

НЕЛИНЕЙНЫЕ УПРУГИЕ ВОЛНЫ В СТЕРЖНЯХ

Л. А. Островский, А. М. Сутин

(Горький)

Исследуются продольные нелинейные волны в твердом стержне с учетом дисперсии, обусловленной конечностью диаметра стержня. Рассмотрен процесс нелинейных искажений волны, включая образование стационарных нелинейных импульсов — солитонов. Исследуется их затухание с учетом реальных потерь в стержне. Делаются простейшие количественные оценки. Показано, что подобные процессы возможны для продольных волн в пластинках. Отмечается возможность независимого измерения упругих постоянных третьего порядка по нелинейным искажениям продольных волн в стержнях и пластинках.

При рассмотрении упругих волн конечной амплитуды в стержнях оказывается, что конечность диаметра стержня вносит существенную дисперсию такого типа, с которым связана возможность существования специфических нелинейных волн, в том числе стационарных уединенных импульсов — солитонов, что отмечалось авторами ранее¹. Аналогичной дисперсией обладают поперечные магнитоупругие волны [1], однако для них нелинейность кубична по амплитуде и может быть заметна лишь в особых случаях [2]. Дисперсия, связанная с конечностью периода кристаллической решетки [3], может сказываться лишь на столь высоких частотах, где длина свободного пробега фонона уже не превосходит длины волны. Следует также отметить, что концентрация энергии волны в стержне малого диаметра дает возможность существенно увеличить нелинейные эффекты, а волноводные свойства стержня позволяют наблюдать накопление нелинейных эффектов на значительном расстоянии без влияния дифракционной расходимости.

1. Рассмотрим продольные упругие волны в стержне конечного диаметра $2a$. Продольные волны в данном случае наиболее интересны. Для поперечных (изгибных и крутильных) волн нелинейные эффекты в случае изотропного материала выражены гораздо слабее, поскольку они сказываются лишь в третьем порядке по амплитуде. Кроме того, изгибные волны обладают сильной дисперсией, препятствующей нелинейным искажениям.

Будем рассматривать напряжения, при которых деформации еще упругие, и используем общепринятое разложение внутренней энергии по инвариантам тензора деформаций с точностью до кубического члена включительно [4]

$$(1.1) \quad E = \mu u_{ik}^2 + \left(\frac{K}{2} - \frac{\mu}{3} \right) u_{ii}^2 + \frac{A}{3} u_{ik} u_{ii} u_{kl} + B u_{ik}^2 u_{ii} + \frac{C}{3} u_{ii}^3$$

¹ Островский Л. А., Сутин А. М. Об акустических солитонах в твердотельных стержнях и пластинках. Материалы VIII Всес. акустической конференции, М., 1973.

Здесь u_i — компоненты вектора смещения, u_{ik} — компоненты тензора деформаций, μ — модуль сдвига, K — модуль объемной упругости, A , B , C — модули Ландау третьего порядка.

Характерная длина рассматриваемых волн считается много большей поперечных размеров стержня. Поэтому для них можно воспользоваться обычным предположением о том, что смещение в радиальном направлении пропорционально радиальной координате r и осевой деформации, т. е.

$$(1.2) \quad u_r = -\sigma r \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

где σ — коэффициент Пуассона, ось x направлена вдоль стержня. Интегрируя плотность энергии по поперечному сечению стержня и учитывая (1.2), получим одномерный лагранжиан

$$(1.3) \quad L = \int_S \left[\frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 - \varepsilon \right] dS = \\ = \frac{S\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \right)^2 + \sigma v \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial t} \right)^2 \right] - \frac{SE}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 - \frac{S\beta}{6} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^3 \\ \beta = 3E + 2A(1 - 2\sigma^3) + 6B(1 - 2\sigma + 2\sigma^2 - 4\sigma^3) + \\ + 2C(1 - 2\sigma)^3$$

Здесь ρ — плотность, S — поперечное сечение стержня, E — модуль Юнга, v — полярный радиус инерции (для цилиндрического стержня $v = a/\sqrt{2}$), β — параметр нелинейности. Для большинства твердых тел $\beta < 0$ [5].

Уравнение Лагранжа, соответствующее (1.3), имеет вид

$$(1.4) \quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \frac{\partial u_x}{\partial x} - L^2 \frac{\partial^4 u_x}{\partial t^2 \partial x^2} = 0 \\ (c^2 = E/\rho, L = \sigma v)$$

В силу сделанных предположений два последних члена в уравнении (1.4), описывающие эффекты нелинейности и дисперсии, малы (однако существенны для дальнейшего). При $\beta = 0$ (линейный случай) это уравнение неоднократно рассматривалось (см., например, [6]). При $L = 0$ (отсутствие дисперсии) оно имеет тот же вид, что и для продольной волны в свободном пространстве [5,7], однако в данном случае как скорость волны, так и параметр нелинейности β оказываются другими функциями параметров вещества.

