

УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКИХ НЕСИММЕТРИЧНЫХ КУСОЧНО-ВЫПУКЛЫХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

М. Ю. Жуков, Л. С. Срубщик

(Ростов-на-Дону)

Определяются асимптотические значения верхних критических нагрузок локальной потери устойчивости в зоне нарушения регулярности тонких упругих кусочно-выпуклых пологих несимметричных и непологих оболочек вращения под действием внешних разрывных нагрузок. Рассмотрены примеры пологих эллипсоидальных и непологих сферических оболочек с изломом меридианов вдоль параллели при равномерном внешнем давлении, а в случае гладкой поверхности под действием нагрузки, сосредоточенной вдоль параллели.

Применяется асимптотический метод, использующий наличие в уравнениях теории оболочек естественного малого параметра относительной тонкостенности. Асимптотические значения указанных критических нагрузок определяются с применением ЭВМ как наименьшие точки ветвления нелинейных уравнений внутреннего краевого эффекта, возникающего из-за нарушения гладкости срединной поверхности оболочки и внешней нагрузки.

1. К постановке задачи. Рассматривается нелинейный вариант теории среднего изгиба упругой полой оболочкой с кусочно-выпуклой срединной поверхностью, находящейся под действием поперечной нагрузки [1]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta^2 w - [w - z, F] &= q, \quad \varepsilon^2 \Delta^2 F + 1/2 [\dot{w}, w] - [z, w] = 0 \\ \varepsilon^2 F_{xx} &= \frac{1}{1 - \nu^2} \left[v_y + z_{yy} w + \frac{1}{2} w_y^2 + \nu \left(u_x + z_{xx} w + \frac{1}{2} w_x^2 \right) \right] \\ \varepsilon^2 F_{yy} &= \frac{1}{1 - \nu^2} \left[u_x + z_{xx} w + \frac{1}{2} w_x^2 + \nu \left(v_y + z_{yy} w + \frac{1}{2} w_y^2 \right) \right] \\ \varepsilon^2 F_{xy} &= - \frac{1}{2(1 + \nu)} [u_y + v_x + 2z_{xy} w + w_x w_y] \\ \Delta w &= w_{xx} + w_{yy}, \quad [F, w] = F_{xx} w_{yy} + F_{yy} w_{xx} - 2F_{xy} w_{xy} \end{aligned}$$

Все величины, входящие в уравнения (1.1), безразмерные и связаны с размерными соотношениями, приведенными в [2]. Здесь z — кусочно-выпуклая срединная поверхность с нарушением регулярности вдоль плоской линии Γ_1 . Предполагается, что оболочка занимает в плане конечную односвязную область D с границей Γ . Через z_1 обозначим строго выпуклую часть поверхности z , ограниченную кривой Γ_1 , а через z_2 — строго выпуклую поверхность, один край которой совпадает с Γ_1 , а другой — с границей оболочки Γ . Будем считать, что кривые Γ и Γ_1 — достаточно гладкие, не имеют общих точек и

$$(1.2) \quad z_1(s) = z_2(s) \neq 0, \quad z_{1\rho}(s) \neq z_{2\rho}(s), \quad s \in \Gamma_1; \quad z_2(s) = 0, \quad s \in \Gamma$$

Функция нагрузки $q(x, y)$ задается в виде

$$(1.3) \quad q(x, y) = q_0(x, y) + P(s) \delta(s), \quad s \in \Gamma_1$$

где $q_0(x, y)$ — достаточно гладкая функция в области $D + \Gamma$, $\delta(s)$ — дельта-функция, а $P(s)$ — интенсивность сосредоточенной нагрузки.

На контуре Γ выполняются граничные условия, отвечающие глухой заделке или подвижной шарнирной опоре края оболочки

$$(1.4) \quad \begin{aligned} 1) \quad & u = v = w = w_\rho = 0, \quad s \in \Gamma \\ 2) \quad & F = F_\rho = w = w_{\rho\rho} + \nu(w_{ss} - \kappa w_\rho) = 0, \quad s \in \Gamma \end{aligned}$$

Разрешимость и дифференциальные свойства решений краевых задач (1.1) — (1.4) получены в работе [3], из которой, в частности, следует, что при переходе через Γ_1 функции w и F остаются непрерывными вместе со своими первыми и вторыми производными (непрерывность углов поворота, напряжений и моментов)

$$(1.5) \quad \begin{aligned} w_1 = w_2, \quad w_{1\rho} = w_{2\rho}, \quad w_{1\rho\rho} = w_{2\rho\rho} \\ F_1 = F_2, \quad F_{1\rho} = F_{2\rho}, \quad F_{1\rho\rho} = F_{2\rho\rho}, \quad s \in \Gamma_1 \end{aligned}$$

В работах [4-7] показано, что для достаточно тонких гладких оболочек асимптотические значения верхней критической нагрузки определяются локальным выпучиванием вдали от края (принцип «Б» А. В. Погорелова) или явлениями в зоне краевого эффекта. Вместе с этим при нарушении гладкости срединной поверхности и нагрузки в окрестности Γ_1 также имеет место резкое изменение полей деформаций, моментов и усилий (явление внутреннего краевого эффекта). Это приводит к тому, что прощелкивание оболочки может начаться в окрестности Γ_1 при нагрузках меньших, чем в случае гладких поверхностей и нагрузок.

2. Построение асимптотики. Для определения верхних критических нагрузок здесь развивается асимптотический метод [2, 5-8].

