h), \quad \alpha(h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0$$

то существует $\gamma(h) \to 0$ при $h \to 0$ такое, что $|c_2(h) - c_1(h)| \leqslant \gamma(h)$.

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно следует из неравенства

$$\sup_{\mathfrak{u}, \operatorname{div} \mathfrak{u}=0} \left\{I^{-1}(e) \int_D \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} [\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_2]\, \mathfrak{u} \Delta d\xi\, d\eta\, d\zeta\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\varepsilon(\sigma)} \left\{I^{-1}(\varepsilon) \int_D \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \Delta [\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_2]\, G(\sigma)\, \varepsilon d\xi\, d\eta\, d\zeta\right\} =$$
$$= \sup_{\varepsilon(\sigma)} \left\{I^{-1}(\varepsilon) \int_D \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \Delta (G^*(\sigma)[\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_2])\, \varepsilon d\xi\, d\eta\, d\zeta\right\}$$
$$I(e) = \int_D \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \varphi(\xi, \eta, e)\, \Delta d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

Перейдем к сведению внешних сил общего вида к силам специального вида, рассмотренным в п. 6.

Рассмотрим преобразования следующего интеграла:

$$\int_D f_\zeta^i(\xi,\eta,h)\,w(\xi,\eta,\zeta_i)\,\Delta_i d\xi\,d\eta = \tag{7.1}$$

$$= \int_D \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left[\frac{f_\zeta^i(\xi,\eta,h)}{\zeta_2-\zeta_1}\Delta_i\left(w(\xi,\eta,\zeta) - \int_{\zeta_i}^{\zeta}\frac{\partial w(\xi,\eta,\lambda)}{\partial\lambda}d\lambda\right)\right]d\xi\,d\eta\,d\zeta =$$

$$= \int_D \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{f_\zeta^i(\xi,\eta,h)}{\zeta_2-\zeta_1}\frac{\Delta_i}{\Delta}\Delta w(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta + \int_D \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} hP_\zeta^i e_{\zeta\zeta}\Delta d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

Отметим, что P_ζ^i — ограниченная функция своих аргументов.

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int_D \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f_\zeta(\xi,\eta,\zeta,h)\,w(\xi,\eta,\zeta)\,\Delta d\xi\,d\eta\,d\zeta = \int_D \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f_\zeta\left[w(\xi,\eta,\zeta_1) + \right.$$

$$\left. + \int_{\zeta_1}^{\zeta}\frac{\partial w(\xi,\eta,\lambda)}{\partial\lambda}d\lambda\right]\Delta d\xi\,d\eta\,d\zeta = \int_D \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} hP_\zeta^3 e_{\zeta\zeta}\Delta d\xi\,d\eta\,d\zeta + A$$

$$A = \int_D f_\zeta^3(\xi,\eta,\zeta)\,w(\xi,\eta,\zeta_1)\,d\xi\,d\eta$$

Функция P_ζ^3 — ограниченная функция своих аргументов. Далее, интеграл A преобразуется по формуле (7.1).

Перейдем к рассмотрению следующих интегралов:

$$A_i(u) = \int_D f_\xi^i(\xi,\eta,h)\,u(\xi,\eta,\zeta_i)\,\Delta_i d\xi\,d\eta = \int_D \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{f_\xi^i H_\xi \Delta_i}{\zeta_2-\zeta_1} \times \tag{7.2}$$

$$\times \left[\frac{u(\xi,\eta,\zeta)}{H_\xi} - \int_{\zeta_i}^{\zeta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{u(\xi,\eta,\lambda)}{H_\xi(\xi,\eta,\lambda)}\right)d\lambda\right]d\xi\,d\eta\,d\zeta =$$

$$= \int_D \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left[\frac{f_\xi^i\Delta_i}{\zeta_2-\zeta_1}u(\xi,\eta,\zeta) + h\Delta P_\xi^i e_{\xi\zeta} + h\Delta Q_\xi^i\frac{\partial w}{\partial\xi}\right]d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

В предположении достаточной гладкости f_ξ^i функции P_ξ^i, Q_ξ^i — также достаточно гладкие функции своих аргументов. Пусть f_ξ^i, f_η^i обращаются в нуль на тех частях $\partial D \times \Sigma$, где $w(\xi,\eta,\zeta)$ может быть отлична от нуля. Тогда (7.2) можно переписать в виде

$$A_i(u) = \int_D \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{f_\xi^i\Delta_i}{\zeta_2-\zeta_1}u(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta + \tag{7.3}$$

$$+ h\int_D \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \Delta P_\xi^i e_{\xi\zeta} d\xi\,d\eta\,d\zeta + h\int_D \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \Delta R_\xi^i w d\xi\,d\eta\,d\zeta, \quad i = 1, 2$$

Повторяя предыдущие преобразования, можно получить формулу для $A_i(v)$, аналогичную (7.3).

Далее рассмотрим интеграл

$$(7.4)\qquad A(u)=\int\limits_D\int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2} f_\xi(\xi,\eta,\zeta,h)\,u\Delta d\xi\,d\eta\,d\zeta=\int\limits_D\int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2}\Delta H_\xi f_\xi\Big[\frac{u(\xi,\eta,\zeta_1)}{H_\xi(\xi,\eta,\zeta_1)}+$$

$$+\int\limits_{\zeta_1}^{\zeta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{u(\xi,\eta,\lambda)}{H_\xi(\xi,\eta,\lambda)}\right)d\lambda\Big]d\xi\,d\eta\,d\zeta=\int\limits_D\int\limits_{\zeta_1}^{\zeta}\frac{1}{\zeta_2-\zeta_1}\left(\int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2}f_\xi d\zeta\right)\times$$

$$\times\, u\Delta d\xi\,d\eta\,d\zeta+h\int\limits_D\int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2}P_\xi{}^3 e_{\xi\zeta}d\xi\,d\eta\,d\zeta+h\int\limits_D\int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2}R_\xi{}^3 w d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

Формулу, аналогичную (7.4), можно получить для интеграла $A(v)$.