Рассматривая нелинейную волну, бегущую в направлении x , перейдем к безразмерным координатам (см. также [7])

$$(1.5) \quad \tau = \frac{x}{L}, \quad \xi = \frac{x - ct}{L}, \quad v = -\frac{\beta}{2\rho c^3} \frac{\partial u_x}{\partial t}$$

Поскольку нелинейность и дисперсия малы, зависимость u_x от τ должна быть медленной по сравнению с зависимостью от ξ . Тогда подставляя (1.5) в (1.4), пренебрегая членами порядка $\partial^2/\partial\tau^2$ и интегрируя по ξ , получим

$$(1.6) \quad \frac{\partial v}{\partial \tau} + v \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 v}{\partial \xi^3} = 0$$

Более строгий способ получения подобных уравнений дан, например, в [8].

Таким образом, продольная скорость частиц стержня удовлетворяет уравнению Кортевега — де Вриза. Его решения неоднократно исследовались в связи с процессами различной физической природы (см., например, [9]). Обсудим вкратце свойства упругих волн в стержне в этом приближении.

2. Рассмотрим сначала достаточно сильную низкочастотную волну в стержне, когда нелинейность преобладает над дисперсией ($v_0 l^2/12 \gg 1$, где v_0, l — амплитуда и характерная длина волны в переменных (1.5)). Тогда на начальном этапе дисперсионным членом можно пренебречь, и решение соответствует простой волне

$$v = F(\xi - v\tau)$$

где F — произвольная функция. Деформация такой волны ведет к росту крутизны ее фронта и далее, формально, к неоднозначности (опрокидыванию). Если, например, при $x = 0$ переменная v представляет собой гармоническое колебание вида $v = v_0 \sin \omega t$ или импульс в виде полупериода этой синусоиды, т. е. $v = v_0 \sin \omega t$ при $0 < t < \pi/\omega$ и $v = 0$ вне этого интервала, то в рассматриваемом приближении волна «опрокидывается» на расстоянии $x_* = c/\omega v_0$.

При $x > x_*$ в волне образуется участок большой крутизны, где дисперсией пренебречь нельзя, и необходимо использовать уравнение (1.6) в полном виде. Поскольку потери отсутствуют, то при $x > x_*$ на фронте волны всегда возникают осцилляции, и волна конечной длительности разбивается на несколько уединенных импульсов (солитонов) вида

$$v = A \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\xi - w\tau}{\Delta} \right)$$

где избыточная (по отношению к линейной скорости c) скорость волны w и пространственная ширина солитона Δ (по уровню $0.8 A$) связаны с его амплитудой соотношениями