Отметим, что здесь, как и в [2, 8], предполагается, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ число азимутальных волн вдоль линии Γ_1 не слишком быстро нарастает. Ограничиваясь построением главных членов, асимптотические разложения решений задач (1.1) — (1.4) при $\varepsilon^2 \rightarrow 0$ будем строить в виде

$$(2.1) \quad \begin{aligned} w_1(x, y, \varepsilon) &\sim w_{01}(x, y) + \varepsilon G_1(x, y, \varepsilon), \quad F_1(x, y, \varepsilon) \sim F_{01}(x, y) + \\ &+ \varepsilon H_1(x, y, \varepsilon) \\ w_2(x, y, \varepsilon) &\sim w_{02}(x, y) + \varepsilon G_2(x, y, \varepsilon) + \varepsilon g_0(x, y, \varepsilon) \\ F_2(x, y, \varepsilon) &\sim F_{02}(x, y) + \varepsilon H_2(x, y, \varepsilon) + \varepsilon h_0(x, y, \varepsilon) \end{aligned}$$

Здесь индекс $i = 1$, если $(x, y, z) \in z_1$, и $i = 2$, если $(x, y, z) \in z_2$. Функции w_{0i} , F_{0i} отвечают безмоментной форме равновесия оболочки, совпадающей с исходной поверхностью, и определяются из системы (1.1) при $\varepsilon^2 = 0$

$$(2.2) \quad w_{0i} = 0 \quad [z_i, F_{0i}] = q$$

с соответствующими (1.4) краевыми условиями

$$(2.3) \quad \begin{aligned} 1) \quad & [F_{02, \rho\rho} - \nu F_{02, ss} + \kappa_0 \nu F_{02, \rho}]_\Gamma = w_{02}(s) = 0, \quad s \in \Gamma \\ 2) \quad & F_{02}(s) = w_{02}(s) = 0, \quad s \in \Gamma \end{aligned}$$

Функции типа пограничного слоя g_0, h_0 построены в работе [2]. Они сосредоточены в окрестности края оболочки Γ и компенсируют невязки в выполнении граничных условий (1.4) у w_{02}, F_{02} . В силу строгой выпуклости поверхностей z_1 и z_2 следует, что уравнения в (2.2) эллиптические. Тогда можно показать, что

$$(2.4) \quad F_{01} = F_{02}, \quad F_{01,\rho} \neq F_{02,\rho}$$

если $P(s) \neq 0$ или $z_{1\rho}(s) \neq z_{2\rho}(s)$. Сравнивая (1.5) и (2.4), получим, что решения задач (2.2), (2.3) имеют худшие дифференциальные свойства, чем решения задач (1.1) — (1.4). Функции типа пограничного слоя G_i, H_i компенсируют разрывы производных, улучшая дифференциальные свойства у решений w_{0i}, F_{0i} , т. е. функции $w_{0i} + \varepsilon G_i, F_{0i} + \varepsilon H_i$ имеют в окрестности Γ_1 дифференциальные свойства, удовлетворяющие условиям (1.5). Таким образом, имеет место явление внутреннего пограничного слоя [9-15]. Однако, в отличие от указанных работ, здесь имеет место ветвление в зоне краевого эффекта.

Функции G_i, H_i сосредоточены в окрестности линии Γ_1 и определяются из уравнений внутреннего краевого эффекта. Для вывода этих уравнений перейдем к локальным координатам (ρ, φ) в окрестности и, используя (2.1), проведем построения [2], связанные с растяжением пограничного слоя по обе стороны Γ_1 . В результате для определения G_i, H_i ($i = 1, 2$) получим систему, которая при помощи замены переменных $\kappa(s)$ — кривизна контура Γ_1)

$$(2.5) \quad \frac{\partial H_i(t_i)}{\partial t_i} = (-1)^i \alpha_i, \quad \frac{\partial G_i(t_i)}{\partial t_i} = (-1)^i \beta_i, \quad t_1 = \frac{\rho}{\varepsilon} > 0$$

$$t_2 = -\frac{\rho}{\varepsilon} < 0$$

$$Q_i = 2f_i c_i^{-1}, \quad \tau_i = t_i (\kappa c_i)^{1/2}, \quad \kappa > 0$$

$$c_i = -\kappa^{-1} (z_{i,xx} \rho_y^2 + z_{i,yy} \rho_x^2 - 2z_{i,xy} \rho_x \rho_y)$$

$$f_i = -\kappa^{-1} (F_{0i,xx} \rho_y^2 + F_{0i,yy} \rho_x^2 - 2F_{0i,xy} \rho_x \rho_y)$$

сводится к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(2.6) \quad c_i \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial \tau_i^2} + \frac{1}{2} \beta_i^2 + c_i \beta_i = 0, \quad c_i \frac{\partial^2 \beta_i}{\partial \tau_i^2} + \frac{1}{2} Q_i c_i \beta_i - \alpha_i \beta_i - c_i \alpha_i = 0$$

Подставляя (2.1) в (1.5), учитывая (2.4) и снова применяя растяжение пограничного слоя, для системы (2.6) получаем условия сопряжения при $\tau_1 = \tau_2 = 0$ [8]

$$(2.7) \quad 1^\circ. \alpha_1(0) - \alpha_2(0) = F_{01,\rho}(0) - F_{02,\rho}(0)$$

$$2^\circ. c_1^{1/2} \frac{\partial \alpha_1(0)}{\partial \tau_1} = -c_2^{1/2} \frac{\partial \alpha_2(0)}{\partial \tau_2}$$

$$3^\circ. \beta_1(0) = \beta_2(0)$$

$$4^\circ. c_1^{1/2} \frac{\partial \beta_1(0)}{\partial \tau_1} = -c_2^{1/2} \frac{\partial \beta_2(0)}{\partial \tau_2}$$

Кроме того, из требования убывания на бесконечности функций пограничного слоя вытекают условия

$$(2.8) \quad \alpha_i(\infty) = \beta_i(\infty) = 0 \quad (i = 1, 2)$$

Таким образом, для произвольно заданных z и q , удовлетворяющих условиям (1.2) и (1.4), решение уравнений для главного члена в зоне внутреннего краевого эффекта сводится к одной и той же системе (2.6) — (2.8), в которой зависимость критической нагрузки от формы срединной поверхности и способа нагружения учитывается параметрами c_i , Q_i . Интересно, что система (2.6) — (2.8) совпадает с системой внутреннего краевого эффекта для полой оболочки вращения с кусочно-гладким меридианом.