Итак, функционал, соответствующий мощности внешних сил общего вида, преобразуется в функционал, соответствующий мощности внешних сил, рассмотренных в п. 6, и функционал

$$(7.5)\qquad h\int\limits_D\int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2}a(\xi,\eta,h)\,w(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

где $a(\xi,\eta,h)$ — функция порядка единицы по h. Оболочечное приближение будет асимптотически точным, если (7.5) дает малый вклад в c_h. Условие малости этого вклада можно исследовать на основании свойств решений краевых задач для системы (6.9). Возможны случаи, когда (7.5) существенно влияет на c_h и оболочечное приближение приводит к неправильному результату.

Рассмотрим в качестве примера пластину

$$K_\xi=K_\eta=0,\quad(\xi,\eta)\in D,\quad -1\leqslant\zeta\leqslant 1$$

Оболочечное приближение в случае пластин совпадает с приближением плоского напряженного состояния [7].

Пусть краевые условия имеют вид $u\,|_{\partial D\times\Sigma}=0$ и на плоскости $\zeta=1$ действуют поверхностные силы с плотностью $h\,(f(\xi,\eta),0,0)$.

Формула (2.2) в этом случае имеет вид

$$\frac{1}{c_0}=\sup_{u(\xi,\eta)}\left\{\Phi_0^{-1}\int\limits_D fu\,d\xi\,d\eta\right\}$$

$$\Phi_0=2\int\limits_D\varphi\left(\xi,\eta,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{\partial v}{\partial\xi}\right),\frac{\partial v}{\partial\eta},-\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial v}{\partial\eta},0,0\right)d\xi\,d\eta$$

Если f — непрерывная функция, то $c_0>0$. Перейдем к формуле д я c_h. Преобразуем интеграл

$$\int\limits_D fu(\xi,\eta,1)\,d\xi\,d\eta=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_D\int\limits_{-1}^{1}f\left[u(\xi,\eta,\zeta)+\int\limits_{\zeta}^{1}\frac{\partial u(\xi,\eta,\lambda)}{\partial\lambda}d\lambda\right]d\xi\,d\eta\,d\zeta=J(\mathbf{u})$$

$$J(\mathbf{u})=\int\limits_T\left[\frac{1}{2}fu+hf(1+\zeta)e_{\zeta\xi}+\frac{h}{2}f_\xi{}'(1+\zeta)w\right]d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

Тогда

$$\frac{1}{c_h}=\sup_{\mathbf{u},\,\operatorname{div}\mathbf{u}=0}\{I^{-1}(e)\,J(\mathbf{u})\}$$

Положим

$$u = u_0(\xi, \eta) - \zeta\frac{\partial q}{\partial \xi}, \quad v = v_0(\xi, \eta) - \zeta\frac{\partial q}{\partial \eta}, \quad q = q(\xi, \eta)$$

$$w = \frac{1}{h}q - h\zeta\frac{\partial u_0}{\partial \xi} - h\zeta\frac{\partial v_0}{\partial \eta} + \frac{h^2\zeta^2}{2}\Delta q, \quad \Delta q = \frac{\partial^2 q}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2}$$

Из формулы для c_h находим

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{c_h} \geqslant \sup_{u_0,\, q}\left\{\Phi_1^{-1}\left[\int_D f u_0\, d\xi\, d\eta + \int_D f_\xi' q\, d\xi\, d\eta\right] = \frac{1}{c^*}\right. \tag{7.6}$$

$$\Phi_1 = 2\int_D \varphi\left(\xi, \eta, \frac{\partial u_0}{\partial \xi} - \zeta\frac{\partial^2 q}{\partial \xi^2}, \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial \eta} + \frac{\partial v_0}{\partial \xi}\right) - \zeta\frac{\partial^2 q}{\partial \xi\, \partial \eta},\right.$$

$$\left.\frac{\partial v_0}{\partial \eta} - \zeta\frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2}, \zeta\Delta q - \frac{\partial u_0}{\partial \xi} - \frac{\partial v_0}{\partial \eta}, 0, 0\right) d\xi\, d\eta$$

Используя, предложенный в [8] вариационный асимптотический метод, можно показать, что в (7.6) имеет место равенство.

Если $f_\xi' = 0$, то, как следует из результатов п. 7, оболочечное приближение является асимптотически точным. Однако, если $f_\xi' \neq 0$, то $c^* < c_0$ и оболочечное приближение приводит к неправильному результату.

В заключение отметим, что предложенный метод доказательства асимптотической точности позволяет получать количественные оценки различия c_0 и c_h, а также указывает границы применимости эвристических формул.

Поступила 28 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Вариационные методы в теории течений жестковязкопластических сред. Изд-во МГУ, 1971.
2. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.— Л., Гостехиздат, 1948.
3. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз, 1959.
4. *Ефимов Н. В.* Качественные вопросы теории деформаций поверхностей. Успехи матем. наук, 1948, т. 3, вып. 2.
5. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1946, т. 10, № 3.
6. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1970.
7. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. М., «Наука», 1969.
8. *Мосолов П. П.* Асимптотическая теория тонких прямолинейных панелей. Докл. АН СССР, 1972, т. 206, № 2.