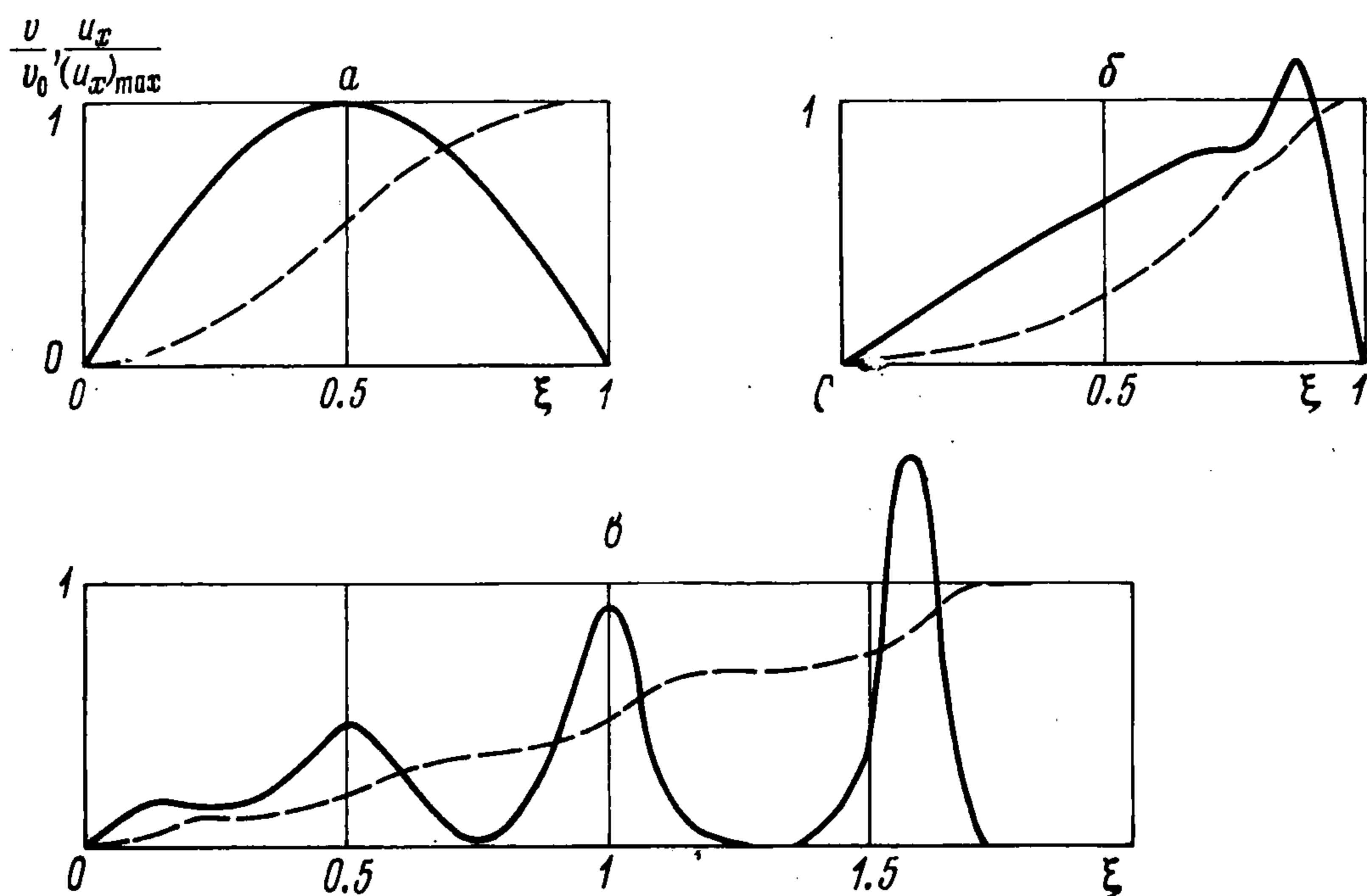
$$A = 3w, \quad \Delta = \sqrt{12/A}$$

Например, для цилиндрического стального стержня длина солитона в размерных переменных равна примерно $0.3a/\sqrt{M}$, где $M = c^{-1} \partial u_x / \partial t$ — акустическое число Маха.

Минимальная длина солитона достигается при максимально возможном упругом напряжении, для которого еще выполняется закон Гука. Для стали порог пластичности соответствует $M \approx 5 \cdot 10^{-4}$ [6]. При этом длина солитона составляет примерно семь диаметров стержня (т. е. предположение о малости поперечных размеров стержня по сравнению с длиной волны практически всегда выполняется для солитонов).

Искажения упругого импульса и его распад на солитоны схематично показаны на фигуре. Сплошными линиями представлена зависимость $v = v(\xi)$ при $x = 0$ (а), $x = x_*$ (б) и $x > x_*$ (в). Отметим, что амплитуда первого солитона примерно вдвое превышает исходную, что может способствовать появлению необратимых деформаций в веществе.

Синусоидальная волна достаточно большой интенсивности также разбивается на солитоны на каждом периоде, но на некотором расстоянии волна снова приобретает синусоидальную форму и этот процесс периодически повторяется [10].



Выше всюду говорилось о величине v , пропорциональной продольной скорости частиц среды. Иногда более характерной величиной является продольная деформация

$$u_x = -2\rho c^3 \beta^{-1} \int v dt$$

В частности, солитону скорости отвечает волна смещения в виде перепада величиной

$$(u_x)_{\max} = -\frac{2\rho c^3}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} A(\tau) \operatorname{sech}^2\left(\frac{\xi}{\Delta}\right) d\xi = 8\sqrt{3}\rho c^3 \beta^{-1} c^3 \sqrt{A(\tau)}$$

Следовательно, амплитуда солитонов скорости пропорциональна квадрату максимального смещения, а процесс распада на солитоны соответствует появлению расходящихся «ступенек» в профиле смещения (см. штриховые линии на фигуре). Поперечное же смещение боковой поверхности стержня согласно (1.2) изменяется во времени так же, как продольная скорость.