Далее в качестве параметра нагрузки введем величину

$$(2.9) \quad \sigma = \max_s Q_2 = \max_s (2f_2 c_2^{-1}), \quad s \in \Gamma_1$$

Согласно [5] асимптотическое значение верхней критической нагрузки локальной потери устойчивости в окрестности Γ_1 определяется наименьшей точкой ветвления σ^* задачи (2.6) — (2.8). Решение задачи (2.6) — (2.8) ищем в виде

$$(2.10) \quad \alpha_k(\tau_k) = \sum_{m+n \geq 1} \gamma_{kmn}^{(1)} x_k^m y_k^n, \quad \beta_k(\tau_k) = \sum_{m+n \geq 1} \gamma_{kmn}^{(2)} x_k^m y_k^n$$

$$x_k = x_{0k} \exp(-r_k \tau_k), \quad y_k = y_{0k} \exp(-p_k \tau_k)$$

$$r_k = -a_k - ib_k, \quad p_k = -a_k + ib_k, \quad a_k = \left(\frac{1}{2} - \frac{r Q_k}{8} \right)^{1/2},$$

$$b_k = \left(\frac{1}{2} + \frac{r Q_k}{8} \right)^{1/2}$$

Очевидно, что все построения справедливы при $Q_k < 4$.

Подставляя (2.10) в (2.6) и собирая члены при одинаковых степенях x_k, y_k , определим коэффициенты $\gamma_{kmn}^{(i)}$. Затем подставляя (2.10) в (2.7), для определения x_{0k}, y_{0k} получим систему нелинейных алгебраических уравнений

$$(2.11) \quad G_1(\gamma^{(1)}) \equiv \sum_{m+n \geq 1} (\gamma_{1mn}^{(1)} x_{01}^m y_{01}^n - \gamma_{2mn}^{(1)} x_{02}^m y_{02}^n) = \frac{1}{2} (Q_1 c_1 - Q_2 c_2)$$

$$G_2(\gamma^{(1)}) \equiv \sum_{m+n \geq 1} [c_1^{1/2} (mr_1 + np_1) \gamma_{1mn}^{(1)} x_{01}^m y_{01}^n +$$

$$+ c_2^{1/2} (mr_2 + np_2) \gamma_{2mn}^{(1)} x_{02}^m y_{02}^n] = 0$$

$$G_1(\gamma^{(2)}) = 0, \quad G_2(\gamma^{(2)}) = 0$$

Для решения системы (2.11), (2.12) на ЭВМ применим метод, изложенный в [6]. Для определения точек ветвления системы (2.11) используется условие обращения в нуль ее якобиана. Контроль расчетов осуществляется при помощи первых интегралов системы (2.6).

Переходя к размерным переменным, получим формулу для определения асимптотических значений критической нагрузки локальной потери устойчивости в окрестности линии Γ_1

$$(2.12) \quad p^* \approx \frac{E}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \frac{h^2}{a^2} \sigma^*(c_i, Q_i)$$

В случае, когда $F_{01,ss} = F_{02,ss} = 0$ при $s \in \Gamma_1$, величина σ^* зависит лишь от двух параметров: $c_1/c_2, Q_1/Q_2$.

3. Примеры для пологих оболочек. 1°. Эллипсоидальная оболочка с кусочно-выпуклой поверхностью под действием равномерной внешней нагрузки при подвижном шарнирном опирании края. Уравнения срединной поверхности оболочки и контуров Γ и Γ_1 зададим в виде

$$(3.1) \quad z_1 = M - 1/2 (cx^2 + by^2), \quad z_2 = 1 - 1/2 (k_1x^2 + k_2y^2), \quad z_2|_{\Gamma} = 0 \\ X = \left(\frac{2}{k_1}\right)^{1/2} \cos \varphi, \quad Y = \left(\frac{2}{k_2}\right)^{1/2} \sin \varphi, \quad X_1 = \lambda X, \quad Y_1 = \lambda Y, \quad k_i > 0$$

Из условия $z_1(\Gamma_1) = z_2(\Gamma_1) = 0$ следует, что

$$(3.2) \quad c = \lambda^{-2}k_1(M - 1 + \lambda^2), \quad b = \lambda^{-2}k_2(M - 1 + \lambda^2)$$

Функции F_{01} , F_{02} определяются из уравнений (2.2) и имеют вид

$$(3.3) \quad F_{01} = \frac{q}{2k_1k_2} \left(1 - \lambda^2 + \frac{k_1\lambda^2}{c}\right) - \frac{q}{4cb} (cx^2 + by^2) \\ E_{02} = \frac{q}{4k_1k_2} (2 - k_1x^2 - k_2y^2)$$

При помощи (3.1) — (3.3) из (2.5) получим

$$(3.4) \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{c}{k_1} = \frac{b}{k_2}, \quad Q_1 = \frac{q}{cb}, \quad Q_2 = \frac{q}{k_1k_2}, \\ [F_{01, \rho} - F_{02, \rho}]_{\rho=0} = \frac{Q_1c_1 - Q_2c_2}{2}$$

Асимптотические значения критической нагрузки локальной потери устойчивости в окрестности линии Γ_1 в размерных переменных имеют вид

$$(3.5) \quad p^* = \frac{E\sigma^*}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \frac{h^2}{R_1R_2}$$

Из (3.4) следует, что $F_{01,ss} = F_{02,ss} = 0$ при $s \in \Gamma_1$, $Q_1/Q_2 = (c_2/c_1)^2$, и величина σ^* зависит лишь от параметра c_1/c_2 . Ниже приведены некоторые значения $\sigma^* = \sigma^*(c_1/c_2)$. При c_1/c_2 , равном 1.005, 1.044, 1.094, 1.122, 1.316, 1.438, 1.669, величины σ^* соответственно равны 3.968, 3.734, 3.449, 3.303, 2.562, 2.248, 1.827.

2°. Эллипсоидальная оболочка с гладкой поверхностью под действием нагрузки интенсивности P , сосредоточенной вдоль контура Γ_1 , при подвижном шарнирном опирании края оболочки.

Уравнения для Γ и Γ_1 записаны в (3.1), а уравнения срединной поверхности и нагрузки имеют вид

$$(3.6) \quad z = 1 - 1/2 (k_1x^2 + k_2y^2), \quad q = P\delta(s), \quad s \in \Gamma_1$$

Функции F_{0i} определяются из задачи (2.2), 2) из (2.3) и (2.4)

$$(3.7) \quad [z, F_{01}] \equiv -k_1F_{0i,yy} - k_2F_{0i,xx} = P\delta(s), \quad F_{02}|_{\Gamma} = 0$$

Можно показать, что

$$(3.8) \quad F_{01} = 2A \ln \lambda, \quad F_{02} = A \ln \frac{k_1x^2 + k_2y^2}{2}, \quad Q_1 = 0, \quad Q_2 = \frac{2A}{\lambda^2} \\ A = P\lambda \sqrt{2 \max(k_1, k_2)} \frac{E(l)}{\pi k_1k_2}, \quad l^2 = 1 - \min\left(\frac{k_1}{k_2}, \frac{k_2}{k_1}\right)$$

Здесь $E(l)$ — полный нормальный эллиптический интеграл Лежандра второго рода [16]. Асимптотическое значение критической нагрузки в размерных переменных имеет вид

$$(3.9) \quad p^* = \frac{1.309E}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \left[\frac{a\lambda\pi}{2\sqrt{2 \max(k_1, k_2)} E(l)} \right] \frac{h^2}{R^2}$$

3°. Глухо заделанная по краю эллипсоидальная оболочка с кусочно-выпуклой поверхностью при равномерной внешней нагрузке. В этом случае срединная поверхность и уравнения контуров Γ и Γ_1 задаются формулами (3.1). Функции F_{0i} определяются из

уравнений (2.2) при краевом условии 1) из (2.3) и (2.4) и имеют вид

$$(3.10) \quad F_{01} = c_0 + q\{[Ka(k_1^2 - k_2^2) + k_1]x^2 + [k_2 - Kb(k_1^2 - k_2^2)]y^2\} [2(ak_2 + bk_1)]^{-1}$$

$$F_{02} = -qK \left\{ (k_2 + \nu k_1) \frac{x^2}{2} + (k_1 + \nu k_2) \frac{y^2}{2} \right\} + Ax + By + D,$$

$$K = (k_1^2 + k_2^2 + 2\nu k_1 k_2)^{-1}$$

Значения коэффициентов A, B, D, c_0 не существенны. Коэффициенты c_i, Q_i в системе (2.6) определяются из (3.10) при помощи (2.5) и формул (2.6) работы [2]. Из формулы (3.10) следует, что $F_{0i,ss} \neq 0$ при $s \in \Gamma_1$. Асимптотическое значение критической нагрузки p в размерных переменных имеет вид

$$p = \frac{E\sigma^*}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \frac{h^2}{R_1 R_2}$$

Величина σ^* при каждом фиксированном φ определяется как наименьшая точка ветвления задачи (2.6) — (2.8).

4. Тонкая ортотропная непологая упругая оболочка вращения. Применим асимптотический метод для определения критических нагрузок к уравнениям Рейсснера [17, 18] осесимметричных деформаций тонких непологих оболочек вращения с кусочно-гладким меридианом

$$(4.1) \quad \begin{aligned} & \sigma_i \varepsilon^2 \left\{ [r_i(\Phi_i - \varphi_i)]' - \frac{\beta_i^2}{r_i} \cos \Phi_i (\sin \Phi_i - \sin \varphi_i) + \nu_i \Phi_i' (\cos \Phi_i - \right. \\ & \left. - \cos \varphi_i) \right\} = \beta_i^2 (\Psi_i \sin \Phi_i - T_i \cos \Phi_i), \quad T_i = - \int_{s_i}^s r_i q_i ds \\ & \mu_i \varepsilon^2 \left\{ (r_i \Psi_i')' - \frac{\beta_i^2}{r_i} \Psi_i \right\} = \cos \Phi_i - \cos \varphi_i - \mu_i \varepsilon^2 \left\{ (r_i^2 p_i)' + \right. \\ & \left. + \left(\beta_i^2 \frac{\sin \Phi_i}{r_i} + \nu_i \Phi_i' \right) (\Psi_i \sin \Phi_i - T_i \cos \Phi_i) + \right. \\ & \left. + \nu_i r_i (p_i \cos \Phi_i + q_i \sin \Phi_i) \right\} \end{aligned}$$

Все величины, входящие в (4.1), безразмерные и связаны с размерными по формулам

$$(4.2) \quad \varepsilon^2 = \left(\frac{h_1 h_2}{a^2 \gamma^2} \right)^{1/2}, \quad \gamma = (\gamma_1 \gamma_2)^{1/2}, \quad \gamma_i^2 = 12(1 - \nu_{i0} \nu_{is}), \quad \beta_i^2 = \frac{E_{i0}}{E_{is}} = \frac{\nu_{i0}}{\nu_{is}}$$

$$\nu_i = \nu_{i0}, \quad r_{0i} = r_i a, \quad z_{0i} = z_i a, \quad \operatorname{tg} \varphi_i = \frac{z_i'}{r_i'}, \quad r_1(0) = r_2(0),$$

$$z_1(0) = z_2(0) = 0$$

$$\varphi_1(0) \neq \varphi_2(0), \quad \mu_1^2 = (C_2 C_1^{-1}), \quad \mu_2 = \mu_1^{-1}, \quad \sigma_1^2 = D_1 D_2^{-1},$$

$$\sigma_2 = \sigma_1^{-1}$$

$$C_i = E_{i0} h_i, \quad D_i = E_{i0} h_i^3 \gamma_i^{-2}, \quad E^2 = E_{10} E_{20}, \quad ()' \equiv \frac{d}{ds} ()$$

$$\{\Psi_{Hi}, \Psi_{Vi}, p_{Hi}, p_{Vi}\} = E \gamma \varepsilon^4 \{a^2 \Psi_i, a^2 T_i, p_i, q_i\}$$

$$M_i = \frac{a M_{si}}{D_i} = (\Phi_i - \varphi_i)' + \nu_i \frac{\sin \Phi_i - \sin \varphi_i}{r_i}$$

$$u_i = \frac{u_{0i} C_i}{a^2 \gamma E \varepsilon^2} = r_i \Psi_i' + r_i^2 p_i - \nu_i \{\Psi_i \cos \Phi_i - T_i \sin \Phi_i\}$$

Здесь $z_{0i}(s)$, $r_{0i}(s)$ — параметрические уравнения срединной поверхности, где s — длина дуги меридиана, отсчитываемая от точки излома $s = 0$; $i = 1$ при $s_1 \leq s < 0$ и $i = 2$ при $0 < s \leq s_2$; $E_s E_\theta$, ν_s , ν_θ — соответственно модули Юнга и коэффициенты Пуассона в меридиональном и окружном направлениях; a — характерный размер и h — толщина оболочки; ε^2 — параметр относительной тонкостенности, β^2 — коэффициент ортотропности. Остальные обозначения аналогичны принятым в [6, 18, 19].