3. Чтобы оценить возможности наблюдения нелинейных волн, необходимо рассмотреть вопрос о влиянии потерь в стержне. Для этого следует добавить в левой части уравнения (1.6) соответствующий линейный оператор $P(v)$, вид которого зависит от механизма диссипации. Если из линейной теории известна частотная зависимость декремента затухания, т. е. мнимой части волнового числа $k''(\omega)$ для гармонических волн, то оператор $P(v)$ определяется из обратного преобразования Фурье. Например, в случае, когда потери определяются вязкостью или теплопроводностью в стержне, т. е. $k'' = \eta \omega^2$, получим $P(v) = \eta c^2 L^{-1} \partial^2 v / \partial \xi^2$ (значение η для продольных волн в стержне вычислено, например, в [4]). При этом (1.6) имеет вид уравнения Бюргера — Кортевега — де Вриза, которое также неоднократно рассматривалось в последнее время. В частности,

были выяснены особенности затухания солитонов при малых потерях [11,12]. При отсутствии дисперсии рассматривалось затухание ударных волн в упругих средах в рамках уравнения Бюргера [7].

Обычно затухание в твердом теле имеет другой характер. Эксперименты, проведенные для многих сред, включая металлы [13], показывают, что в линейном случае гармоники волн в стержне затухают как $\exp(-\epsilon kx/2)$, где k — волновое число, ϵ — постоянный коэффициент потерь. Этот закон справедлив для частот, на которых еще не сказывается рассеяние волны на отдельных кристаллах в структуре вещества; для металлов эти частоты простираются по меньшей мере до нескольких мегагерц.

Можно убедиться, что наличие таких потерь эквивалентно появлению в (1.6) члена вида

$$(3.1) \quad P(v) = \frac{\epsilon}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v}{\partial \xi'} \frac{d\xi'}{\xi - \xi'}$$

где интеграл понимается в смысле его главного значения.

Интересно отметить, что уравнение (1.6) с членом (3.1) описывает также распространение нелинейных ионно-звуковых волн в плазме с учетом затухания Л. Д. Ландау [14,15].

Приведем здесь некоторые результаты, существенные для рассматриваемых упругих волн.

Плавные возмущения, для которых можно пренебречь дисперсионным членом в (1.6), искажаются как «квазипростая» волна с увеличением крутизны фронта. Однако потери замедляют искажения, а при небольшой амплитуде волны опрокидывания вообще не происходит [16]. Для синусоидального входного возмущения опрокидывание наступает при условии

$$M > |0.08\rho c^2 \epsilon \beta^{-1}|$$

Таким образом, амплитуда волны должна превышать некоторое (не зависящее от частоты) пороговое значение. Например, для стали ($\epsilon \approx 2 \cdot 10^{-4}$) этому значению соответствует $M > 3 \cdot 10^{-7}$.

При больших амплитудах на крутом участке волны сказывается дисперсия. В волне появляются осцилляции и, как и выше, происходит разбиение на солитоны. Нетрудно найти закон затухания одиночного солитона, предполагая, что он сохраняет квазистационарную форму. Метод нахождения решения в этом случае (см., например, [17]) сводится к следующему: интегрируя (1.6) по ξ в бесконечных пределах, приходим к уравнению для A , интеграл которого имеет вид

$$(3.2) \quad A(\tau) = A(0) \left(1 + \frac{\gamma \epsilon \tau}{8\pi} \sqrt{\frac{A(0)}{3}} \right)^{-2}$$

$$\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 y \frac{\partial \operatorname{sech}^2 y'}{\partial y'} \frac{dy dy'}{(y - y')} \approx 0.725$$

Формула (3.2) справедлива при достаточно малых потерях (точнее, при $\epsilon/2\pi \ll 1$). На достаточно большом интервале амплитуда солитона перестает зависеть от его начальной амплитуды ($A \sim \tau^{-2}$). В результате амплитуды разных солитонов по мере затухания выравниваются.

В качестве примера рассмотрим распространение ультразвуковой волны в стальной проволоке диаметром 1 мм (задача, представляющая определенный практический интерес). Для волны с частотой 100 кГц и амплитудой скорости 50 см / сек (мощность порядка 5 вт) расстояние опрокидывания x_* составляет около 8 м. При $x \sim 20$ м на каждом периоде волны возникают несколько солитонов, наибольший из которых имеет амплитуду около 100 см / сек и длину около 1 см. Далее на расстоянии около 55 м произойдет обратное преобразование волны в синусоидальную. Наблюдение этого процесса представляется вполне реальным, поскольку затухание таких волн из-за потерь в стержне сказывается лишь на расстоянии порядка 100 м (потери на излучение в воздух также малы).