Предполагается, что в интервалах $s_1 \leq s < 0$ и $0 < s \leq s_2$ срединная поверхность оболочки достаточно гладкая и строго выпуклая, а нагрузка имеет вид

$$(4.3) \quad p(\Phi(s), s) = p_0(\Phi(s), s) + p_1 \delta(s), \quad q(\Phi(s), s) = \\ = q_0(\Phi(s), s) + q_1 \delta(s)$$

В точке излома $s = 0$ изгибающий момент, напряжение и горизонтальное перемещение остаются непрерывными, а угол между элементами оболочки не меняется в процессе деформации, т. е.

$$(4.4) \quad \sigma_1 M_1(0) = \sigma_2 M_2(0), \quad \Psi_1(0) = \Psi_2(0) \\ \mu_1 u_1(0) = \mu_2 u_2(0), \quad \Phi_1(0) - \varphi_1(0) = \Phi_2(0) - \varphi_2(0)$$

Наконец, при $s = s_1$ и $s = s_2$ должны быть заданы граничные условия, соответствующие способу закрепления края оболочки [6].

В случае замкнутой оболочки имеем

$$(4.5) \quad \Phi_i(s_i) = \Psi_i(s_i) = \varphi_i(s_i) = r_i(s_i) = 0, \quad i = 1, 2$$

Ограничиваясь построением главных членов асимптотики, решение задачи (4.1) — (4.4) строим в виде

$$(4.6) \quad \Phi_i(s, \varepsilon) \sim \Phi_{i0}(s) + G_{i0}(t_i) + g_{i0}^{(1)}\left(\frac{s-s_1}{\varepsilon}\right) + \\ + g_{i0}^{(2)}\left(\frac{s_2-s}{\varepsilon}\right), \quad t_1 = -\frac{s}{\varepsilon} > 0 \\ \Psi_i(s, \varepsilon) \sim \Psi_{i0}(s) + H_{i0}(t_i) + h_{i0}^{(1)}\left(\frac{s-s_1}{\varepsilon}\right) + \\ + h_{i0}^{(2)}\left(\frac{s_2-s}{\varepsilon}\right), \quad t_2 = \frac{s}{\varepsilon} > 0$$

Функции $\Phi_{i0}(s)$, $\Psi_{i0}(s)$ с точностью до величин порядка ε^2 являются решениями уравнений (4.1) и отвечают безмоментной напряженной форме равновесия. Они определяются из (4.1) при $\varepsilon = 0$ и равны

$$(4.7) \quad \Phi_{i0}(s) = \varphi_i(s), \quad \varphi_1(0) \neq \varphi_2(0), \quad \Psi_{10}(0) \neq \Psi_{20}(0)$$

$$\Psi_{i0}(s) = -\operatorname{ctg} \varphi_i(s) \int_{s_i}^s r_i(\xi) q_i(\varphi_i(\xi), \xi) d\xi, \quad i = 1, 2$$

Таким образом, имеет место явление внутреннего краевого эффекта, и функции пограничного слоя $G_{i0}(t_i)$, $H_{i0}(t_i)$, сосредоточенные в окрестности параллели $s = 0$, компенсируют невязки в выполнении условий (4.4) у Φ_{i0} , Ψ_{i0} .

Функции пограничного слоя $g_{i0}^{(k)}$, $h_{i0}^{(k)}$ ($i, k = 1, 2$) сосредоточены в окрестности края оболочки ($s = s_1$, $s = s_2$) и для различных случаев крае-

вых условий построены в [6, 19]. При выполнении условий (4.5) эти функции в разложениях (4.6) должны быть опущены.

Для определения $G_{i0}(t_i)$, $H_{i0}(t_i)$ выводим систему уравнений внутреннего краевого эффекта на полуограниченной прямой. При помощи замены переменных

$$(4.8) \quad \varphi_i^* = |\Phi_{i0}(0)|, \quad 0 < \varphi_i^* < \pi, \quad G_{i0} = G_i \operatorname{sign} \Phi_{i0}(0), \quad H_{i0} = \left(\frac{\nu_i}{\mu_i}\right)^{1/2} \frac{H_i}{\beta_i}$$

$$t_i = \tau_i \left[\frac{r_i(0) (\sigma_i \mu_i)^{1/2}}{\beta_i \sin \varphi_i^*} \right]^{1/2}, \quad T_{i0}(0, \kappa) =$$

$$= - \frac{Q_i \sin^2 \varphi_i^*}{2\beta_i} \left(\frac{\sigma_i}{\mu_i}\right)^{1/2} \operatorname{sign} \Phi_{i0}(0)$$

$$\xi_2 = \frac{\beta_2 \sigma_1}{\beta_1 \mu_1}, \quad \xi_4 = \operatorname{sign} \frac{\Phi_{10}(0)}{\Phi_{20}(0)}, \quad \xi_3 = \left(\frac{\sin \varphi_1^*}{\sin \varphi_2^*} \xi_2\right)^{1/2} \mu_1,$$

$$\xi_1 = \xi_3 \xi_4 \frac{\beta_1 \sigma_1}{\beta_2 \mu_1}$$

Эти уравнения всегда сводятся к одной и той же системе

$$(4.9) \quad \sin \varphi_i^* \frac{d^2 G_i}{d\tau_i^2} + \frac{1}{2} Q_i^* \sin \varphi_i^* \sin G_i - H_i \sin(G_i + \varphi_i^*) = 0$$

$$\sin \varphi_i^* \frac{d^2 H_i}{d\tau_i^2} + \cos \varphi_i^* - \cos(G_i + \varphi_i^*) = 0$$

с условиями при $\tau_i = 0$, вытекающими из (4.4), а также условиями убывания G_i , H_i на бесконечности

$$(4.10) \quad \xi_1 \frac{dG_1(0)}{d\tau_1} + \frac{dG_2(0)}{d\tau_2} = 0, \quad \xi_2 \left[H_1(0) - \frac{1}{4} Q_1 \sin 2\varphi_1^* \right] -$$

$$- H_2(0) + \frac{1}{4} Q_2 \sin 2\varphi_2^* = r_1 p_1$$

$$\xi_3 \frac{dH_1(0)}{d\tau_1} + \frac{dH_2(0)}{d\tau_2} = 0, \quad \xi_4 G_1(0) - G_2(0) = 0$$

$$G_i(\infty) = H_i(\infty) = 0, \quad i = 1, 2$$

В качестве параметра нагрузки κ удобно положить

$$(4.11) \quad \kappa = Q_2 \neq 0, \quad \kappa = \kappa(\varphi_1^*, \varphi_2^*, l, p_1), \quad [l = \frac{Q_1}{Q_2}]$$

Способ решения задачи (4.9) — (4.10) описан в п. 2.

5. Примеры для непологих оболочек. 1°. Замкнутая изотропная оболочка под действием гидростатической нагрузки. В этом случае имеем

$$(5.1) \quad q_i = Q \cos \Phi_i(s), \quad p_i = -Q \sin \Phi_i(s), \quad \sigma_i = \mu_i = \beta_i = 1$$

$$\varphi_1^* = b_1, \quad \varphi_2^* = \pi - b_2, \quad \cos \varphi_i(s) = r_i'(s), \quad \xi_2 = \xi_4 = 1$$

$$T_{i0}(s) = -\frac{1}{2} Q r_i^2(s), \quad Q_i = \frac{Q r_i^2(0)}{\sin^2 b_i}, \quad \xi_1 = \xi_3 = \left(\frac{\sin b_1}{\sin b_2}\right)^{1/2}$$

Здесь Q — интенсивность внешнего давления; b_1, b_2 — углы элемента оболочки с осью абсцисс в точке излома меридиана. Переходя к размерным переменным, для асимптотического значения критического давления Q^* получим

$$(5.2) \quad Q^* = \frac{Eh^2}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \frac{\sin b_1 \sin b_2}{r_{10}^2(0)} \kappa^*(b_1, b_2)$$

Здесь значения $\eta = \kappa^* \sin b_1 (\sin b_2)^{-1}$ приведены на фиг. 1. Номера 1—4 относятся соответственно к значениям $b_2 = 0.2, 0.5, 0.9, 1.571$. В случае оболочки, состоящей из сферических сегментов радиуса aR_1 и aR_2 , имеем

$$(5.3) \quad \varphi_1(s) = b_1 + \frac{s}{R_1}, \quad \varphi_2(s) = \pi - b_2 + \frac{s}{R_2}, \quad r_{i0}(s) = aR_i \sin \varphi_i(s) \\ z_{10}(s) = aR_1 [\cos b_1 - \cos \varphi_1(s)], \quad z_{20}(s) = -aR_2 [\cos b_2 - \\ - \cos \varphi_2(s)], \quad r_{10}(0) = r_{20}(0)$$

Тогда из (5.2) выводим

$$(5.4) \quad Q^* = \frac{E\kappa^*(b_1, b_2)}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \frac{h^2}{a^2 R_1 R_2}$$

2°. Сферическая оболочка под действием гидростатического давления Q и равномерно распределенного вдоль кольца усилия P . В этом случае срединная поверхность оболочки и нагрузка задаются в виде

$$r_{i0}(s) = a \sin \varphi_i(s), \quad \varphi_i(s) = b + s, \quad \sigma_i = \mu_i = \beta_i = 1 \\ p = -Q \sin \Phi(s) - P \sin \Phi(0) \delta(s), \quad q = Q \cos \Phi(s) + P \cos \Phi(0) \delta(s)$$

где b — угол наклона элемента оболочки к оси абсцисс в точке приложения сосредоточенного усилия P . Из (4.7), (4.8) и последнего уравнения (4.1) получим

$$T_{10}(s) = -1/2 Q \sin^2 \varphi_1(s), \quad \Psi_{10}(s) = -1/4 Q \sin 2\varphi_1(s), \quad s < 0 \\ T_{20}(s) = -1/2 Q \sin^2 \varphi_2(s) - P \sin b, \quad \Psi_{20}(s) = -1/4 Q \sin 2\varphi_2(s) - \\ - P \cos b, \quad s > 0 \\ \Psi_{10}(0) \neq \Psi_{20}(0), \quad Q_1 = Q, \quad Q_2 = Q + 2P/\sin b, \quad b \neq 0$$

Решая задачу (4.1) — (4.4), получим нейтральные кривые, соответствующие тем значениям P и Q , при которых происходит локальная потеря устойчивости в окрестности линии приложения сосредоточенной нагрузки. При потере устойчивости гладкой сферической оболочки под действием гидростатической [нагрузки критическое значение вертикальной составляющей функции напряжений T^* на краю определяется формулой]