Для возможной реализации подобных эффектов представляет также интерес использование ограниченных стержней (резонаторов) с многократными пробегами волны. Для накопления нелинейных эффектов резонатор должен ограничиваться жесткими отражающими границами или быть замкнутым в кольцо. Заметим, что существенные нелинейные эффекты (параметрическая генерация и преобразование спектра) уже наблюдались экспериментально в кольцевых резонаторах [18].

Аналогичные эффекты возможны в тонких пластинках, где продольные волны обладают тем же типом дисперсии, что и в стержнях. Для них может быть использовано уравнение (1.4) с коэффициентами (b — толщина пластинки)

$$c^2 = \frac{E}{\rho(1-\sigma^2)}, \quad L^2 = \frac{b^2\sigma^2}{12(1-\sigma)^2}$$

$$\beta = \frac{3E}{\rho(1-\sigma^2)} + A \left[1 - \left(\frac{\sigma}{1-\sigma} \right)^3 \right] + 3B \left[1 - \frac{\sigma}{1-\sigma} + \left(\frac{\sigma}{1-\sigma} \right)^2 + 2 \left(\frac{\sigma}{1-\sigma} \right)^3 \right] + C \left(\frac{1-2\sigma}{1-\sigma} \right)^3$$

Важно отметить, что даже простейшие нелинейные эффекты (например, генерация второй гармоники) для продольных волн соответственно в свободном пространстве, стержнях и пластинках определяются тремя различными комбинациями трех констант третьего порядка, характеризующих твердое тело. Это, по-видимому, создает возможность измерения каждой из этих констант в отдельности нелинейными методами, которые ранее позволяли весьма точно определять только одну их комбинацию [5], отвечающую плоской волне в свободном пространстве.

Авторы признательны Е. Н. Пелиновскому за ценные замечания.

Поступила 17 IV 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Труэлл Р., Эльбаум Ч., Чик Б. Ультразвуковые методы в физике твердого тела. М., «Мир», 1972.
2. Давыдов Л. Н., Спольник З. А. Нелинейные волны в ферроупругих кристаллах. Физ. твердого тела, 1974, т. 16, вып. 6.
3. Косевич А. М. Основы механики кристаллической решетки. М., «Наука», 1972.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М., «Наука», 1965.
5. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Нелинейные явления при распространении упругих волн в твердых телах. Успехи физ. наук, 1970, т. 102, вып. 4.
6. Эйбрамсон Х. Н., Пласс Х. Дж., Риппергер Э. А. Распространение волн напряжения в стержнях и балках. Проблемы механики, вып. 3. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
7. Энгельбрехт Ю. К. Математическое моделирование ударных волн в упругих телах. Тр. симп. «Нелинейные и тепловые эффекты при переходных волновых процессах». Горький — Таллин, 1973.

8. Островский Л. А., Пелиновский Е. Н. О приближенных уравнениях для волн в средах с малыми нелинейностью и дисперсией. ПММ, 1974, т. 38, вып. 1.
 9. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973.
 10. Tappert F. D., Judice C. N. Recurrence of nonlinear ion-acoustic waves. Phys. Rev. Lett., 1972, vol. 29, No. 19.
 11. Ott E., Sudan R. N. Damping of solitary waves. Phys. Fluids, 1970, vol. 13, No. 6.
 12. Пелиновский Е. Н. О поглощении нелинейных волн в диспергирующих средах. ПМТФ, 1971, № 2.
 13. Бергман Л. Ультразвук и его применение в науке и технике. М., Изд-во иностр. лит., 1957.
 14. Ott E., Sudan R. N. Nonlinear theory of ion-acoustic waves with Landau damping. Phys. Fluids, 1969, vol. 12, No. 11.
 15. Пелиновский Е. Н. Нелинейные ионно-звуковые волны в неоднородной слабопоглощающей плазме. Изв. вузов. Радиофизика, 1971, т. 14, № 8.
 16. Pfirsch D., Sudan R. N. Conditions for the existence of shock-like solutions of Korteweg — De Vries equation with dissipation, Phys. Fluids, 1971, vol. 14, No. 5.
 17. Островский Л. А., Пелиновский Е. Н. Метод усреднения и обобщенный вариационный принцип для несинусоидальных волн. ПММ, 1972, т. 36, вып. 1.
 18. Островский Л. А., Папилова И. А., Сутин А. М. Параметрическая генерация и усиление акустических волн в кольцевом резонаторе на твердом теле. Ж. техн. физ., 1973, т. 43, вып. 10.
-