$$T^*(b_0) = -1/2 \sigma^*(b_0) \sin^2 b_0$$

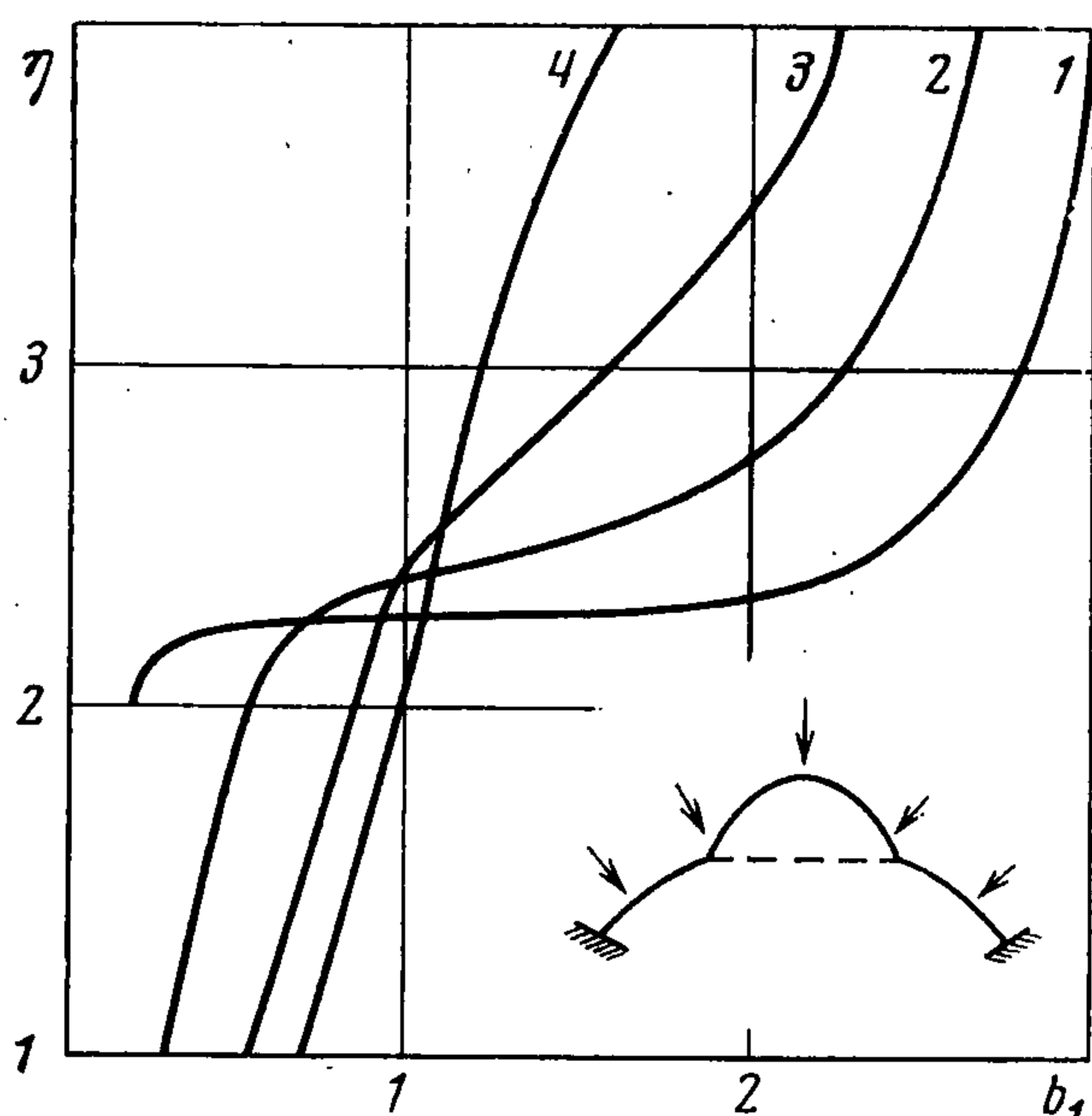
где b_0 — угол раствора оболочки, σ^* — значение верхней критической нагрузки потери устойчивости, которое определяется способом закрепления края и приведено в [6, 19, 20]. В рассматриваемом случае критическое значение вертикальной составляющей функции напряжения равно $T_2^*(b_0 - b)$, и нейтральная кривая потери устойчивости определяется уравнением

$$T^*(b_0) = T_2^*(b_0 - b) \text{ или } Q = \sigma^*(b_0) - \frac{2P \sin b}{\sin^2 b_0}$$

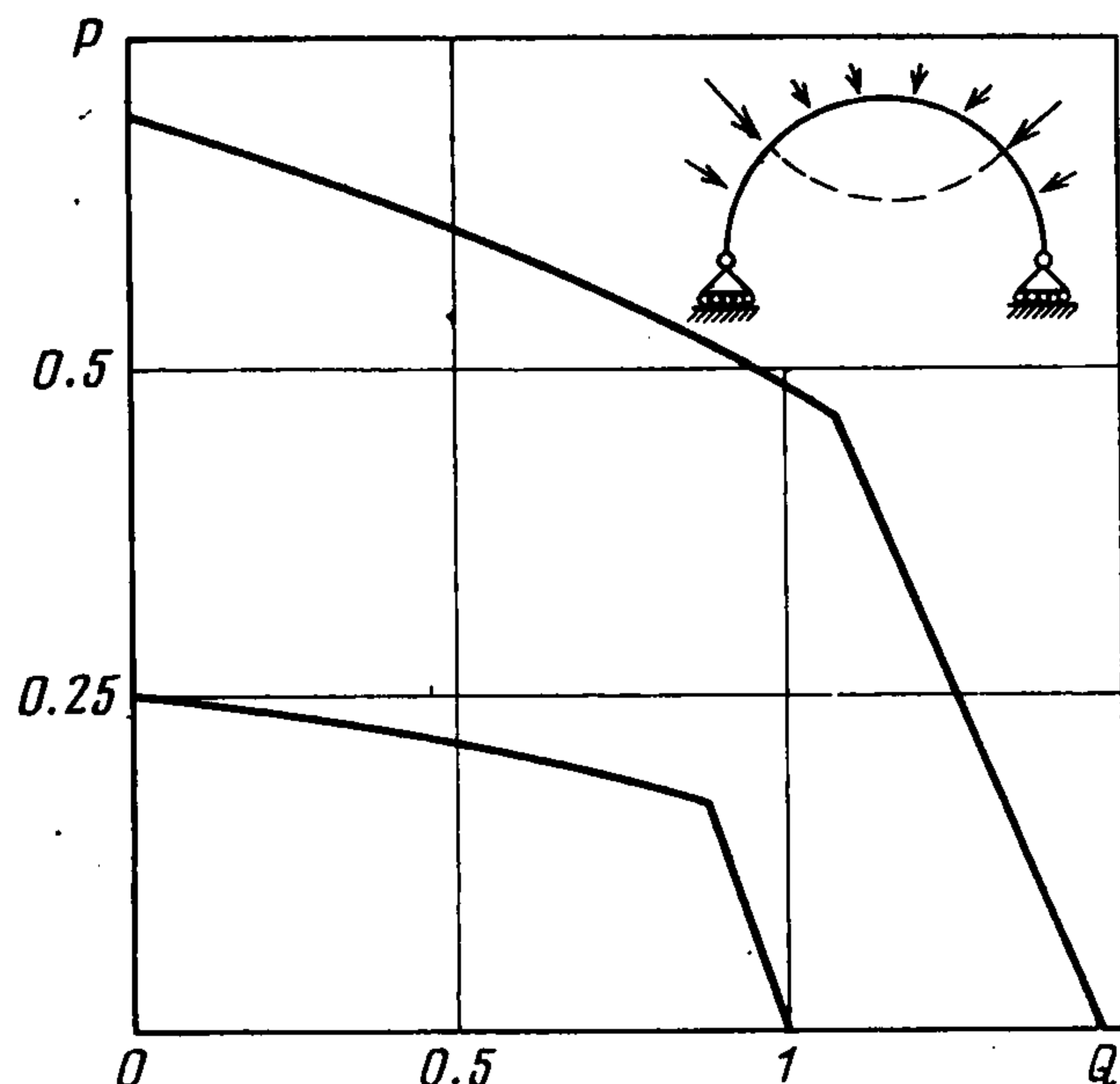
Общие нейтральные кривые должны состоять из участков, отвечающих локальной потере устойчивости вблизи края, и участков, отвечающих локальной потере устойчивости в окрестности линии приложения нагрузки P . Для некоторых значений b и b_0 в случае подвижного шарнирного закрепления края эти кривые приведены на фиг. 2. Из фиг. 2 видно, что для $b_0 = 1.38$ и $b = 0.5$ (кривая 1) при $Q = 1.00$ и $P = 0.486$ потеря устойчивости начинается в окрестности линии приложения сосредоточенной нагрузки, а при $Q = 1.25$ и $P = 0.252$ — вблизи края. Кривая 2 соответствует случаю $b = 0.2$, $b_0 = 0.8$.

3°. Влияние закрепления края на величину верхней критической нагрузки для оболочки, имеющей форму сферических сегментов. Используя результаты работы [6], запишем в размерном виде асимптотическое значение верхней критической нагрузки локальной потери устойчивости вблизи края оболочки

$$Q_1^* = \frac{E\sigma^*(b)}{\gamma} \frac{h^2}{(aR_2)^2}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Здесь aR_2 — радиус сегмента, край которого закреплен; b — угол раствора сегмента на краю; $\sigma^*(b)$ зависит от способа закрепления края и приведена в [7, 19, 20]. При помощи (5.4) запишем отношение асимптотических значений критических нагрузок локальной потери устойчивости вблизи края оболочки и в окрестности линии излома

$$\rho = \frac{Q_1^*}{Q_2^*} = \frac{\sigma^*(b)}{\kappa^* \sin b_1 (\sin b_2)^{-1}} = \frac{\sigma^*(b)}{\eta}$$

Для удобства значения величины $\eta = \kappa^* \sin b_1 (\sin b_2)^{-1}$ приведены на фиг. 1. При $\rho > 1$ потеря устойчивости начинается в окрестности линии излома, а при $\rho < 1$ — в окрестности края оболочки. Отметим, что в случае глухой заделки края или неподвижного шарнирного закрепления $\sigma^*(b) = 4$ (см. [4, 20] и всегда $\rho > 1$).

Поступила 21 X 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Муштари Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань, Таткнигоиздат, 1957.
2. Срубцик Л. С. О потере устойчивости несимметричных строго выпуклых тонких пологих оболочек. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
3. Ворович И. И. О существовании решений в нелинейной теории оболочек. Докл. АН СССР, 1957, т. 117, № 2.
4. Погорелов А. В. Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек. М., «Наука», 1967.
5. Срубцик Л. С. Асимптотический метод определения критических нагрузок потери устойчивости пологих строго выпуклых оболочек вращения. ПММ, 1972, т. 36, вып. 4.
6. Жуков М. Ю., Срубцик Л. С. Об асимптотическом значении верхнего критического давления непологих сферических оболочек. ПММ, 1974, т. 38, вып. 4.
7. Жуков М. Ю., Срубцик Л. С. К вопросу о потере устойчивости безмоментного напряженного состояния оболочек. Тр. IX Всес. конференции по теории оболочек и пластин. Л., «Судостроение», 1975, стр. 121—123.
8. Ворович И. И., Срубцик Л. С. Асимптотический анализ общих уравнений нелинейной теории пологих оболочек. Тр. VII Всес. конференции по теории оболочек и пластин. М., «Наука», 1970, стр. 156—159.
9. Haber S., Levinson N. A boundary value problem for a singular perturbed differential equation. Proc. Amer. Math. Soc., 1955, vol. 6, p. 866—872.
10. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Успехи матем. наук, 1957, т. 12, вып. 5.
11. Исакова Е. К. Асимптотика решения дифференциального уравнения в частных производных второго порядка параболического типа с малым параметром при старшей производной. Докл. АН СССР, 1957, т. 117, № 6.

12. *Васильева А. Б.* Равномерное приближение к решению системы дифференциальных уравнений с малым параметром при производной и приложение к краевым задачам. Докл. АН СССР, 1959, т. 124, № 3.
 13. *Тупчиев В. А.* Об угловых решениях краевых задач с малым параметром при производной в системе уравнений первого порядка. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1963, № 3.
 14. *Срубцик Л. С., Юдович В. И.* Асимптотика слабых разрывов течений жидкости при исчезающей вязкости. Докл. АН СССР, 1971, т. 199, № 3.
 15. *Батищев В. А., Срубцик Л. С.* Диффузия сферического вихря Хилла при исчезающей вязкости. Докл. АН СССР, 1971, т. 197, № 5.
 16. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1974, стр. 767.
 17. *Reissner E.* On axisymmetrical deformation of thin shells of revolution. Proc. Sympos. Appl. Math., 1950, vol. 3, p. 27—52.
 18. *Срубцик Л. С.* Асимптотика уравнений Рейсснера в нелинейной теории симметрично нагруженных оболочек вращения. Докл. АН СССР, 1968, т. 182, № 3.
 19. *Жуков М. Ю.* О верхней критической нагрузке тонких непологих строго выпуклых оболочек вращения. Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. школы. Естеств. н., 1976, № 1.
 20. *Жуков М. Ю., Ларченко В. В., Мельник В. В., Срубцик Л. С., Царюк Л. Б.* Краевой эффект и потеря устойчивости тонких непологих сферических оболочек. Тр. IX Всес. конференции по теории оболочек и пластин. Л., «Судостроение», 1975, стр. 119—121.
-